5.06(43.36)M1
3/25/1926/collated OK

FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A. M. N. H.
1924

AMERICAN MUSEUM
OF NATURAL HISTORY

Sitzungsberichte

5.06(43.36) M1

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1914

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

24-94727 May 8

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

Seite

10. Januar: Burkhardt 1*
7. Februar: Finsterwalder, Schlechtinger 1*
7. März: Schmidt, Stromer v. Reichenbach, v. Dyck . 2*
2. Mai: v. Dyck, Voss 5*
13. Juni: Burmester, Bender, Endrös, Lagally, v. Groth, v. Fedorow, Fischer 6*
4. Juli: Kriegbaum, Finsterwalder, Kleeberg, Bottlinger, Stark und Lunelund, Ewald, Sommerfeld, Rauber 10*
7. November: Merzbacher, Deimler, Liebmann, Stromer v. Reichenbach, Wagner 15*
5. Dezember: Bopp, Liebmann, Lagally 18*

Verzeichnis der im Jahre 1914 eingelaufenen Druckschriften . . 19*

II. Abhandlungen.

K. Bopp: J. H. Lamberts Stellung zum Raumproblem und zur Parallelentheorie in der Beurteilung der Zeitgenossen . 361

K. F. Bottlinger: Zur Frage der Absorption der Gravitation (mit 1 Tafel) 223

H. Burkhardt: Über Funktionen großer Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung 1

L. Burmester: Über die Erscheinung bei der Beobachtung der Speichen eines hinter parallelen Stäben bewegten Rades, genannt das Staketphänomen (mit 2 Tafeln) . . . 141

Seite

A. Endrös: Zum Problem des Euripus (mit 1 Figurentafel und 1 Kartenskizze im Text) 99

P. P. Ewald: Interferenzaufnahme eines Graphitkristalles und Ermittlung des Achsenverhältnisses von Graphit . . . 325

S. Finsterwalder: Das Verhältnis der bayrischen zur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München . 53

S. Finsterwalder: Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern . 241

R. Kleeberg: Angenäherte Bestimmung entfernter Koeffizienten in Entwicklungen nach der mittleren Anomalie in der Theorie der Keplerschen Bewegung 191

M. Lagally: Systeme von Potentialflächen und Stromflächen . 157

M. Lagally: Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit 377

H. Liebmann: Zur Theorie der Elementvereine 339

H. Liebmann: Eine Eigenschaft der C. Neumannschen Konfigurationskonstante 369

H. Lunelund s. unter J. Stark.

A. Rauber: Untersuchungen über die Funktionen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben 287

H. Schlechtinger: Das Verhalten der Plastosomen in der Spermatogenese von Hirudo medicinalis und Aulastomum vorax (mit 2 Tafeln) 13

M. Schmidt: Untersuchung regionaler und lokaler Bodensenkungen im oberbayerischen Alpenvorland durch Feinnivellement (mit 4 Textfiguren) 71

A. Sommerfeld: Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen bei Wechselstrombetrieb 261

J. Stark und H. Lunelund: Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen 205

E. Wagner: Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen nach Versuchen gemeinsam mit Joh. Brentano (mit 2 Tafeln) . 329

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1914.

Sitzung am 10. Januar.

Herr H. Burkhardt legt eine Mitteilung über Funktionen ganzer Zahlen vor, mit Anwendungen auf Probleme der Keplerschen Bewegung der Himmelskörper.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 7. Februar.

1. Herr S. Finsterwalder spricht über

Das Verhältnis der bayerischen zur preußischen Landestriangulierung und die Lotabweichung in München.

Als Vorarbeit für die demnächst auszuführende Neutriangulierung von Bayern wurden im Anschluß an die v. Orffsche Bearbeitung der alten bayerischen Triangulation Formeln aufgestellt, welche zehn auf 210 Kilometer Länge verteilte, im Norden Bayerns gelegene gemeinsame Dreieckspunkte beider Vermessungen zu möglichst engem Zusammenschluß bringen und damit die alte bayerische Triangulation in das System der preußischen überführen. Damit wurde eine geodätische Verbindung zwischen dem Ausgangspunkt der preußischen

Vermessung (Rauenberg bei Berlin) und dem der bayerischen (nördlicher Frauenturm in München) hergestellt. Aus den Unterschieden der geodätischen und der astronomisch bestimmten Koordinaten von München folgt eine relative Lotabweichung von München gegen Berlin im Betrag von 2.6 in Breite (um welchen Betrag München nach der geodätischen Bestimmung nördlicher liegt als nach der astronomischen) und von 0.6 westlich in der Länge. Überträgt man die für Berlin geltende Lotabweichung mit nach München, so folgt eine weitgehende Übereinstimmung der geodätischen und astronomischen Bestimmung der Lage von München. Es bleibt dann nur mehr eine kleine, nach den Alpen zu gerichtete Ablenkung des Lotes im Betrage von 0.7.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Mollier legt eine Abhandlung des Herrn J. Schlechtinger vor, in welcher die Entstehung der Samenzellen bei Hirudineen mit besonderer Berücksichtigung der Plastosomen geschildert wird.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 7. März.

1. Herr M. Schmidt berichtet über die Ergebnisse der im letzten Jahrzehnt im Auftrag der K. B. Erdmessungskommission durch Feinnivellements von besonders hoher Genauigkeit ausgeführten Untersuchung von regionalen und lokalen Bodensenkungen im oberbayerischen Alpenvorland. Diese Nivellements besitzen so geringe unregelmäßige und systematische Fehler, daß durch sie der Höhenunterschied zwischen zwei 100 km voneinander entfernten Punkten bis auf 2 cm genau bestimmt wird. Die Berechnungen haben ergeben, daß im untersuchten Gebiete in den letzten 40 Jahren Höhenänderungen an Festpunkten (von meßbarer Größe) nicht eingetreten sind, obwohl solche längs einer das Gebiet durchschneidenden tekto-

nischen Hauptstörungslinie bei den dort häufig vorkommenden Erderschütterungen wohl möglich wären.

Eine weitere Untersuchung bezieht sich auf die örtlich begrenzten Höhenänderungen der im Grubenfeld des Kohlenwerkes Penzberg in den Jahren 1878 und 1910 festgelegten Höhenpunkte des bayerischen Präzisionsnivellements, welche durch den in 200—400 m Tiefe lebhaft betriebenen Kohlenbergbau kleine, aber mit der Zeit fortschreitende Senkungen erfahren, die zwar nur wenige Millimeter im Jahre betragen, bei der am alten Bahnstationsgebäude in Penzberg im Jahre 1878 angebrachten Höhenmarke aber doch auf 0,72 m angewachsen sind. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Rothpletz legt vor eine Abhandlung von Dr. Ernst Stromer von Reichenbach:

Die Topographie und Geologie der Strecke Gharag—Baharije nebst Ausführungen über die geologische Geschichte Ägyptens.

Der Autor beschreibt unter Vorlage von Karten und Abbildungen seine im Winter 1910/11 mit Unterstützung der K. Bayer. Akademie der Wissenschaften unternommene Reise von Fajûm nach der Baharije-Oase unter besonderer Berücksichtigung der geologischen Befunde. Er weist in Baharije in fluviomarinen Schichten der mittleren Kreidezeit eine mannigfaltige, bisher unbekannte Fauna von Hai-, Lungen- und Ganoidfischen, Plesiosauriern, Schildkröten, Krokodiliern, Schlangen und Dinosauriern nach. Mit diesen Schichten, die auch Austern und Reste von Süßwasser- und Landpflanzen, besonders von Baumfarnen enthalten, beginnt nach ihm die große Transgression des Mittelmeeres in Ägypten.

Er erörtert im Anschlusse daran den Charakter und die Verbreitung der wichtigsten Formationsstufen Ägyptens und die jeweilige wahrscheinliche Verbreitung von Land und Meer, das Vorhandensein ehemaliger Flußmündungen, die klimatischen Verhältnisse sowie das geologische Alter einzelner Stufen speziell

auf Grund ihrer Wirbeltierfaunen von der mittleren Kreide bis zur jüngsten Tertiärzeit.

Im einzelnen berichtet er noch über mehrere geologische Fragen, wie über gewisse eigenartige Verwitterungserscheinungen und über die Entstehung abflußloser Kessel in der lybischen Wüste. (Erscheint in den Abhandlungen.)

3. Herr W. v. Dyck berichtet über einige neue, von ihm angegebene Apparate zur graphischen Darstellung der durch eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung definierten Kurvenordnung.

Sitzung am 2. Mai.

1. Herr W. von Dyck bespricht die von ihm in Paris aufgefundenen Briefe von Johannes Kepler, die einer in den Jahren 1709—1750 durch den Astronomen J. N. Delisle zusammengebrachten Sammlung entstammen und sich gegenwärtig auf der bibliothèque nationale und auf der Pariser Sternwarte befinden.

Die Briefe sind an den sächsischen Kanzler J. Seussius und an den Leipziger Astronomen Philipp Müller gerichtet und beziehen sich besonders auf die wissenschaftlichen Arbeiten der letzten Lebensjahre Keplers.

Außer diesen Briefen enthält die Sammlung die Korrespondenz des Danziger Astronomen P. Crüger und des Schwiegersohns von Kepler, J. Bartsch mit Ph. Müller, die sich vorzugsweise auf Arbeiten Keplers bezieht.

2. Herr A. Voss überreicht der Klasse seine Schrift „Über den Erkenntniswert der Mathematik" und knüpft daran eine kurze Erläuterung über die darin behandelten allgemeinen Fragen.

Sitzung am 13. Juni.

1. Herr Ludwig Burmester hält einen Vortrag:

Über das Staketphänomen.

Wenn ein Wagen hinter einem Staket schnell vorüberfährt, erscheint für den Beobachter an dem Rade ein strauchartiges Gebilde aus krummen Streifen, das gleichsam aus der Nabe des Rades herauswächst und sich in unveränderter Stellung mit dem Wagen fortbewegt. Diese Erscheinung wird Staketphänomen genannt. Die krummen Streifen sind in Bezug auf den Wagen die Bahnen, in denen sich die von den Stäben des Stakets und den Speichen des Rades gebildeten Kreuzungsstellen als Deckflächen bewegen. Da sich nach der wissenschaftlichen Untersuchung in jeder dieser Bahnen fortgesetzt neu entstehende Deckflächen bewegen, so werden von diesen Deckflächen immer neue Lichteindrücke auf das Auge erfolgen, die durch ihre Nachdauer verschmelzen und die als krumme Streifen wahrnehmbare Bahnen erzeugen. Dadurch ist das Staketphänomen physiologisch erklärt und der seit 90 Jahren traditionelle Irrtum, daß diese Streifen Truggebilde der bewegten Speichen seien, berichtigt. Die Entstehung der Streifen wurde durch einen gezeichneten Mechanismus veranschaulicht, in dem die Glieder das Staket, das Wagengestell und das Rad vertreten. Das Staketphänomen wurde vermittelst einer Vorrichtung experimentell gezeigt, bei der das Staket aus schwarzem Karton und das Rad mit den Speichen aus weißem Karton geschnitten hergestellt ist. Hinter diesem Staket rollt eine mit schwarzem Karton als Unterlage bedeckte Scheibe, auf der das Kartonrad achsial festgeschraubt ist. Das beobachtete strauchartige Gebilde der krummen Streifen erscheint ebenso wie das nach der Theorie konstruierte Gebilde der Kurven, die den krummen Streifen entsprechen. Es ist überraschend, daß die photographischen Momentaufnahmen in $^1/_{30}$ Sekunde

klare Bilder von diesen Erscheinungen ergeben, die durch die physiologische Nachwirkung der Lichteindrücke verursacht werden. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Rückert legt vor eine im Münchener Anatomischen Institut ausgeführte Arbeit des Herrn Dr. Otto Bender

Über die Entwicklung des Hyobranchialapparates und des Kehlkopfs der griechischen Landschildkröte (Testudo graeca).

Die Abhandlung stellt die Fortsetzung einer im Jahre 1912 in den Abhandlungen der K. B. Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Untersuchung über die Entwicklung des Kiefer- und des Zungenbeinbogens und der Paukenhöhle dar.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

3. Herr Siegmund Günther legt vor eine Arbeit des K. Gymnasialprofessors Dr. Anton Endrös in Freising:

Zum Problem des Euripus.

Die alte Frage der unregelmäßigen Stromvorgänge an der schmalen Meerenge zwischen der Insel Euböa und dem griechischen Festlande gab zu einem Streite zwischen Forel und Krümmel einerseits und Miaulis andererseits Veranlassung, so daß das Problem von neuem als sehr verwickelt bezeichnet wird. Der Verfasser weist nun an der Hand der von Miaulis angestellten Beobachtungen nach, daß ein anomaler Flutwechsel und eine merkwürdige Vertauschung der Hoch- und Niedrigwasserzeiten, wie sie Miaulis behauptete, nicht nur vorhanden sind, sondern sich aus den Größenverhältnissen der halbtägigen Mond- und Sonnentiden vollständig begründen lassen und eine Hauptursache der verwickelten Stromvorgänge bilden. Zugleich wird gezeigt, daß die erwähnten Beobachtungen einen viel tieferen Einblick in das komplizierte Problem gewähren, als man bis jetzt angenommen hat, daß nämlich ein merkwürdiges Zusammentreffen verschiedener Faktoren, wie des

anormalen Gezeitenverlaufes im nördlichen Meeresteile, des korrespondierenden Ganges der Gezeitenschwankungen im südlichen, der starken Niveauänderungen durch den Wind und der ständig auftretenden Seiches nördlich und südlich der Meerenge, jene Regellosigkeit in den Strömungen erzeugt, wie sie von alters her als sprichwörtlich bekannt war.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr S. Finsterwalder legt vor eine Abhandlung von Herrn Max Lagally über:

Systeme von Potentialflächen und Stromflächen.

Es werden die Bedingungen untersucht, unter welchen ein Flächensystem als Schar von Potentialflächen oder die Schnitte von zwei Flächensystemen als Strömungslinien einer Potentialströmung aufgefaßt werden können. Dabei ergibt sich, daß 3 solche zu einer Potentialströmung gehörige Flächen den Raum so in Zellen einteilen können, daß deren Erstreckung in Richtung der Strömung überall proportional ihrem Querschnitt senkrecht hiezu ist, eine Eigenschaft, die als Erweiterung der bekannten quadratischen Einteilung durch Potentiallinien und Stromlinien einer ebenen Strömung auf den Raum erscheint. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr P. v. Groth demonstriert die Modelle der Kristallstruktur von Diamant, Flußspat u. a. Mineralien, wie sie sich aus den neuen Forschungen mit Hilfe der Röntgenstrahlen ergeben hat. Die daraus gezogene Folgerung, daß in den Kristallen nur Atomkräfte wirken, bedingt folgende Anschauung über den Vorgang der Kristallisation: die in der Lösung, der Schmelze oder dem Gase der Substanz vorhandenen Moleküle verbinden sich, wenn sie sich einander so nähern, daß sie richtende Kräfte aufeinander ausüben, zum Kristallbau derart, daß wenigstens ein Teil ihrer intramolekularen Atombindungen in solche zwischen den Atomen verschiedener Moleküle übergeht. Für die Erhaltung gewisser Atombindungen

auch in der neu entstehenden regelmäßigen Anordnung der Atome sprechen die mannigfachen, bisher beobachteten Beziehungen der Struktur der Kristalle und ihrer chemischen Konstitution. Bei den organischen Verbindungen kommen in dieser Beziehung besonders die aromatischen in Betracht. Um zu erforschen, ob die Ursache hiervon auf die Erhaltung der ringförmigen Bindung der Kohlenstoffatome im Benzol beruhe, wurde das Verhalten anderer Ringbindungen, nämlich die durch ein Sauerstoffatom oder die zweiwertige Gruppe NH, untersucht; es ergab sich, daß, während die zweibasischen aliphatischen Säuren und ihre Derivate keine kristallographische Verwandtschaft zeigten, diese sofort hervortrat, wenn die Ringschließung der offenen Ketten erfolgt war, also in den Anhydriden und Imiden jener Säuren. Hiernach bietet die kristallographische Untersuchung zyklischer Verbindungen besonders günstige Aussichten des Erfolges für die Erforschung der gesetzmäßigen Beziehungen zwischen der chemischen Natur der Substanzen und ihrer Kristallstruktur.

6. Ferner legte Herr P. v. Groth drei zusammenhängende Arbeiten des korrespondierenden Mitgliedes E. v. Fedorow vor, deren Titel lauten:

1. Geometrische Systeme.
2. Die Hauptgesamtheiten in der neueren Geometrie.
3. Die polaren Verhältnisse in Bezug auf Dreiecke und Vierflächner.

(Erscheinen in den Abhandlungen.)

7. Herr C. v. Linde legt vor einen Bericht von Professor Karl F. Fischer über

experimentelle Untersuchungen,

welche die Festlegung von Fixpunkten für tiefe Temperaturen zum Gegenstande hatten. Der vorliegende erste Teil der Abhandlung enthält die Bestimmung der Siedepunkte des ver-

flüssigten, chemisch gewonnenen, reinen Sauerstoffes für ein Druckintervall von nahezu normalem Drucke bis herab zu 22 mm Quecksilberdruck.

Es wurden verhältnismäßig große Mengen durch Wärmeübergang aus Metallkupferkonstanten in die Flüssigkeit zum Sieden gebracht und die entsprechenden Temperaturen mit einem Thermoelement und einem sehr empfindlichen Nadelgalvanometer studiert. Die Angaben des Thermoelementes wurden zum Anschlusse an die internationale Wasserstoffskala mit Hilfe eines absoluten Wasserstoffgasthermometers in siedendem Sauerstoff, in siedendem Stickstoff und in nahezu schmelzendem Stickstoff geeicht.

Die Ergebnisse anderer Forscher, welche übrigens nicht bis an die untere Druckgrenze der Fischerschen Arbeit herabreichen, stehen in voller Übereinstimmung mit den vorliegenden Ergebnissen. Als normaler Sauerstoffsiedepunkt kann nunmehr mit großer Sicherheit der Wert von fast genau -183^{0} C angesehen werden. (Erscheint in den Abhandlungen.)

Sitzung am 4. Juli.

1. Herr S Mollier legt vor eine Arbeit des Herrn Karl Kriegbaum:

Über die Oxydasereaktion von Unna mit einem Anhang über Vitalfärbung

zur Aufnahme in die Abhandlungen der Klasse.

2. Herr Seb. Finsterwalder spricht

Über den Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden Bayerns.

Um für das künftige bayrische Hauptdreiecksnetz im Norden Bayerns eine möglichst ausgedehnte Anschlußstrecke

zu erhalten, wurde das sächsische Netz an 8 Punkten an das preußische Netz möglichst genau angepaßt, was sich mit einem mittleren Koordinatenfehler von 13 cm durchführen ließ. Die für Bayern neugewonnenen Punkte Kapellenberg und Ochsenkopf zeigen nur 6—8 cm Koordinatenfehler und können unbedenklich als Zwangsanschlußpunkte des neuen Netzes verwendet werden. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr v. Seeliger legt vor eine Abhandlung des Herrn Kleeberg:

Angenäherte Bestimmung entfernter Koeffizienten in großen Reihenentwicklungen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Derselbe legt vor eine für die Sitzungsberichte der Akademie bestimmte Abhandlung des Herrn Dr. Bottlinger

Über die Frage der Absorption der Gravitation.

Wenn die Ansicht festgehalten wird, daß die anziehende Wirkung der Massen aufeinander durch dazwischen gelagerte Massen geschwächt werden kann, dann ist zu vermuten, daß ein solcher Einfluß, der jedenfalls sehr gering ist, noch am ehesten in der Bewegung des Erdmondes aufgefunden werden könnte. Bei jeder Mondfinsternis tritt die Erde zwischen Sonne und Mond und schwächt dann die Einwirkung der Sonne auf den Mond. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Berücksichtigung der neuesten Feststellungen über die Mondbewegung zu einem negativen Resultate führen, d. h. daß die eventuelle Absorption der Gravitation durch die Erde zu gering ist, um gegenwärtig nachgewiesen werden zu können. Bei den Trabanten der anderen Planeten liegt die Sache, wie zu vermuten war, noch ungünstiger.

5. Herr A. Sommerfeld legt der Klasse vor:

a) Eine Arbeit von Professor J. Stark und H. Lunelund in Aachen:

Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen.

Schon bei seiner Entdeckung des Doppler-Effektes an Kanalstrahlen hatte J. Stark für Wasserstoff-Kanalstrahlen eine teilweise Polarisation des exmittierten Lichtes beobachtet. Diese Erscheinung, die von anderer Seite bestritten wurde, wird hier quantitativ verfolgt und genauer zerlegt. Es zeigt sich, daß die Bandenlinien des Wasserstoffs in den Kanalstrahlen ebenso wie in der negativen Glimmschicht unpolarisiert sind, daß dagegen die Serienlinien der Wasserstoff-Kanalstrahlen im Betrage von 20 bis 35% polarisiert sind, so zwar, daß die Schwingungen parallel der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen diejenigen senkrecht dazu in dem genannten Betrage überwiegen. Da es wahrscheinlich ist, daß die ruhende Intensität der Kanalstrahl-Serienlinien unpolarisiert ist, kommt die beobachtete Polarisation allein auf die bewegte Intensität, für welche das angegebene Polarisationsverhältnis nach Abzug der ruhenden Intensität eine untere Grenze darstellt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

b) Eine Arbeit von P. Ewald:

Über die Struktur des Graphit.

Herr Ewald hat beim Studium des Braggschen Diamant-Modelles bemerkt, daß sich dieses unter Beibehaltung seiner vierwertigen, mit tetraedrischen Valenzen ausgestatteten Kohlenstoff-Bausteine so umordnen läßt, daß daraus ein hexagonales Punktsystem entsteht. Es war zu vermuten, daß dieses die Struktur des Graphit liefert. Während Aufnahmen mit Graphitplättchen aus der hiesigen Mineralogischen Sammlung keine hinreichend scharfen Bilder ergaben, haben neue aus Berlin bezogene Exemplare vorzügliche Röntgenogramme geliefert,

deren Durchrechnung die vorangestellte Vermutung voll bestätigt: Aus der Lage der Interferenzflecke ergab sich das Achsenverhältnis $\frac{c}{a} = 1{,}63$, während nach dem Modell $\frac{c}{a} = 1{,}62$ vorausberechnet war. Die drei stärksten Flecke entsprechen einem Index $h_c = 8$ und das Modell läßt gerade für diesen Wert des Index eine besondere Verstärkung durch Interferenz voraussehen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

c) Eine eigene Arbeit:

Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen.

Dieselbe knüpft an eine experimentelle Untersuchung der Herren Rukopp und Zenneck an, in welcher gezeigt wird, daß im Lichtbogenkreis ein Wechselstrom mit erheblichem Wirkungsgrad auf den dreifachen, fünffachen etc. Wert seiner Frequenz transformiert werden kann. Dieses Ergebnis, welches möglicherweise für die Praxis der drahtlosen Telegraphie wichtig werden kann, wird hier theoretisch begründet, ebenso die Form der oszillographisch aufgenommenen Stromkurven. In einem Anhang werden die sogenannten Lichtbogenschwingungen zweiter Art, die in der Poulsen-Lampe ebenfalls für die drahtlose Telegraphie wichtig geworden sind, theoretisch näher untersucht. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

6. Herr A. Voss legt vor eine Abhandlung des Herrn A. Rauber:

Untersuchungen über die Funktionen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben.

Die Abhandlung führt die Untersuchung weiter, welche der Verfasser in seiner Inaugural-Dissertation begonnen hat. Die Bewegung des starren schweren Körpers mit dreiachsigem Trägheitsellipsoid (dreiachsiger Kreisel), der in einem Punkte

festgehalten ist, ließ sich bisher nicht durch analytische Entwickelungen für alle Zeiten beschreiben. Nur in einzelnen Grenzfällen, unter besonderen Voraussetzungen über die Massenverteilung oder die Art der Bewegung war die Lösung möglich. Es werden nunmehr auf einem neuen Wege Funktionen angegeben, welche bei beliebiger Massenverteilung und beliebigen Anfangsbedingungen die Elemente der Bewegung für alle endlichen Zeiten darstellen. Ferner wird, neben analytischen Untersuchungen über diese Funktionen, auseinandergesetzt, wie die Lösung sich in einfacher Weise aufbauen läßt, so daß die geometrisch-mechanische Diskussion des dreiachsigen festen Kreisels mit einem gewissen Aufwand von Rechnung mit beliebiger Genauigkeit ausgeführt werden kann.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 7. November.

1. Herr E. von Drygalski bespricht eine für die Abhandlungen bestimmte, umfangreiche Monographie von G. Merzbacher über die Bogdo Ola-Kette, den höchsten Teil des östlichen Tian-Schan, den der Verfasser auf seiner letzten Reise 1907/08 als erster genauer wissenschaftlich untersucht hat, nachdem er schon früher 1902/03 im westlichen und im zentralen Tian-Schan gearbeitet hatte.

Das Bogdo Ola-Gebirge erhebt sich unter 43° 45′ n. Br. und 88° 30′ ö. L. zu Kammhöhen von 5500 m und noch 1000 m höheren Gipfeln in drei großen Stufen aus der 630 m hohen Dsungarei, um dann nach Süden steil zu der Turfan-Senke abzufallen, deren Boden heute 169 m unter dem Meeresspiegel liegt und früher noch tiefer lag, ehe er durch gewaltige Mengen von Gebirgsschutt überdeckt und erhöht wurde. Der Bau der Bogdo Ola-Kette ist geschlossener als der des westlichen Tian-Schan, da in ihrem Inneren die großen Längsbrüche des letzteren fehlen. Sie ist aber nach außen durch Brüche abgegrenzt, nämlich im Norden und Süden durch tiefe Längsbrüche gegen die Dsungarei und die Turfan-Senke sowie im Westen durch den Querbruch von Urumtschi, und bietet mit ihrer großen Erhebung über diese Nachbarländer einen imponierenden Anblick. Bogdo Ola ist die östlichste Kette des Tian-Schan, die an Gletschern reich ist; auch war sie in der Vorzeit von einer geschlossenen Eisdecke verhüllt, deren äußerste Spuren am Nordhang bis 1100 m und am Südhang bis 1725 m abwärts festgestellt wurden, wahrscheinlich aber noch tiefer herab gefunden werden würden, wenn die mächtige Schutthülle die Beobachtung zuließe. Die heutige Schneegrenze wurde am Nordhang bei 3650 m und am Südhang bei 4025 m festgelegt, desgleichen die Tatsache, daß die Schneegrenze dort in der Eiszeit ähnlich gesenkt war, wie in europäischen Gebirgen und nicht nur 6—700 m, wie andere Forscher angenommen haben.

Der Tian-Schan ist in seiner ganzen Länge abflußlos und deshalb in seinen tieferen Gebieten im eigenen Schutt vergraben. Das gilt besonders für den östlichen Teil, also für

die Bogdo Ola-Gruppe. Die Monographie Merzbachers verfolgt die Entwicklung zur Abflußlosigkeit, also zur Kontinentalität, sowohl an den Schuttmengen wie an den Tal- und Bergformen, und kommt zu dem Ergebnis, daß nach der dortigen Angarazeit (unterer Jura) und nach den Han Hai-Bildungen, die bis ins Pliozän reichen, also nach zwei Perioden, die durch fortschreitende Landentwicklung und Trockenbildungen gekennzeichnet sind, durch die Gobibildungen des Postpliozäns wieder eine Periode größerer Feuchtigkeit angezeigt ist. Anschließend wird auch die Eiszeit des Tian-Schan als eine Periode größerer Feuchtigkeit und nicht nur größerer Kälte erklärt, wie andere gemeint haben. Die Entwicklungen Merzbachers sind durch ein reichhaltiges Beobachtungsmaterial begründet und durch Karten, Profile und Bilder treffend belegt.

2. Herr Finsterwalder legt zwei Abhandlungen vor:

a) Von Wilhelm Deimler:

Konforme Abbildung des ganzen Erdellipsoides auf die Kugel.

Es wird die singularitätenfreie, in Bezug auf den Äquator symmetrische Abbildung zu Grunde gelegt, worauf die Bilder der geodätischen Linien des Ellipsoides in Beziehung zu den Großkreisen der Kugel gebracht und durch Annäherungen, die nach dem Quadrat der Exzentrizität fortschreiten, dargestellt werden. Hieran schließt sich die Lösung der geodätischen Hauptaufgaben für sehr lange geodätische Linien, die annähernd den halben Ellipsoidumfang umfassen, wobei in den Azimuten eine Genauigkeit bis auf kleine Bruchteile der Sekunde, in den Längen bis auf solche des Meters erreicht wird. Die Hauptkorrektion findet eine ausgiebige nomographische Darstellung.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

b) Von Professor H. Liebmann:

Zur Theorie der Elementvereine.

Es werden zuerst die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung in $n+1$ Veränderlichen bestimmt, deren Charak-

teristiken gerade Linien sind, und ausgezeichnete Sonderfälle derselben untersucht. Sodann wird die Abbildung der Krümmungselemente durch Berührungstransformationen in dem Falle behandelt, in dem letztere auf unterdimensionale Punktmannigfaltigkeiten führen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Rothpletz legt vor eine Arbeit von Prof. E. Stromer v. Reichenbach:

Über Wirbeltierreste der Baharije-Stufe in der Libyschen Wüste,

die er mit Unterstützung der Akademie der Wissenschaften und von Freunden hat ausgraben lassen. Sie sind besonders deshalb von großem Interesse, weil sie uns mit einer Wirbeltierfauna der mittleren Kreideformation bekannt machen, die für Afrika ganz neu ist und auch sonst in so guter Erhaltung und Reichhaltigkeit bisher noch nirgends aufgefunden worden ist. Es sind in fluviomarinen und Süßwasserablagerungen eingeschlossene Fisch- und Reptilienreste aus den Abteilungen der Haie, Rochen, Lungen-, Ganoid- und Knochenfische, der Schlangen, Schildkröten, Krokodile und Dinosaurier. Besonders eingehend wird ein auffallend kurzschnauziges Krokodil beschrieben (Libycosuchus brevirostris), das zwar ganz neu ist, aber doch zwischen Arten des oberen Jura und der oberen Kreide eine Mittelstellung einnimmt. Es ähnelt auch infolge seines Raubtiercharakters den noch älteren triassischen Reptilien Südafrikas. (Erscheint in den Abhandlungen.)

4. Herr Röntgen bespricht eine Arbeit von Ernst Wagner:

Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen.

Das kontinuierliche Spektrum, nach de Broglie photographiert, zeigt zwei Banden. Es wurde experimentell festgestellt, daß sie durch die Fluoreszenz des Silbers und Broms verursacht werden. Ferner konnte sowohl das Fluoreszenz- wie das Absorptionsspektrum von Metallen photographiert wer-

den: sie zeigten anschaulich den Barklaschen Zusammenhang. Endlich gelang eine quantitative Fassung der Stokesschen Regel.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 5. Dezember.

1. Herr S. Günther legt für die „Sitzungsberichte“ einen Aufsatz vor von Dr. Karl Bopp (Heidelberg), betitelt:

J. H. Lamberts Stellung zum Raumproblem und zur Parallelentheorie in der Beurteilung der Zeitgenossen.

Des ferneren beantragt er, in die „Abhandlungen“ eine Reihe von Arbeiten des genannten Verfassers über Lamberts wissenschaftliche Leistungen aufzunehmen, und zwar würden dieselben unter folgendem Sammeltitel zusammenzufassen sein:

J. H. Lamberts „Monatsbücher“ mit den zugehörigen Kommentaren.

2. Herr S. Finsterwalder legt zwei für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlungen vor:

a) Von H. Liebmann:

Eine Eigenschaft der C. Neumannschen Konfigurationskonstanten.

Es wird gezeigt, daß im Gegensatz zur Ebene zwei inverse Bereiche im Raum nicht immer die gleiche Konfigurationskonstante besitzen.

b) Von Max Lagally:

Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit.

Helmholtz und Kirchhoff haben die Bewegung von Wirbeln (Strudeln) in einer ruhenden, unendlich ausgedehnten Flüssigkeit untersucht. Hier wird die Aufgabestellung in doppelter Hinsicht verallgemeinert, indem einesteils entweder von vornherein eine beliebige, wirbelfreie Strömung der Flüssigkeit zugelassen oder anderenteils die Bewegung von Wirbeln in teilweise begrenztem Gebiete, z. B. um ein Hindernis herum studiert wird.

Verzeichnis der im Jahre 1914 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkeh rsteht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:
— — Zeitschrift, Bd. 35, Halbbd. 1, 2.
Abbeville. Société d'Émulation:
— — Bulletin trimestriel 1913, No. 3, 4.
Acireale. Accademia:
— — Rendiconti e Memorie, Classe di scienze, vol. 8, 1912/13.
Adelaide. Royal Society of South Australia:
— — Memoirs, vol. 1, part 4; vol. 2, part 4.
— — Transactions, Proceedings and Report, vol. 37, 1913.
Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:
— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. XI.
— — Rad, Kniga 199 und 200.
— — Zbornik, Kniga XVIII, 2.
— — Rječnik 32.
— — Monumenta spectantia historiam Slavorum, vol. 34.
— — Starine, vol. 34.
— — Stari Pisci, vol. 22.
— — Prinosi, vol. 4.
— — Pravna povijest Dalmatinskih gradova, Div. I.
— — Izvješča Svez. 1, 1914.
— — Pirodoslovna istrazivanja Svez. I.
— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:
— — Vjestnik, Bd. XV, Heft 4.
— Kroat. Naturwissenschaftl. Gesellschaft:
— — Glasnik, Bd. 25, No. 4; Bd. 26, No. 1—3.

Aix. Société d'études Provençales:
— — Annales de Provence, année 10, No. 3—6; année 11, No. 1.
— Bibliothèque de l'Université:
— — Annales de la faculté de droit, tom. 6, No. 1, 2.
— — Annales des lettres, tom. 6, No. 1, 2.

Alabama. Geological Survey:
— — Bulletin 14.

Albi. Société des sciences, arts etc. du Tarn:
— — Revue du département du Tarn, année 38, No. 1—5.

Albuquerque. University of New Mexico:
— — Bulletin, Whole No. 73.

Alençon. Société historique et archéologique de l'Orne:
— — Bulletin, tom. 33, No. 1, 2.

Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. III, No. 7—16.

Amani. Biologisch-landwirtschaftliches Institut:
— — Der Pflanzer. 9. Jahrg., No. 12; 10. Jahrg., No. 1—5 und Beiheft 1.
— — Düngungsversuche in den deutschen Kolonien. Heft 3.

Amiens. Académie:
— — Mémoires, tom. 59, 1912.
— Société des Antiquaires de Picardie:
— — Bulletin trimestriel, année 1913, trim. 2—4.
— — La Picardie, tom. 5, No. 2.

Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie. deel XVIII, No. 1—3.
— — Verslagen en vergaderingen, deel 22, No. 1, 2.
— — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XIV, No. 2—5.
— — Verslagen en mededeelingen, 4. Reeks, deel 12.
— — Jaarboek 1913.
— — Prijsvers 1914.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 31, No. 1 - 6.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Wiskundige opgaven; deel 11, stuk 6.
— — Revue des publications mathém., tom. 22, p. 1.

Annaberg. Verein für Geschichte von Annaberg:
— — Mitteilungen, Heft 12.

Antwerpen. Société d'Astronomie d'Anvers:
— — Gazette astronomique, No. 74—80.
— — Rapport 9, 1913.
— — Mémoires 1.

Arras. Académie des sciences, lettres et arts:
— — Mémoires, tom. 44, 1913.
Aschaffenburg. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 und Programm von Müller.
Athen. Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Athena, tom. 25, Heft 1—4; tom. 26, Heft 1, 2.
Augsburg. Historischer Verein:
— — Zeitschrift, 40. Jahrg., 1914.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — 41. Bericht.
Aurillac. Société des lettres, sciences et arts:
— — Revue de la Haute-Auvergne, 15e année, 1913, fasc. 3, 4.

Bagnères de Bigorre. Société Ramond:
— — Bulletin, année 47, No. 1—4.
— Folklore Pyrenéen:
— — Bulletin trimestr., année 1913, No. 2.
Baltimore. Peabody Institute:
— — 47th Annual Report, 1914.
— Chemical Society:
— — American Chemical Journal, vol. 50, No. 2—6.
— Johns Hopkins University:
— — Circulars 1913, No. 7—9; 1914, No. 2.
— — American Journal of Mathematics, vol. 35, No. 4; vol. 36, No. 1.
— — American Journal of Philology, No. 135, 136.
— — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, No. 275—285.
— — Studies in historical and political Science, vol. 31, No. 3, 4; vol. 32, No. 1.
Bamberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Klaiber.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Huber.
— K. Lehrerbildungsanstalt:
— — 40. Jahresbericht 1913/14.
— K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1913/14.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 71, 1913/14.
Barbados. Imp. Commissioner of agriculture:
— — Agricultural News, No. 303—318.
Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Boletin, vol. 3, No. 5.
— — Memorias, vol. 10, No. 24 - 30; vol. 11, No. 1—10.
— — Nomina del personal 1913/14.

Barcelona. Club Montanyenc:
— — Bulletti, any 1, No. 8—10.
— Institut d'Estudis Catalans:
— — Anuari 4, 1911/12.
— — Les Monedes Catalanes, vol. 3, 1913.
— — Les Obres d'Auzias March, vol. 2.
— — Bulleti de la Biblioteca de Catalanya, Any I, No. 1, 2.
Basel. Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. XIII, Heft 2; Bd. XIV, Heft 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 24.
Bastia. Société des sciences historiques et naturelles:
— — Bulletin, fasc. 355—360.
Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 56, afl. 1, 2.
— — Notulen van de vergaderingen, deel 51, afl. 3, 4.
— — Verhandelingen, deel 60, afl. 2.
— — Oudheidkundig verslag 1913, 4; 1914, 1.
— R. Magnetical and Meteorological Observatory:
— — Seismological Bulletin 1912, No. 6—12; 1913, No. 1—12; 1914, No. 1—8.
— — Regenwaarnemingen, vol. 33, No. 2; vol. 34, No. 2.
— — Observations, made at secondary stations, vol. 33, 1910.
— Kon. Natuurkundige Vereenigung in Nederlandsch-Indie:
— — Tijdschrift, deel 72, 1, 2.
Bayreuth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913 14 mit Programm von Motschmann.
— Historischer Verein:
— — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 25, Heft 3.
Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:
— — Vlad. Gjorgjević, Cina Gora i Austrija u XVIII veku, 1912.
— — P. S. Pavlović, Mekušci iz Serbije, I, 1912.
— — Slob. Jovanović, Ustavbranitelji i njichova vlada, 1912.
— — St. Stanojević, Borba za samostalnost katoličke crkve u nemanjićskoj državi, 1912.
— — Zakonski spomenici spipskich država, 1912.
Bergen (Norwegen). Museum:
— — Aarsberetning for 1913—14.
— Aarbog 1913, Heft 3; 1914/15, Heft 1.

Bergen (Norwegen). Museum:
— — Sars G. O., Crustacea, vol. VI, 3—6.
— — Skrifter, Bd. 1, No. 2.
Bergzabern. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.
Berkeley. University of California:
— — Bulletin, third Serie, vol. VI, No. 12, 14, 15; vol. VII, No. 2—6.
— — Chronicle, vol. 15, No. 3, 4; vol. 16, No. 1, 2.
— — Report 1912/13.
— — Publications, American Archaeology etc., vol. 10, No. 5, 6; vol. 11, No. 2; Botany, vol. 4, No. 19; vol. 6, No. 1; Economics, vol. 3, No. 1—3; vol. 4, No. 1; Geology, vol. 7, No. 13—25; vol. 8, No. 1 bis 5; History, vol. 1, No. 3; Pathology, vol. 2, No. 11—15; Class. Philology, vol. 2, No. 10; Modern Philology, vol. 3, No. 2; vol. 4, No. 1; Physiology, vol. 4, No. 18; Psychology, vol. 1, No. 3, 4; Zoology, vol. 10, No. 10; vol. 11, No. 5—15; vol. 12, No. 1—5; vol. 13, No. 1—5.
— — Academy of Pacific Coast history, vol. 3, No. 2.
— — Bulletin No. 18.
— College of Agriculture:
— — Bulletin 237—244.
Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen { Philos.-hist. Klasse, 1913, 8—10; 1914, 1—5. 4^0.
Physikal.-math. Klasse, 1914, 1, 2. 4^0.
— — Sitzungsberichte 1913, No. 41—53; 1914, No. 1—34.
— — Inscriptiones Graecae, vol. XI, fasc. 4.
— Allgemeine Elektrizitäts-Gesellschaft:
— — Geschäftsberichte 1913/14.
— Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 22, No. 2—4; Bd. 23, No. 1—3.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte, 46. Jahrg., No. 18; 47. Jahrg., No. 1—18.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 66, Heft 1—3.
— — Monatsberichte 1913, No. 8—12; 1914, No. 1—7.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 44, 1914.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Jahrg. 15, No. 23, 24; Jahrg. 16, No. 1—8, 10—22.
— Physiologische Gesellschaft:
— — Zentralblatt für Physiologie, Bd. 27, No. 20—26, 26a; Bd. 28, No. 1—12.
— — Bibliographia physiologica, III. Serie, Bd. 9, No. 1.

Berlin. K. Technische Hochschule:
— — Rede von Romberg 1914.
— — Personalverzeichnis S.-S. 1914; W.-S. 1914/15.
— — Bericht des Rektors für das Jahr 1913/14.
— — Programm 1914/15.
— — Schriften 1913/14.
— Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik":
— — Jahrbuch, Bd. 42, Heft 3; Bd. 43, Heft 1.
— Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
— — Jahrbuch, Bd. 28, Heft 4; Bd. 29, Heft 1—3.
— K. Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen, No. 270—279.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Abhandlungen, N. F., Heft 70—76.
— — Jahrbuch, Bd. 34, I, 1, 2.
— Beiträge zur geologischen Erforschung der deutschen Schutzgebiete, Heft 5—7.
— K. Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1916 und 1917.
— — Veröffentlichungen No. 42.
— K. Sternwarte:
— — Beobachtungsergebnisse No. 16.
— — Veröffentlichungen, Bd. 1, Heft 1.
Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
— — Gartenflora, Jahrg. 1914, No. 1—24.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte, Bd. 27, 1. Hälfte.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1914, No. 1—12.
— — Schriften, Heft 45, 48, 49.
— — Mitgliederverzeichnis No. 37.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift, 34. Jahrg., No. 1—12.
— Zentralstelle für Balneologie:
— — Veröffentlichungen, Bd. II, Heft 4—9.

Bern. Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
— — Actes de la 96. Session, tom. 1, 2.
— — Neue Denkschriften, Bd. 48, 49.

Bern. Allg. Geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz:
— — Quellen zur Schweizer Geschichte, N. F., Bd. 4, I, 2.
— — Jahrbuch, Bd. 39.
— Historischer Verein des Kantons Bern:
— — Archiv, Bd. 22, 1.
— Eidgenössische Militärbibliothek:
— — Mitteilungen 1913, No. 3, 4.

Besançon. Société d'Emulation du Doubs:
— — Mémoires, sér. VIII, vol. 7.

Beuron. Bibliothek der Erzabtei:
— — Spicilegium palimpsestorum, vol. 1, 1913.

Beyrouth. Université Saint Joseph:
— — Mélanges de la Faculté Orientale, tom. 6, 1913.

Béziers. Société archéol., scientif. et littéraire:
— — Bulletin, 3. sér., tom. 10, livr. 1.

Bielefeld. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Bericht über die Jahre 1911—1913.

Bistritz. Deutsches Gewerbelehrlingsinstitut:
— — Jahresbericht 39.

Bologna. R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna:
— — Atti e Memorie, ser. IV, vol. 3, fasc. 4—6.

Bonn. Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
— — Bonner Jahrbücher, Heft 121 = Register.
— — Bericht der Kommission für Denkmalpflege 1911/12.
— Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande:
— — Verhandlungen, 70. Jahrg., 1. Hälfte.
— — Sitzungsberichte 1913, 1. Hälfte.

Bordeaux. Académie Nationale:
— — Actes de l'année 71, 1909; 72, 1910; 73, 1911.
— Société de géographie commerciale:
— — Bulletin, 1913, No. 6—8, 10, 11; 1914, No. 1—4.
— Société Linnéenne:
— — Actes, vol. 67, 1913.

Boston. American Academy of Arts and Sciences:
— — Proceedings, vol. 49, No. 8—11.
— Museum of Fine Arts:
— — Bulletin, No. 67—69, 71, 72.

Bourg. Société d'émulation:
— — Annales 46, 1913, Jan.—Juni.

Bremen. Meteorologisches Observatorium:
— — Jahrbuch, 24. Jahrg., 1913.

Bremen. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen, Bd. 22, Heft 2; Bd. 23, Heft 1.
Breslau. Schlesische Gesellschaft für vaterländ. Kultur:
— — Jahresbericht 90. 1912. I. II; 91. 1913. I. II und Ergänzungsheft.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis, S.-S. 1914; W.-S. 1914/15.
— — Programm 1914/15.
— Sternwarte:
— — Franz, Randlandschaften des Mondes 1913.
Brisbane. Queensland Geological Survey:
— — Publications No. 241.
Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):
— — Jahresbericht 12.
— — Mitteilungen der Stadtbibliothek, Jahrg. 5, No. 4—12; Jahrg. 6, No. 1—3.
— Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 6, Heft 2—4.
— — Jahresbericht 1913.
Brünn. Mährisches Landesmuseum:
— — Časopis, Bd. 14, Heft 1.
— Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
— — Zeitschrift, 18. Jahrg., Heft 1—4.
— Naturforschender Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 51.
Brüssel. Académie Royale de médicine:
— — Mémoires couronnés, Collection in 8^0, tom. 21, fasc. 4.
— — Bulletin, IVe sér., tom. 27, No. 10, 11; tom. 28, No. 1—5.
— Académie Royale des sciences:
— — Annuaire 1914.
— — Bulletin: a) Classe des lettres, 1913, No. 9—12; 1914, No. 1—4: b) Classe des sciences, 1913, No. 9—12; 1914, No. 1—4.
— — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 8^0, IIe sér., tom. 3, fasc. 7, 8.
— — Programme des concours, Classe des sciences, 1916.
— — „ „ „ „ „ lettres, 1916.
— — Chartes du chapitre de Sainte-Waudru, tom. 4, 1913.
— — Cuvelier, Les dénombrements de foyers 1915.
— — Verriest, 1. Teil, 1913.
— Jardin botanique:
— — Bulletin, vol. 4, fasc. 1, 2.
— Ministère des Colonies:
— Annales du Musee du Congo Belge, Botanique, sér. IV, tome 2, fasc. 1.

Brüssel. Observatoire Royal siehe Uccle.
— Bibliothek des Polar-Instituts:
— — Protokoll der Sitzung 1913 in Rom.
— Société d'archéologie:
— — Annales 1913, No. 2—4.
— — Annuaire, tom. 25, 1914.
— Société des Bollandistes:
— — Analecta Bollandiana, tom. 33, fasc. 1—3.
— Société R. botanique de Belgique:
— — Bulletin, tom. 51, 52.
— Société chimique:
— — Bulletin, année 28, fasc. 1—7.
— Société entomologique de Belgique:
— — Annales, tom. 57, 1913.
— Bryn Mawr College:
— — 2 Dissertationen.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:
— — Mathemat. und naturwissenschaftl. Berichte aus Ungarn, Bd. 29.
— Statistisches Bureau:
— — Publikationen, No. 50.
— — Jahrbuch 11, 1909—1912.
— Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 24, Heft 6; Jahrg. 25, Heft 1—4.
— K. Ungarische Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, vol. 42, livr. 3—5.
— Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
— — Közgazdasági Szemle, Bd. 50, Heft 6; Bd. 51, Heft 1—6; Bd. 52, Heft 3, 4.
— Ungarisches Nationalmuseum:
— — Ertesitöje, XIV. Jahrg., 3, 4; XV. Jahrg., 1, 2.
— K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
— — Földtani Közlöny, Bd. 43, Heft 4—9.
— — Jahrbuch, Bd. 21, No. 7, 8.
— — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. 21, Heft 2, 3.
— — Sektionsblatt, Zone 10/11, Kol. 29; Zone 11/12, Kol. 30; Zone 24, Kol. 25.
— — Erläuterungen zur geolog. Karte, Zone 10/11, Kol. 29; Zone 11/12, Kol. 30; Zone 24, Kol. 25.
— K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
— — Aquila 20, 1913.

Buenos Aires. Museo nacional publico:
— — Anales, ser. III, tom. 24.

Buenos Aires. Instituto geografico militar.:
— — Anuario 1913.
— Oficina meteorologica Argentina:
— — Boletin 2, 3.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Mededeelingen, No. 18.
— — Mededeelingen van het agricultur-chemisch laboratorium, No. 6, 7.
— — Mededeelingen van de afdeeling voor planten ziekten, No. 7, 8.
— — Mededeelingen voor thee, No. 28.
— — Jaarboek 1912.
— — Bulletin du jardin botanique, II. sér., No. 13—15.

Bukarest. Academia Română:
— — Publiatiunile fondulin Vasile Adamachi, No. 6—16.
— Société des Sciences:
— — Bulletin, anul 22, No. 6; anul 23, No. 1, 2.

Burghausen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Zacher.

Caen. Société Linnéenne de Normandie:
— — Bulletin, sér. VI, vol. 5, 1912; vol. 6, 1913.
— — Mémoires, vol. 24, 2.

Cairo. Institut Égyptien:
— — Bulletin, sér. V, tom. 7, fasc. 2; tom. 8, fasc. 1.
— — Mémoires, tom. 7, fasc. 2, 3.

Calcutta. Indian Association for the Cultivation of Science:
— — Bulletin No. 7, 8.
— Board of Scientific Advice for India:
— — Annual Report 1912/13.
— Imp. Department of agriculture:
— — Report on the progress of agricultura in India 1912/13.
— Indian Museum:
— — Memoirs, vol. 4, part 1.
— — Records, vol. 8, No. 3, 4; vol. 9, No. 3—5; vol. 10, No. 1.
— — Annual Report 1912/13.
— — Echinodermata of the Indian Museum, part 8.
— — Centenary 1914.
— Sanscrit College:
— — Hrishikesa, vol. 1—26.
— Superintendent of Government:
— — Census of India 1911, 2 vols.
— Royal Asiatic Society of Bengal:
— Journal and Proceedings, 1912, vol. 8, No. 11; 1913, vol. 9, No. 1—6.

Calcutta. Geological Survey of India:
— — Memoirs, vol. 43, part 1.
— — Records, vol. 43, part 3, 4.
— — Palaeontologia Indica, N. S., vol. 5, No. 1.
Cambrai. Société d'émulation:
— — Mémoires, tom. 67, 1, 2.
Cambridge (Engl.). Antiquarian Society:
— — Proceedings, No. 62/63 = 16, 2, 3; No. 64 = 17, 1; No. 65 = 17, 2.
— Philosophical Society:
— — Proceedings, vol. 17, No. 4—6.
— — Transactions, vol. 22, No. 4.
Cambridge (Mass.). Peabody Museum of American Archaeology and Ethnology:
— — Memoirs, vol. 5, No. 3.
— Museum of comparative Zoology at Harvard College:
— — Annual Report of the curator 1912/13.
— — Bulletin, vol. 56, No. 2; vol. 58, No. 1—7.
— — Memoirs, vol. 40, No. 8; vol. 44, No. 2; vol. 46, No. 1.
— Tufts College (Mass.):
— — Studies, vol. 3, No. 3, 4.
— Astronomical Observatory of Harvard University:
— — Annals 63, 2.
— — Contents of Annals, 76, 1; 78, 1.
— — 68th Annual Report.
— — Report of the committee to visit No. 52.
— — Circulars No. 180—183.
— — Bulletin No. 520—548.
Capetown. South African Association of Science:
— — Journal, vol. 10, No. 4—11.
— — Circular No. 3.
— R. Society of South Africa:
— — Transactions, vol. 3, No. 3; vol. 4, No. 1.
Catania. Accademia Gioenia di scienze naturali:
— — Atti, ser. V, Anno 90 = V, 6.
— — Bollettino, fasc. 28—31.
— Società degli spettroscopisti:
— — Memorie, ser. II, vol. 3, disp. 1—10.
— Società di storia patria per la Sicilia Orientale:
— — Archivio storico, anno 11, No. 1, 2.
Chalons s. S. Société d'histoire et d'archéologie:
— — Mémoires, tom. 4, partie 2; tom. 5.
Charkow. Université Imperiale:
— — Sapiski 1913, No. 4; 1914, No. 1.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1913.
Chicago. Oberlin College Library (Ornitholog. Club):
— — The Wilson Bulletin, vol. 25, No. 4; vol. 26, No. 1—3.
— John Crerar Library:
— — 19th Report for the year 1913.
— Field Museum of Natural History:
— — Publications, No. 169—176.
— University Library:
— — The astrophysical Journal, vol. 38, No. 5; vol. 39, No. 1—5; vol. 40, No. 1.
Christiania. Physiographiske forening:
— — Nyt magazin for naturvidenskaberne. Bd. 49, No. 1—4; Bd. 50, No. 1—4.
— Videnskabs Selskabet:
— — Forhandlinger, Aar 1913.
— — Skrifter 1913, I, 1, 2; II.
Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — 43. Jahresbericht, 1913.
Cincinnati. Lloyd Library:
— — Bibliographical contributions, N. S., No. 13, 14.
— University:
— — University Studies, vol. 8, No. 3, 4; vol. 9.
— — Record, vol. 10, No. 1.
Claremont. Pomona College:
— — Journal of entomology, vol. 5, No. 4; vol. 6, No. 1, 2.
Clermont. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts:
— — Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne, sér. II, 1913.
— Société des amis de l'Université:
— — Revue de l'Auvergne, année 30, 1913.
Cleveland. Archaeological Institute of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 17, No. 3, 4; vol. 18, No. 1—3.
Colombo. Department of agriculture:
— — Bulletin No. 7—11.
— Museum:
— — Spolia Zeylonica, vol. VIII, part 35.
Columbia. Laws Observatory:
— — Bulletin No. 21.
Como. Società storica:
— — Periodico, No. 81—83.
Cordoba. Academiá Nacional de ciencias:
— — Boletin, tom. 19, No. 1.

Czernowitz. K. K. Franz Josephs-Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1913/14; S.-S. 1914.
— — Personalstand 1913/14.
— — Inauguration des Rektors 1913/14.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, Jahrg. 13, No. 1—4.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Schriften, Bd. XIII, Heft 3, 4.
— — Katalog der Bibliothek, Heft 3, 1913.
— Technische Hochschule:
— — Schriften des Jahres 1913/14.
— — Personalverzeichnis, S.-S. 1914, W.-S. 1914/15.
— — Programm 1914/15.
— Westpreußischer Botanisch-zoologischer Verein:
— — Bericht 35. 36.

Darmstadt. Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
— — Archiv für hessische Geschichte, N. F., Bd. 9, No. 1—3.
— — Quartalblätter, Bd. 5, No. 10—12.

Davenport. Academy of natural sciences:
— — Proceedings, vol. 13, No. 1—46.

Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1913, No. 12; 1914, No. 1—11.

Delft. Technische Hoogeschool:
— — 7 Dissertationen, 1913/14.

Denver (Colorado). Colorado Scientific Society;
— — Proceedings, vol. X, pag. 415—452.

Dijon. Société Bourguignonne de géographie et d'histoire:
— — Mémoires, tom. 28, 1913.

Douai. Union géographique du Nord de la France:
— — Bulletin, année 35, trim. 1, 2.

Dresden. K. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 35, 1914.
— K. Sächsische Landes-Wetterwarte:
— — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1911. 2. Hälfte; 1912, 1. Hälfte.
— — Dekaden-Monatsberichte 1912, Jahrg. 15.
— Redaktion des Journals für praktische Chemie:
— — Journal 1914, No. 1—24.
— Verein für Erdkunde:
— — Mitteilungen, Bd. II, Heft 8, 9.
— — Mitgliederverzeichnis 1914.

Dresden. Verein für die Geschichte Dresdens:
— — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 22, 1—4,

Dublin. Royal Irish Academy:
— — Proceedings, vol. 31, No. 9. 13. 47, 64; vol. 32, sect. B, No. 3; sect. C, No. 6—9, 11.
— Royal Dublin Society:
— — The Economic Proceedings, vol. 2, No. 7.
— — The Scientific Proceedings, vol. 14, No. 8—16.

Dünkirchen. Société Dunkerquoise:
— — Mémoires, tom. 55, 1912; tom. 56, 1913.

Dürkheim. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.

Edinburgh. R. Botanic Garden:
— — Notes, No. 35.
— Botanical Society:
— — Transactions and Proceedings, vol. 26, No. 2.
— Royal Society:
— — Proceedings, vol. 33, part 4; vol. 34, part 1, 2.
— Royal Physical Society:
— — Proceedings, vol. 19, No. 5.

Eichstätt. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Dhom.

Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1913/14.

Eisenberg. Geschichts- und altertumsforschender Verein:
— — Mitteilungen, Heft 30.

Emden. Naturforschende Gesellschaft:
— — 98. Jahresbericht.
— Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Jahrbuch, Bd. 18, 2.
— — Upstalsboom-Blätter, Jahrg. 3, No. 1—6.

Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:
— — Jahrbücher, N. F., Heft 39 und Sonderheft.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde von Erfurt:
— — Mitteilungen, Heft 35.

Erlangen. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Wüst.

Evreux. Société libre d'agriculture, sciences et arts:
— — Recueil des travaux, sér. VI, tom. 10, 1912.

Ferrara. Accademia di scienze mediche:
— — Atti, Anno 88, fasc. 1, 2.
Florenz. Reale Accademia dei Georgofili:
— — Atti, ser. V, vol. 11, disp. 2.
— Biblioteca Nazionale Centrale:
— — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane, No. 157—163, 165—168.
Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 31, 4; Bd. 34, 4; Bd. 35, 1.
— — 44. Bericht, Heft 1—4.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1913/14.
— Römisch-germanische Kommission des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts:
— — Kataloge west- und süddeutscher Sammlungen, Bd. 2 und 3.
Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land":
— — „Schau ins Land", 41. Jahrlauf, 1. Hälfte.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Berichte, Bd. 20, Heft 2.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Diözesanarchiv, Bd. 41, 42.
Freiburg i. S. Universitätsbibliothek:
— — Collectanea Friburgensia, N. S., fasc. 15.
Freising. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1913/14.
Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften, Heft 42, 1913.
Fürth. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.

Geneva. U. St. Agricultural Experimental Station:
— — Bulletin, No. 367—370, 372—379.
Genf. Conservatoire et jardin botanique:
— — Annuaire 17 = 1913.
— Redaktion des „Journal de chimie physique":
— — Journal, tom. XI, No. 5; tom. XII, No. 1—3.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin, tom. 3, livr. 8.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 37, fasc. 4; vol. 38, fasc. 1—3.
— — Compte rendu des séances 30, 1913.
— Universität:
— — Thèses 1912/13.

Gent. Vlaamsche Academie van tal- en letterkunde:
— — Verslagen 1913, No. 12; 1914, No. 1—5.
— Het Vlaamsch Natuur- en geneeskindig Congres:
— — Handelingen van het 17. Congres 1913.
Giessen. Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen, N. F., Bd. 21.
Glasgow. Geological Society:
— — Transactions, vol. 15, part 1.
Göttingen. K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1913, No. 10—12; 1914, No. 1—10.
— — Abhandlungen, N. F., a) Philol.-hist. Klasse, Bd. 15, No. 2—4: b) Math.-phys. Klasse, Bd. 10, No. 1.
— — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse 1913, Heft 2, 3 und Beiheft: 1914, Heft 1; b) Math.-phys. Klasse 1913, Heft 4; 1914, Heft 1—3: c) Geschäftliche Mitteilungen 1914, Heft 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Vorlesungsverzeichnis, S.-S. 1914.
— — Verzeichnis der Studierenden, S.-S. 1914, W.-S. 1914/15.
— — Chronik 1913.
Granville (Ohio). Scientific Association of Denison University:
— — Bulletin, vol. 17, articles 8—10.
Graz. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1914, W.-S. 1914/15.
— — Bericht über die Studienjahre 1911—13.
— Historischer Verein für Steiermark:
— — Beiträge zur Erforschung der steirischen Geschichte, Bd. 37, Jahrg. 40.
— — Zeitschrift, Jahrg. 11, Heft 3, 4; Jahrg. 12, Heft 1/2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
— — Mitteilungen, Bd. 50, Heft 1, 2.
Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher, Bd. 15, 1914.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Mitteilungen, Bd. 44, 1912.
Grenoble. Société de statistique des sciences naturelles et des arts industriels:
— — Bulletin, sér. IV, tom. 12.
— Université:
— — Annales, tom. 25, trim. 3; tom. 26, trim. 1.
Grimma. Fürsten- und Landesschule:
— — Jahresbericht 1913/14, 4°.
Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 12, Heft 5—8.

Guéret. Société des sciences naturelles et archéologique:
— — Mémoires, tom. 18, part 2.

Gunzenhausen. K. Realschule:
— — Jahresbericht 21, 1913/14.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für das Jahr 1914.
— — K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, VII. Reeks, deel 69, afl. 2—4; deel 70, afl. 1.
— — Naamlijst der leden, 1914.

Haarlem. Hollandsche Maatschappy der Wetenschappen:
— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III A, tom. 3, livr. 3, 4; sér. III B, tom. 2, livr. 1.

Habana. Sociedad economica de Amigos del Pais:
— — Revista bimestre Cubana, vol. 8, No. 6; vol. 9, No. 1—3.

Hall. K. K. Franz Joseph-Gymnasium:
— — Programm 1913/14.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Nova Acta, Bd. 98, 99.
— — Leopoldina, Heft 50, No. 1—12.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Bd. 68, Heft 1—3.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Abhandlungen, N. F., No. 2—4.
— — Mitteilungen, N. F., No. 3, 1913.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1913/14.

Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrg. 30, 1912, Beiheft 1—6, 7 (1, 2), 8—11.
— — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden 1912, 4^0.
— — Staatshaushaltsberechnung 1912, 4^0.
— — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1914, 4^0.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1913, 4^0.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. V, Heft 3.
— Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Mitteilungen 1914, No. 1—15.
— Deutsche Seewarte:
— — Aus dem Archiv, Bd. 36, No. 3.

Hamburg. Deutsche Seewarte:
— — 36. Jahresbericht für das Jahr 1913, 4°.
— — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 42, No. 1—12.
— — Dekadenberichte 1913, No. 30, 32—36; 1914, No. 2—9, 12, 13, 15—19.
— — Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen, Heft 22.
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, Jahrg. 35.
— — 3. Nachtrag zum Katalog 1913.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen, 33. Jahrg., 1913.
— — Zeitschrift, Bd. XVIII, Heft 2; Bd. XIX, Heft 1.

Hanau. Geschichtsverein:
— — Hanauer Geschichtsblätter 1911, No. 2.

Hannover. Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoverische Geschichtsblätter, 17. Jahrg., Heft 1 und 3.
— Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift, Jahrg. 1913, Heft 1—4.

Hanoi. École Française d'Extrême Orient:
— — Bulletin, tom. 13, No. 3—7; tom. 14, No. 1.
— — Cordier, Biblioteca Indosinica, vol. 2, 1913; vol. 3, 1914.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der math.-naturw. Klasse, 1912, No. 3.
— — Sitzungsberichte, a) philol.-histor. Klasse, 1913, No. 13, 14; 1914, No. 1—13; b) mathem.-naturw. Klasse, 1913, A 22—24; 1914, A 1—14, B 1—5.
— Reichs-Limes-Kommission:
— — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 38 u. 39.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 7, No. 1—3.
— Historisch-philosophischer Verein:
— — Neue Heidelberger Jahrbücher, Jahrg. 17, Heft 2; Jahrg. 18, Heft 1 und 2.
— Naturhistorisch-medizinischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 12, Heft 4; Bd. 13, Heft 1.

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 16, Abt. Kiel.

Helsingfors. Finnische Akademie der Wissenschaften:
— — Annales, ser. A, vol. 4; ser. B, vol. 12, No. 1, vol. 13, No. 1—4.
— — Sitzungsberichte 1911.
— Finnische Altertumsgesellschaft:
— — Suomen Museo XX, 1913.
— — Tidskrift 27, 1913.

Helsingfors. Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Acta, tom. 43, No. 3; tom. 44, No. 2, 4, 6; tom. 45, No. 1.
— — Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, Heft 76, 2—5.
— — Finnländische hydrologisch-biologische Untersuchungen, No. 12.
— — Öfversigt af förhandlingar, Bd. 55, A 1, 2; B, C.
— Institut météorologique central:
— — Meteorologisches Jahrbuch für Finnland, Bd. 11, 1912, 2.
— Svenska litteratursällskapet i Finland:
— — Suomi 8—10.
— — Skrifter 113—116.
— Sällskapet för Finlands geografi:
— — Fennia, Bd. 33, 1912/13; Bd. 34, 1913/14.
— Societas pro fauna et flora Fennica:
— — Acta 37, 38.
— — Meddelanden 39, 1912/13.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1913/14 in 4^0 und 8^0.

Hendaye. Observatoire d'Abbadia:
— — Observations, tom. 12, 1913.
— — Procès-verbaux de l'Académie des Sciences, tom. 3, 1913; tom. 4 (1908—11); tables pour le calcul . . . 1913.

Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:
— — Archiv, N. F., Bd. 39, 1912, Heft 2.
— Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften:
— — Verhandlungen und Mitteilungen, Bd. 63, 1913, Heft 1—6.

Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:
— — Schriften, Heft 69—71.

Hobart Town. R. Society of Tasmania:
— — Papers and proceedings 1912 und 1913.

Hohenleuben. Voigtländ. altertumsforschender Verein:
— — Jahresbericht 81—83.

Homburg i. Pf. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.

Igló. Ungarischer Karpathen-Verein:
— — Jahrbuch, 41. Jahrg., 1914.

Indianopolis. Academy of sciences:
— — Proceedings 1912.

Ingolstadt. Historischer Verein:
— — Sammelblatt, Heft 34, 1910—13.

Innsbruck. Ferdinandeum:
— — Zeitschrift, Bd. 57, 1913; Bd. 58, 1914.

Innsbruck. Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Berichte, Bd. 34.
Irkutsk. Geographische Gesellschaft:
— — Izvěstija, tom. 43, 1914.
Ithaca. Journal of Physical Chemistry:
— — The Journal, vol. 18, No. 1—6, gr. 8^0.

Jassy. Societatea de stinti:
— — Annales scientifiques, tom. 8, fasc. 1, 2.
— Société des médecins et naturalistes:
— — Bulletin, année 27, 5—8.
Jefferson. Missouri Bureau of geology and mines:
— — Bulletin, vol. XII.
— — Biennial Report, 47. Versammlung.
Jekaterinburg. Oural.-Société d'amateurs des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 33, 34, 1, 2.
— — Wöchentliches Bulletin der seismischen Station, Jahrg. 1, 2.
Jena. Geographische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 31, 1913.
— Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 51, Heft 1—4; Bd. 52, Heft 1—4.
— Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
— — Wochenschrift 1914, No. 3—22, 25—46, 49—52.
Johannesburg. Union Observatory:
— — Circular of Transvaal Observatory, No. 10—16.
— Geological Society of South Africa:
— — Transactions, vol. 16, No. 1 and proceedings, vol. 16.
Jowa City. Laboratorium für Psychologie:
— — Psychological monographs XVI, 3.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Schriften 1913/14.
— Badische Historische Kommission:
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 29, Heft 1—4, Heidelberg.
— — Schwäbische Stadtrechte, Heft 3.
— Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
— — Jahresbericht für das Jahr 1913.
Kasan. Physikalisch-mathematische Gesellschaft:
— — Bulletin, IIe sér., tom. 19, No. 3, 4.

Kasan. Universität:
— — Učenija Zapiski, Bd. 81, Heft 1—7.
— — Schriften des Jahres 1913 (7 Stück).
Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:
— — Zeitschrift, Bd. 47, 1913.
— — Mitteilungen 1912/13.
Kaufbeuren. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.
— Verein „Heimat":
— — Deutsche Gaue, Heft 281—300, Sonderheft 94.
Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913 und Programm von Bitterauf.
Kew bei London. R. Botanical Garden:
— — Bulletin 1914, 1—3, 5.
— — Appendix 1914, 2 und 4.
Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:
— — Zeitschrift, Bd. 44, 1914.
— — Quellen und Forschungen, Bd. 1, 2.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
— — Schriften, Bd. 16, Heft 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1913/14 (3 Pakete).
— — Iswestia, tom. 53, No. 11, 12; tom. 54, No. 1—4.
Kiew. Polytechnisches Institut Kaiser Alexander II.:
— — Chemisch-agronomische Abteilung, année 13, livr. 2, 3.
— — Ingenieur-mechanische Abteilung, année 13, livr. 3, 4.
Kischineff. Naturforschende Gesellschaft:
— — Trudy, tom. IV, 1912/13.
Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia II, 103, No. 4—6; 104, No. 1—6.
Klausenburg. Siebenbürgische Museums-Gesellschaft:
— — Erdélyi Múzeum, Bd. 28, Heft 6; Bd. 30, Heft 1—6; Bd. 31, Heft 1.
Köln. Historisches Archiv der Stadt Köln:
— — Mitteilungen aus dem Stadtarchiv, Heft 35.
— Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
— — 33. Jahresbericht, 1913.
Königsberg i. Pr. Universitäts-Sternwarte:
— — Astronomische Beobachtungen, Bd. 43, III.
Konstantinopel. Institut d'histoire Ottomane:
— — Revue historique 1910, No. 24, 25, 27.
Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Översigt 1913, No. 6; 1914, No. 1—4.

Kopenhagen. K. Akademie der Wissenschaften:
— — Mémoires, Section des sciences, sér. 7, tom. 11, No. 2—5; tom. 12, No. 1. Section des lettres, sér. 7, tom. 2, No. 3.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder, No. 73—75.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux, vol. 10, No. 4; vol. 11, No. 1, 2.
— Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
— — Bulletin statistique des pêches maritimes, vol. 7.
— — Bulletin trimestriel des résultats, p. 3, 1913.
— — Publications de circonstance, No. 66.
— — Rapports et procès verbaux des réunions, vol. 18 und 20.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, III. Raekke, Bd. 3.
— — Mémoires, N. S., 1913.
— Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Middelser, Serie Fiskeri, Bd. IV, 5—7.
— — „ „ Fiskeri-Statistik, Bd. 2.
— Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser frä, No. 16—19.
— Dänische biologische Station:
— — Report No. 21.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:
— — Archivum komisy Prawniczej, tom. 9, 1913; tom. 11, 1909—13.
— — Archivum do dziezów literaturij, tom. 13, 14.
— — Monumenta Poloniae Vaticana, tom. 1, 2.
— — Materialy antropol., tom. 13.
— — „ i prace komis. . . ., tom. 6.
— — Rocznik 1912/13.
— — Sprawozdania komisyi fizyograficzny, tom. 47.
— — Sprawozdania komisyi do badania historyi, tom. 9, fasc. 1/2.
— — Rozprawy (philolog.-philosoph. Kl.), sér. II, tom. 31; sér. III, tom. 1, No. 6, 7.
— — Rozprawy (mathem. Kl.), sér. 3, tom. 13, A und B.
— — Biblioteka pisazow polskich, No. 59, 61, 62, 65, 66.
— — Wydawnictwo komisyi de badania historyi, tom. 2 (Bujak).
— — 6 Einzelwerke.
— Historische Gesellschaft:
— — Biblioteka, No. 46—48.
— Numismatische Gesellschaft:
— — Wiadomosci 1914, No. 1—7.

Krakau. Universität:
— — Kronika 1911/12. 1912/13.
Kyoto. Imperial University:
— — Memoirs of the College of Science and engineering, vol. 5, No. 9; vol. 6, No. 1—3.

Laibach. Musealverein für Krain:
— — Carniola, Bd. 5, No. 1—4.
Landau (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 und Programm von Müller.
Landsberg a. L. K. Realschule:
— — 36. Jahresbericht 1913/14.
Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen, Bd. 50.
Langres. Société historique et archéologique:
— — Bulletin No. 89—91.
— — Mémoires, tom. 4, No. 3.
Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin No. 181—183.
Laval. Commission historique et archéologique:
— — Bulletin, 2e sér., tom. 28, No. 98—100.
Lawrence. University of Kansas:
— — Science Bulletin, vol. 6, No. 2—7; vol. 7, No. 1—17; vol. 8, No. 1 bis 10.
— — Bulletin No. 1.
Le Havre. Société Havraise d'études diverses:
— — Recueil des publications, 79e année, 1912, trim. 1—4.
Leiden. s'Rijks Herbarium:
— — Mededeelingen, No. 15—20 (mit Atlas).
— Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Handelingen en Mededeelingen 1912/13.
— — Levensberichten 1912/13.
— Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jahrg. 21, No. 5—12; Jahrg. 22, No. 1—4.
— Redaktion der „Mnemosyne“:
— — Mnemosyne, Bd. 42, No. 2—4.
— Physikalisches Laboratorium der Universität:
— — Commentationes, No. 139.
— — Supplement, No. 33—35.
— Sternwarte:
— — Verslag 1910/12.

Leipzig. Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter 1913, Bd. 37, No. 24; 1914, Bd. 38, No. 1—23.
— Deutsche Bücherei:
— — 1. Bericht 1913.
— K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 30, No. 2, 3, gr. 8°.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 33, No. 1, 2.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 65, No. 3, 4.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 65, No. 4—5; Bd. 66, No. 1.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften, Bd. 44.

Le Mans. Académie de géographie botanique:
— — Bulletin, tom. 21, No. 290—297.

Lemberg. Sevčenko-Gesellschaft:
— — Mitteilungen 116—118, 121.
— — Sammelschriften der math.-naturw.-med. Sektion, tom. 15, 2.
— — Sammlung, ethnographische, tom. 35, 36.
— — Archiw ukrainsko-russkie, tom. 9, 10.
— — Chronik 53, 55.
— — Matériaux d'ethnologie ukraino-ruthène, tom. 14.
— Towarzystwo dla popierania nauki polskiej:
— — Bulletin 13.
— Verein für Volkskunde:
— — Lud, tom. 18, No. 1—4.

Lille. Société géologique du Nord:
— — Annales, vol. 41, 1912.

Lima. Cuerpo de ingenieros de minas del Peru:
— — Boletin No. 80.

Lincoln. University of Nebraska library:
— — Bulletin of agr. Experim. Station, No. 139—142.
— — Press Bulletin, No. 44.
— — University studies, vol. 12, No. 4; 1913, No. 1—4; 1914, No. 1.
— — Research Bulletin, No. 4.
— — Extension Bulletin, No. 23.

Lindenberg. K. Preuß. Aëronautisches Observatorium:
— — Ergebnisse der Arbeiten, Bd. 9, 4°.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — 72. Jahresbericht, 1914.
— Commissão do serviço geologico:
— — Communicações, tom. 9.

Lissabon. Sociedade de geographia:
— — Boletim, vol. 31, No. 10—12; vol. 32, No. 1—8.
— Société Portugaise des sciences naturelles:
— — Archivos, vol. 4, fasc. 2.
— — Bulletin, vol. 5, No. 3; vol. 6, No. 1, 2.
— — Memorias, vol. 1, fasc. 2.

Liverpool. School of Tropical Medecine:
— — Bulletin of Yellow Fever Bureau, vol. 3, No. 2.

Loewen. Université Catholique:
— — Annuaire 1914.
— — Bibliographie, 6. Suppl., 1911—13.
— — 10 Einzelpublikationen.
— Redaction von „La Cellule“:
— — Cellule, tom. 28, fasc. 2; tom. 29, fasc. 1.
— Société scientifique de Bruxelles:
— — Annales 38, fasc. 1, 2.

Lohr. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Schnetz.

London. British Academy:
— — Proceedings and transactions, 1912/13.
— British Astronomical Association:
— — Journal XXIV, No. 3—9.
— — Memoirs, vol. 19, part 4.
— Redaktion der Zeitschrift Illuminating Engineer:
— — Illuminating Engineer 1914 (= vol. 7), No. 1—7.
— Redaktion der Zeitschrift „Nature“:
— — Nature, No. 2305—2335.
— India Office:
— — District Gazetteers, 54 Bde.
— — Census tables, No. 5.
— Meteorological Office:
— — Geophysical Memoirs, No. 5—8.
— Royal Society:
— — Proceedings, ser. A, 613—621; ser. B, 595—599.
— — Philosophical Transactions, ser. A, No. 213; ser. B, No. 204.
— — Year-Book 1914.
— R. Society of Arts:
— — Journal, No. 3190—3219.
— R. Astronomical Society:
— — Monthly Notices, vol. 74, No. 1—8.
— — Memoirs, vol. 60, part 4, 4^0.
— — Separatabdrücke, No. 213—215, 217—225, 228.

London. Chemical Society:
— — Journal, No. 615—620.
— — Proceedings, No. 423—431; Index zu 409—422.
— Faraday Society:
— — Transactions, vol. 9, part 3.
— Geological Society:
— — Quarterly Journal, No. 276—278.
— — Geological literature for the year 1912.
— — List of members 1914.
— Society of Chemical Industry:
— — Journal, vol. 33, No. 1–13.
— — List of members 1914.
— Linnean Society:
— — Transactions. a) Botany, vol. 8, part 3–6; b) Zoology, vol. 16, part 2–4.
— — Journal, a) Botany, No. 284—286; b) Zoology, No. 217.
— Mathematical Society:
— — Proceedings, vol. 13, No. 2—5.
— Royal Microscopical Society:
— — Journal 1914, part 1—3.
— Zoological Society:
— — Proceedings 1914, part 1, 2.
— — Transactions, vol. 20, part 5—10.
— — Reports 1913.

Ludwigshafen a. Rh. K. Oberrealschule:
— — Jahresbericht 1913/14.

Lüneburg. Museumsverein:
— — Museumsblätter, Bd. 9.

Lüttich. Société géologique de Belgique:
— — Annales, tom. 39, No. 5; tom. 40, No. 3 mit Annexe 3; tom. 41, No. 1.
— Société de littérature wallone:
— — Annuaire, No. 27, 1914.
— — Bulletin du dictionnaire général, 8e année, 1913, No. 3, 4; 9e anée, 1914, No. 1.
— — Karlin, Wegweiser zur Textilausstellung 1913.
— Kulturhist. förening och Museum:
— — Redogrelse för 1913/14.

Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser“:
— — Notiser, 1914, No. 1—6.
— Universität:
— — Acta Universitatis Lundensis, N. Ser., aft. I, 9, 1913; aft. II, 9, 1913.
— — Bibelforskaren 1913, 1—6.

Lund. Universität:
— — Arskrift, Kyrkohistorisk 14, 1913.
Luxemburg. Société des naturalistes Luxembourgeois:
— — Bulletins, N. F., Jahrg. 7, 1913.
Lyon. Académie des sciences, belles lettres et arts:
— — Mémoires, sér. III, tom. 14.
— Comité du Bulletin historique:
— — Bulletin historique, année 12, No. 84, 85.
— Société d'agriculture, des sciences et industrie:
— — Annales 1912.
— Société Linnéenne:
— — Annales, année 60, 1913.
— Société litteraire, historique et archéologique:
— — Bulletin trimestr., 1912, Juli bis Dezember.
— Université:
— — Annales, I. Sciences, Médecine, fasc. 34—36.
— — „ II. Droit, lettres, fasc. 26—28.

Macon. Académie:
— — Annales, tom. 15, partie 2; tom. 16, 1911.
Madras. Kodaikanal and Madras Observatories:
— — Annual Report for 1913.
— — Bulletin, No. 34—37, 4^0.
Madrid. R. Academia de ciencias exactas:
— — Revista, vol. 12, No. 1—7.
— — Anuario 1914.
— R. Academia de la historia:
— — Boletín, tom. 63, No. 6; tom. 64, No. 1—6; tom. 65, No. 1—6.
— Instituto geográfico y estadistico:
— — Memorias, tom. XIV, 3.
— Sociedad española de fisica y quimica:
— — Annales, No. 109—114.
Mailand. Società Italiana di scienze naturali:
— — Atti, vol. 52, fasc. 2—4; vol. 53, fasc. 1, 2.
— Società Lombarda di scienze mediche e biologiche:
— — Atti, vol. III, fasc. 1—4.
— Società Storica Lombarda:
— — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 40, fasc. 40; anno 41, fasc. 1—3.
Mainz. Altertumsverein:
— — Mainzer Zeitschrift, Jahrg. 8, 9, 1913/14.
Manchester. Literary and philosophical Society:
— — Memoirs and Proceedings, vol. 57, part 3; vol. 58, part 1.

Manchester. Victoria University-Library:
— — Publications, Celtic series, No. 3.
Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 15. Jahrg., 1914, No. 1—12.
Mantua. R. Accademia Virgiliana:
— — Atti memorie, N. Ser., vol. 6, parte 1, 2; vol. 7, parte 1.
Marbach. Schwäbischer Schillerverein:
— — Rechenschaftsbericht 18, 1913/14.
Marburg. Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:
— — Sitzungsberichte 1913.
Maredsous. Abbaye:
— — Revue Bénédictine, année 31, No. 1—3.
Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:
— — Jahresbericht 1913/14.
Marseille. Museum d'histoire naturelle:
— — Annales, tom. 4—12 (1890—1908); tom. 14 (1912).
Meiningen. Hennebergischer altertumsforschender Verein:
— — Neue Beiträge etc., Lief. 26, 1913.
Meissen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis:
— — Zusammenstellung der Wetterwarte, 1913.
— Fürsten- und Landesschule St. Afra:
— — Jahresbericht für das Jahr 1913/14, 4^0.
Melbourne. Royal Society of Victoria:
— — Proceedings, N. Ser., vol. 26, fasc. 2.
Metten. K. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Schönberger.
Metz. Académie des sciences:
— — Mémoires, année 90—93, 1908/1912.
— Gesellschaft für lothringische Geschichte und Altertumskunde:
— — Jahrbuch, 24. und 25. Jahrg.
Mexiko. Comite Nacional Mexicano:
— — Boletín, tom. 2, No. 4.
— Instituto geológico:
— — Parergones, tom. 4, No. 2—10.
— Escuela Nacional Preparatoria:
— — Boletín, tom. IV, No. 4, 5.
— Museo Nacional:
— — Anales, tom. V, Sept.—Dez.
— — Neujahrskarte 1914.
— Observatorio astronomico Nacional:
— — Boletín, No. 4.

Mexiko. Observatorio meteorológico-magnético central:
— — Boletín mensual 1912, Mai—Dezember; 1913, März und Juni.
— Sociedad cientifica „Antonio Alzate“:
— — Memorias y revista, tom. 32, No. 9, 10; tom. 33, No. 9, 10.

Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Archief 1913.

Milwaukee. Public Museum:
— — Bulletin of Wisconsin Natural History Society, vol. 11, No. 1—4; vol. 12, No. 1, 2.

Minneapolis. Minnesota Academy of Sciences:
— — Bulletin, vol. 5, No. 1.
— University of Minnesota Library:
— — Studies in the physical sciences and mathematics, No. 2.
— — Current Problems, No. 1.
— — Studies in public health, No. 1.

Modena. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Memorie, ser. III, vol. 10, parte 2; vol. 11.
— Società dei Naturalisti e matematici:
— — Atti, IV. ser., vol. 15, 1913 = 46.

Monaco. Musée et Institut océanographique:
— — Bulletin, No. 274, 276—296; Register zu No. 253—278.
— — Resultats des camp. scient. . . ., No. 39, 40, 45.

Montbéliard. Société d'émulation:
— — Mémoires, vol. 37—39, 1909/10; vol. 42, 1913.

Montpellier. Académie de sciences et lettres:
— — Bulletin mensuel 1914, No. 1—7.
— — Mémoires, sect. des sciences, sér. 2, tom. 4, No. 4.
— — „ sect. des lettres, tom. 5, No. 3.
— Société de géographie:
— — Bulletin, tom. 36, trim. 1—4; tom. 37, trim. 1.

Montreal. Numismatic and Antiquarian Society:
— — The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal, ser. III, vol. 11, No. 1, 2.

Moskau. Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Čtenija 248, 249.
— Société Impériale des Naturalistes:
— — Bulletin, année 1913, No. 1—3.
— Universitätsbibliothek:
— — Učenyja Zapiski, mediz. Abteilung, Bd. 20, 21.
— — „ , naturwiss. Abteilung, Bd. 33, 34.
— — „ , historisch-philolog. Abteilung, Bd. 43, 1914.

Mount Hamilton (California). Lick Observatory:
— — Bulletin, Vol. VII, No. 250—259.
— — Publications, Vol. 7, 1913.

Mülhausen i. E. Historisches Museum:
— — Bulletin 37, année 1913.

München. Statistisches Amt:
— — Berufliche Gliederung, 2. Teil. — Säuglingsernährung.
— K. Hydrotechnisches Bureau:
— — Jahrbuch 1912, Heft 3, 4; 1913, Heft 1.
— — Niederwasserspenden.
— K. Ludwigs-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Braun.
— — K. Luitpold-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Schmitzberger.
— K. Maximilians-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.
— K. Theresien-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Steinberger.
— K. Wilhelms-Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.
— K. Wittelsbacher Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Kiringer.
— K. Realgymnasium:
— — 50. Jahresbericht, 1913/14 mit Festschrift.
— K. Technische Hochschule:
— — Bericht über das Studienjahr 1912/13.
— — Personalstand im W.-S. 1913/14.
— — Schriften 1913.
— Metropolitan-Kapitel München-Freising:
— — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1914.
— — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising 1914 mit Register.
— K. Oberbergamt:
— — Geognostische Jahreshefte, 26. Jahrg., 1913.
— K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
— — 7. Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Rautner.
— K. Maria Theresia Kreisrealschule:
— — 15. Jahresbericht, 1913/14.
— K. Universität:
— — Personalstand, S.-S. 1914; W.-S. 1914/15.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1914; W.-S. 1914/15.

München. Ärztlicher Verein:
— — Sitzungsberichte, Bd. 23, 1913.
— Historischer Verein von Oberbayern in München:
— — Oberbayerisches Archiv, Bd. 59.
— — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 12, Heft 3/4, 5/6.
— K. Meteorologische Zentralstation:
— — Jahrbuch 1913.
— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern 1913, 12; 1914, 1—10.

Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:
— — Jahresbericht 41, 1912/13.
— Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 71, 1.

Nancy. Académie de Stanislas:
— — Mémoires, année 163, VI. sér., tom. 10.
— Société d'archéologique Lorraine et du Musée Historique Lorrain:
— — Bulletin 1913, No. 12; 1914, No. 1—6.
— — Mémoires, tom. 63, 1913.
— Société des sciences:
— — Bulletin, tom. 14, fasc. 1—3.

Nantes. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France:
— — Bulletin, tom. 3, trim. 1, 2.

Narbonne. Commission archéologique:
— — Bulletin 1914, sem. 1.

Neapel. Biblioteca ed ufficio di statistica:
— — Bulletino di Comune Anno 38, No. 1—6.
— Società Reale di Napoli:
— — Atti, ser. II, vol. 15, 1914.
— — Rendiconto, vol. 19, fasc. 6—12; vol. 20, fasc. 1—6.
— Accademia di archeologia, lettere etc.:
— — Atti, No. 5, vol. 2 = Memorie, vol. II, 1913.
— — Rendiconto, anno 25—27.

Neuburg a. D. Historischer Verein:
— — Neuburger Kollektaneen-Blatt, Jahrg. 75/76.

Neuchâtel. Société Neuchâteloise de géographie:
— — Bulletin, tom. 17—19, 1906—1908; tom. 23, 1914.
— Société des sciences naturelles:
— — Bulletin, tom. 40, 1912/13.
— Bibliothèque de l'Université:
— — 4 Dissertationen, 1911/12.

New Castle (upon-Tyne). Institute of mining and mechanical engineers:
— — Transactions, vol. 58, part 9; vol. 60, part 10; vol. 61, part 9; vol. 63, part 8; vol. 64, part 2—5.
New Haven. American Oriental Society:
— — Journal, vol. 33, part 4; vol. 34, part 1, 2.
— Connecticut Academy of arts and sciences:
— — Transactions, vol. 18, No. 208—289; 291—345.
— Yale University Library:
— — Yale Review, N. S., vol. 3, No. 3, 4; vol. 4, No. 1, 2.
— — American Journal of Science, No. 218—228.
New York. Academy of Sciences:
— — Annals, vol. 23, part 1—143.
— American Museum of Natural History:
— — Annual Report 45, 1913.
— — Anthropological Papers, vol. 12, part 4—6; vol. 13, part 1.
— — Journal, vol. 14, No. 1—8.
— — Bulletin, vol. 32.
— — Memoirs, N. S., vol. 1, part 5.
— Botanical garden Library:
— — Bulletin, vol. 8, No. 30.
— American Geographical Society:
— — Bulletin, vol. 46, No. 1—12 und Index 1913.
— Rockefeller Institute for medical research:
— — Studies, vol. 18 und 19.
— Theol. Seminary of America:
— — Texts and Studies, vol. 4.
— Geological Society of America:
— — Bulletin, vol. 24, No. 4; vol. 25, No. 1.
— American Mathematical Society:
— — Bulletin, No. 224—230.
— — Transactions, vol. 15, No. 1—3.
— — List of members Jan. 1914.
— Zoological Society:
— — Zoologica, vol. 1, No. 12—17.
— — The Care of Home Aquaria 1914.
— Columbia University:
— — Univ.-Bibliographie 1913.
Nijmwegen. Nederl. botan. Vereenigung:
— — Recueil des travaux botan. Néerlandais, vol. 10, No. 1—4.
— — Archief, Nederl. kruidkundig 1913.
Nimes. Académie:
— — Mémoires, tom. 34.

Nowo-Tscherkassk. Donisches Polytechnisches Institut:
— — Annales, vol. 1, 1912; vol. 2, 1913.

Nürnberg. K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Stählin.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Probst.
— Germanisches Nationalmuseum:
— — Anzeiger 1913, 1—4.
— — Mitteilungen 1913.
— Verein für Geschichte der Stadt:
— — 36. Jahresbericht, 1913.

Orléans. Société archéologique de l'Orléanais:
— — Bulletin, No. 204, 205.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen, Bd. 38, 1913.

Ottawa. Department of Mines (Geological Survey Branch):
— — Memoir, No. 43, 44.
— — Rapport sommaire de la commission géologique du ministère des mines 1911.
— — Victoria Memorial Museum, Bulletin No. 1.
— — Map, No. 92 A (Neuausgabe).
— Department of Mines (Mines branch):
— — Publications, No. 100a, 105, 109, 155, 184 mit Karte, 233, 259, 262, 283.
— — Guide books, No. 1—10.
— Division de la commission géologique:
— — Publications, No. 1008.
— — Map 9a.
— — Avis, No. 1.

Oxford. English Historical Review:
— — Review, vol. 29, No. 113—115.
— University Library:
— — Annual Report of the Professor of astronomy for 1912/13.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, Bd. 71, 2.

Padua. Accademia Veneto-Trentina-Istriana:
— — Atti, 3. Serie, anno 6, 1913.

Palermo. Circolo matematico:
— — Annuario 1914.

Palermo. Circolo matematico:
— — Rendiconti, tom. 37, fasc. 1—3; tom. 38, fasc. 1—3. Supplemento, vol. 9, No. 1—4.
— — Indici, No. 5, 1914.
— — 30. Anniversario.
— Società Siciliana di scienze naturali:
— Il Naturalista Siciliano, vol. 22, No. 2—5.
— Società di scienze naturali ed economiche:
— — Giornale, vol. 30.

Pará (Brasilien). Museo Goeldi:
— — Boletin, vol. 8, 1911/12.

Parenzo. Società Istriana di archeologia e storia patria:
— — Atti e memorie, vol. 29, 1913.

Paris. Académie de médecine:
— — Bulletin 1914, No. 1—28.
— — Rapport sur les vaccinations etc. 1912.
— Académie des Sciences:
— — Annuaire 1914.
— — Comptes rendus 1914. (158) No. 1—26; (159) No. 1—3, tables zu tom. 155.
— — Oeuvres de Cauchy, sér. II, tom. 11, 1913.
— Comité international des poids et mesures:
— — Travaux et mémoires, tom. 15, 1913.
— — Procès-verbaux des séances, tom. 7.
— École politechnique:
— — Journal, sér. II, cahier 17.
— Institut général psychologique:
— — Bulletin, année 13, No. 5—6; année 14, No. 1—3.
— Ministère de l'instruction publ. et des beaux-arts:
— — Bulletin de la commission archéologique de l'Indochine, année 1912, livr. 3, 4; année 1913, No. 1, 2.
— Moniteur Scientifique:
— — Moniteur, No. 866—871, 4^0.
— Musée Guimet:
— — Annales, Bibliothèque d'études, tom. 27.
— Muséum d'histoire naturelle:
— — Bulletin, année 1912, No. 8; année 1913, No. 3—7.
— Redaction „La paix par le droit“:
— — La paix, année 23, No. 24; année 24, No. 1—12, 19—22.
— — Almanach 1914.
— Revue des études d'histoire:
— — Revue 1913, No. 91—93.

Paris. Revue historique:
— — Revue, tom. 115, No. 2; tom. 116, No. 1, 2.
— Revue des questions historiques:
— — Revue, No. 189—191.
— Société d'anthropologie:
— — Bulletins et mémoires 1913, No. 2—5.
— Société astronomique de France:
— — Bulletin 1914, No. 1—3.
— Société de géographie:
— — La Géographie, année 27, No. 6; année 28, No. 1—6; année 29, No. 1—4.
— Société mathématique de France:
— — Bulletin, tom. 41, fasc. 4; tom. 42, fasc. 1.
— — Comptes-rendus des séances de l'année 1913.
— Société de philosophie:
— — Bulletin, 6—8; année 14, No. 1—3.
— Société zoologique de France:
— — Bulletin, tom. 38.
— — Mémoires, tom. 26, 1913.

Parma. R. Deputazione di storia patria:
— — Archivio storico, N. Ser., vol. 14, 1914.

Pasing. K. Progymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.

Passau. K. Lyzeum:
— — Jahresbericht 1913/14.

Peradeniya. R. Botanic gardens:
— — Annals, vol. 5, part 6.

Perth. Western Australian Geological Survey:
— — Bulletin, No. 48, 49, 51—55.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:
— — Bulletin 1914, No. 1—11.
— — Byzantina Chronika, Bd. 18, 1—4.
— — Izvěstija, tom 18, No. 3, 4.
— — Mémoires, Classe physico-mathémat., vol. 26, No. 3, 4; vol. 28, No. 3; vol. 29, No. 6; vol. 31, No. 2—9; vol. 32, No. 1.
— — Mémoires, Classe historico-philol., vol. 12, No. 1.
— — Travaux du Musée botanique, vol. 11; Flora Sibirae, Bd. I. 24 25.
— — Travaux du Musée géologique, vol. 7, No. 4.
— — Annuaire du Musée zoologique, tom. 18, No. 3.
— Berginstitut:
— — Annales de l'Institut des Mines, vol. 5, No. 1.

St. Petersburg. Kaiserl. Bibliothek:
— — Snimki, Paleografičeskie, Taff. 1—14.
— Comité géologique:
— — Bulletins 1912, vol. 31, No. 9—10; 1913, vol. 32, No. 1.
— — Mémoires, N. Sér., No. 87—89, 93.
— Kaiserl. Russische Geographische Gesellschaft:
— — Zapiski, tom 39.
— Kaiserl. Gesellschaft für alte Literatur:
— — Pamjatniki, No. 175—179.
— Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kaiserl. Universität:
— — Schurnal, Physikal. Abteilung, tom. 45. Heft 7—9; tom. 46, Heft 1, 3.
— — „ Chem. Abteilung, tom. 45, Heft 9; tom. 46, Heft 1—3.
— Universitätsbibliothek:
— — Zapiski, No. 114.

Philadelphia. College of pharmacy:
— — American journal of pharmacy, vol. 86, No. 1—8.
— Franklin Institute:
— — Journal, vol. 177, No. 1—6; vol. 178, No. 1, 2.
— Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Bulletin, No. 44—48.
— — Report 38, 1914.
— Historical Society of Pennsylvania:
— — The Pennsylvania Magazine of History, No. 148—152.
— American Philosophical Society:
— — Proceedings, No. 212.
— — Report 1914.

Pisa. Società Toscana di scienze naturali:
— — Atti, Memorie, vol. 29, 1913.
— — „ Processi verbali, vol. 22, No. 5; vol. 23, No. 1, 2.
— Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento, ser. VI, anno 59. vol. 5, sem. 1, No. 10—12, anno 60; vol. 6, sem. 1 = fasc. 1—9.
— Università:
— — Annuario 1913/14.

Pistoia. R. Deputazione di storia patria:
— — Bulletino, anno XVI, fasc. 1—4.

Plauen. Altertumsverein:
— — Mitteilungen, 24. Jahresschrift, 1914.
— Gymnasium:
— — 25. Jahresbericht, 1913/14.

Plymouth. Marine Biological Association:
— — Journal, N. Ser., vol. 10, No. 2.

Poitiers. Société académ. d'agriculture, belles-lettres, sciences et arts:
— — Bulletin, No. 375—378.
Porto (Portugal). Academia polytechnica:
— — Annaes scientificos, vol. IX, No. 1, 2.
Posen. Historische Gesellschaft:
— — Zeitschrift, Jahrg. 28, Heft 1, 2.
— — Historische Monatsblätter, Jahrg. 14, No. 1—12.
Potsdam. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen, N. F., No. 59—61, 63.
— Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen, No. 25.
Prag. Böhmische Kaiser Franz Joseph-Akademie:
— — Památky archaeolgicke, Dilu 25, 4; 26, 1.
— K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Jahresbericht 1913.
— — Sitzungsberichte der philos.-hist. Klasse, 1913; der math.-naturwiss. Klasse, 1913.
— Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft etc.:
— — Übersicht über die Leistungen der Deutschen Böhmens, 1913.
— Böhmischer Klub für Naturwissenschaften:
— — Sbornik 1912; 1913, část 1.
— Lese- und Redehalle der deutschen Studenten:
— — 65. Bericht, 1913.
— Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos":
— — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 61, No. 1—10.
— Museum des Königreichs Böhmen:
— — Časopis musea královstvi českého, Bd. 88, No. 1.
— Čechoslavisches Museum:
— — Narodpisný Věstník Československý, Bd. 9, No. 1, 2.
— K. K. Sternwarte:
— — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 74, 1913.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen, Jahrg. 52, No. 1—4.
— Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1914; W.-S. 1914/15.
— — Inauguration des Rektors 1913/14.
Pressburg. Verein für Natur- und Heilkunde:
— — Verhandlungen, Bd. 30—32, 1909—1912.
Pretoria. Mines Department (Geological Survey):
— — Sheet 2 und Explanation.
Pusa (Bengal). Agricultural Research Institute:
— — Annual Report of the Department of agriculture 1912/13.

Ravenna. Bolletino storico Romagnolo:
— — Felix Ravenna, No. 12—16.
Regensburg. K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht für 1913/14 mit Programm von Patin.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Berichte, Heft 14, 1912.
Reims. Académie:
— — Travaux, année 1912/13 = 131, 132.
Riga. Gesellschaft für Geschichte und Altertumskunde der Ostseeprovinzen:
— — Sitzungsberichte 1912, 1913.
Rio de Janeiro. Biblioteca nacional:
— — Annaes, vol. 30, 1908.
— Observatorio:
— — Annuario 30, 1913.
Rochefort. Société de géographie:
— — Bulletin, tom. 35, No. 2—4.
Rom. Reale Accademia dei Lincei:
— — Annuario 1914.
— — Notizie degli scavi di antichità, vol. 10, fasc. 5—12.
— — Atti, ser. V, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, vol. 22, sem. 2, No. 12; vol. 23, sem. 1, fasc. 1—12, sem. 2, fasc. 1.
— — Rendiconti, Classe di scienze morali, vol. 22, fasc. 7—12; vol. 23, fasc. 1, 2.
— — Memorie, Classe di scienze fisiche, ser. V, vol. 9, fasc. 15—17; vol. 10, fasc. 1—5.
— Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
— — Atti, anno 67, sessione 1—7.
— — Memorie, vol. 31, 1913.
— R. Comitato geologico d'Italia:
— — Bollettino, anno 1913/14, No. 1.
— Redaktion der „Studi Romani":
— — Studi Romani, Rivista di storia e archeologia, anno 1, fasc. 1—6; anno 2, fasc. 1—3.
— Kaiserl. Deutsches Archäologisches Institut:
— — Jahresbericht 1913.
— — Mitteilungen, Bd. 29, No. 1, 2.
— Istituto Italiano di Numismatica:
— — Atti e memorie, vol. 1.
— Società italiana per il Progresso delle Scienze:
— — Atti, Riunione 7, Siena 1913.
— R. Società Romana di storia patria:
— — Archivio, tom. 37, No. 1, 2.

Rosenheim. Gymnasium:
— — Jahresberichte für 1913/14.
Rostock. Naturforschende Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte und Abhandlungen, N. F., Bd. 5, 1913.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1913/14 in 4^0 und 8^0.
Rouen. Académie de sciences et lettres:
— — Précis analitique des travaux 1912/13.
Rovereto. R. Accademia di scienze degli Agiati:
— — Atti, ser. IV, vol. 2, 1914.

Saarbrücken. Historischer Verein für die Saargegend:
— — Mitteilungen, Heft 13, 1913.
Saargemünd. Gymnasium mit Realabteilung:
— — 43. Jahresbericht, 1913/14.
Saintes. Commission des arts et monuments historique:
— — Recueil, tom. 19, No. 2.
St. Etienne. Société d'agriculture, sciences etc.:
— — Annales, tom. 33, livr. 2—4.
Saint Louis. Missouri historical Society:
— — Collections, vol. 4, No. 3.
— Washington University Library:
— — Publications, ser. IV, vol. 1, No. 1—4.
Salzburg. K. K. Staatsgymnasium:
— — Programm für das Jahr 1913/14.
— Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 54, 1914.
St. Gallen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch, Bd. 53, 1913.
— Historischer Verein:
— — Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte, Bd. 33.
— — Jenny Rettmayer, 1913.
— — Urkundenbuch der Abtei St. Gallen, Teil 5, Lief. 5 und 6.
San Fernando. Instituto y Observatorio de marina:
— — Anales, Sec. 2^a, Observ. meteorologie 1913.
— — Almanaque para el año 1915.
— — Elipse total 1912.
San Francisco. California Academy of Sciences:
— — Proceedings, ser. IV, vol. 2, No. 1—202; vol. 3, No. 265—454; vol. 4, No. 1—13.
Santiago de Chile. Observatorio astronomico:
— — Publicaciones, No. 6.

Sarajevo. Bosnisch-Herzegowinische Landesregierung:
— — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1912.
— Landesmuseum:
— — Glasnik 25, 1913, No. 3, 4; 26, 1914, No. 3.

Schweinfurt. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1913/14.

Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte:
— — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 79.

Sendai. Kaiserl. Universitäts-Bibliothek:
— — The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 4, No. 4; vol. 5, No. 1—4.
— — The Science Reports, vol. 2, No. 3—5; vol. 3, No. 1—4; II. Series (= Geology), vol. 1, No. 4, 5.

Siena. R. Accademia dei fisiocritici:
— — Atti, ser. V, vol. 5, No. 1—10.
— Deputazione de la Storia patria:
— — Bulletino Senese di storia patria, anno XX, fasc. 3; anno XXI, fasc. 1, 2.

Simla. Indian meteorological department:
— — India Weather Review 1912.
— — Monthly Weather Review 1913, Aug.—Dez.; 1914, Jan.—Febr.
— — Rainfall data of India 1912.

Sofia. Académie des Sciences:
— — Spisanie na bŭlgarskata akademia, kniga 6, 7.
— — Sbornik, No. 1, 2.
— Société archéologique Bulgare:
— — Bulletin, vol. 3, fasc. 2.
— — Ljetopis (Jahrbuch) 1, 1911.
— — Materialy 1—3 (1910—1912).
— — Michoff, Sources Bibliographiques 1914.

Speier. Historischer Verein der Pfalz:
— — Mitteilungen, Bd. 33, 1913.

Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:
— — Stader Archiv, N. F., Heft 4, 1914.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:
— — Baltische Studien, N. F., Bd. 17, 1913.
— — Monatsblätter 1913, No. 1—12.

Stockholm. K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
— — Fornvännen, Årgangen 7, 1913.
— — Almyren, Eisenzeit Gotlands, Heft 1, 1914.
— K. Landtbruks-Akademie:
— — Handlingar och tidskrift, Bd. 52, 1913, No. 8; Bd. 53, 1914, No. 1 - 7.

Stockholm. K. Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 28, 1913.
— Entomologiska föreningen:
— — Tidskrift, Jahrg. 34, 1913, No. 1, 2.
— Geologiska Förening:
— — Förhandlingar, Bd. 35, No. 7; Bd. 36, No. 1—6.
— Nationalekonomiska föreningen:
— — Förhandlingar 1913.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
— — Ymer, Jahrg. 33, Heft 4; Jahrg. 34, Heft 1, 2.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1913, Heft 1—4.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden, No. 33—35; N. F., 4, No. 2.
— — Urkunden rörande St. historia 1.
— Sveriges geologiska Undersökning:
— — Årsbok 5, 1911.
— — Afhandlingar och uppsatser, No. 8—11.
— — Serie Aa, No. 135, 138, 141, 146, 149.
— Forstliche Versuchsanstalt:
— — Meddelanden, Heft 10, 1913.

Stonyhurst. College Observatory:
— — Results of Meteorological and Magnetical Observations 1913.

Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:
— — Seismometrische Aufzeichnungen 1913, No. 47—52; 1914, No. 1—16.
— — Monatliche Übersicht 1913, Juli—Dez.; 1914, Jan.—März.
— — Mikroseismische Unruhe Mai—Juni.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 19—21.
— Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt:
— — 1911, Heft 12; 1912, Heft 1—6.
— Universitäts-Bibliothek:
— — Schriften 1913/14.

Straubing. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Lederer.
— Historischer Verein:
— — Jahresbericht 16, 1913.

Stuttgart. K. Landesbibliothek:
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 45—49.

Stuttgart. Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:
— — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 23, 1914, No. 1—4.
— — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 16.
— K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
— — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrg. 1913, Heft 1—3; 1914, Heft 1.
— — Statistisches Handbuch 1912 und 1913.

Sydney. Australian Museum:
— — Records, vol. 10, No. 7.
— Linnean Society of New South Wales:
— — Proceedings, vol. 38, part 3, 4.
— — Abstract of Proceedings, No. 317—320.
— R. Society of New South Wales:
— — Journal and Proceedings, vol. 47, part 2, 3.

Tacubaya. Observatorio astronomico nacional:
— — Annuario, año 34, 1914.

Taihoku. Government of Formosa:
— — Icones plantarum Formosanarum, fasc. 3, 1913.

Taschkent. Turkestan. Abteilung der Kaiserl. Russischen Geographischen Gesellschaft:
— — Izvestja, tom. 9 und Beilage zu Bd. 6, Conspectus Florae, No. 5.

Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:
— — Mitteilungen, Heft 21.

Tiflis. Kaukasisches Museum und öffentliche Bibliothek:
— — Mitteilungen, Bd. 7, No. 3, 4.
— — Nikolski, Herpetologia caucasica 1913.

Tokyo. Imperial Academy:
— — Proceedings, vol. 1, No. 3.
— — Memoirs, vol. 1, No. 1.
— Imp. Earthquake Investigation Committee:
— — Bulletin, vol. 6, No. 2.
— Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
— — Mitteilungen, Bd. 15, Teil A.
— Geographical Society:
— — Journal, vol. 22, No. 295—300.
— Zoological Society:
— — Annotationes zool. Japon, vol. VIII, part 3, 4.
— Mathematico-Physical Society:
— — Proceedings, 2^{d} ser., vol. 7, No. 10—20.

Tokyo. Imp. Central Agricultur Experiment Station:
— — Bulletin, vol. II, No. 1.
— Imp. Geological Survey of Japan:
— — Bulletin, vol. 23, No. 1—3.
— — Geolog. Map of Korea.
— — Geology of empire, Zone 4, Col. 1, 2; Zone 7, Col. 5.
— Kaiserl. Universität:
— — The Journal of the College of Science, vol. 34, No. 2; vol. 35, No. 5, 6; vol. 36, No. 3, 4.
— — The Journal of the College of Agriculture, vol. 4, No. 6.
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. 11, No. 2, 3; Bd. 12, No. 1, 2, Tabellen.

Toronto. Canadian Institute:
— — Transactions and proceedings, vol. 10, part 1.
— — Yearbook and annual report 1912/13.
— R. Astronomical Society of Canada:
— — Journal, vol. 7, No. 6; vol. 8, No. 1—3.
— — Observers Handbook for 1914.
— University:
— — Studies, Review of Historical publications, vol. 18, 1913.
— — Papers from Chemical laboratories, No. 99, 100.

Toulouse. Université:
— — Annales du Midi, No. 99—101.
— — Bibliothèque méridionale, sér. I, tom. 16.
— Société de geographie:
— — Bulletin, année 32, No. 2, 3; année 33, No. 1, 3.

Tours. Société archéologique de Touraine:
— — Bulletin, tom. 19, trim. 1—4.

Trient. Biblioteca e Museo comunale:
— — Archivio Trentino, anno 28, fasc. 3, 4; anno 29, fasc. 1, 2.

Troitzkossawsk. Kaiserl. Russ. Geographische Gesellschaft:
— — Trudy, tom. 1 (1898); tom. 15, 1—3 (1914).
— — Protokolly 1—5.

Tübingen. Universität:
— — Universitäts-Schriften 8—11.

Tunis. Institut de Carthage:
— — Revue Tunisienne, No. 103—106.

Turin. R. Accademia delle scienze:
— — Atti, vol. 49, No. 1—7.
— Accademia d'agricoltura:
— — Annali, vol. 56.
— Museo di Zoologia ed Anatomia comparata:
— — Bolletino, vol. 28, 1913, No. 665—679.

Uccle. Observatoire:
— — Annales astronomiques, tom. 13, No. 2; tom. 14, No. 1.
— — Annuaire météorologique 1914.
— — Bulletin sismique, No. 1—8.
— — Carte photographique du ciel, No. 61—75, 77—100, 156.
— La Revue Congolaise:
— — Revue, année 4, No. 3—6.

Upsala. K. Universität:
— — Arbeten, No. 16, 1.
— — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 13, fasc. 4; vol. 14, fasc. 1.
— — Zoologiska Bidrag från Upsala, Bd. 1, 1911/12; Bd. 2, 1913.
— Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Bulletin mensol., vol. 45, 1913.
— Human. Vetenskaps Samfundet:
— — Skrifter, Bd. 15, 16.

Urbana. Illinois State Laboratory of Natural History:
— — Bulletin, vol. 9, art. 11, 12; vol. 10, art. 1—4.

Utrecht. Historisch Genootschap:
— — Bijdragen en mededeelingen, deel 34.
— — Werken, ser. III, No. 32, 33.
— Provincial Utrechtsch Genootschap:
— — Aanteekeningen 1914.
— — Verslag 1914.
— Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
— — Annuaire 1912, A, B.
— — Overzicht, Jahrg. 10, No. 12; Jahrg. 11, No. 1—8, 10, 11.
— — Onweders 1911, deel 32.
— — Publicacion, No. 102, 104, 106.
— Physiol. Laborat. d. Hoogeschol:
— — Onderzoekingen, vol. V, No. 14, 15.

Vaduz. Histor. Verein für das Fürstentum Liechtenstein:
— — Jahrbuch, Bd. 13, 1913.

Vendôme. Société archéologique scientifique et littéraire:
— — Bulletin, tom. 52, 1913.

Venedig. Ateneo Veneto:
— — Ateneo Veneto, anno 36, vol. 2, fasc. 3; anno 37, vol. 1, fasc. 3, vol. 2, fasc. 1—3.
— Comitato talassografico Italiano:
— — Bolletino trimestrale, No. 26 und Titel und Register zu No. 1 bis 26.

Verona. Accademia:
— — Atti e momorie, ser. IV, vol. 13 = 87, 1913.
— — Osservazione meteorol. 1912.
— Museo civico:
— — Madonna Verona, fasc. 28–31.

Vitry-le-François. Société des sciences et arts:
— — Memoires 27, 1908.

Warschau. Towarzystwo Naukowe [Wissenschaftliche Gesellschaft]:
— — Sprawozdania [Sitzungsberichte], Jahrg. 6. Heft 1—6.
— — Prace, II. Kl., No. 7–10; III. Kl., No. 4—6.
— — Dyaryusze sejmówe, fasc. 1.
— — Paläontologia Polnica, fasc. 1.

Washington. Academy of Sciences:
— — Journal, vol. IV, No. 12.
— U. S. Department of Agriculture:
— — Yearbook 1913.
— — Journal of the agricultural Researche, vol. 1, No. 2—6; vol. 2, No. 1—4.
— Department of commerce:
— — Scientific Papers of the Bureau of standards, No. 213.
— — Special publication, No. 15.
— — Results of observations 1911 and 1912.
— Bureau of American Ethnology:
— — Bulletin, No. 53 und 56.
— Bureau of railway economics:
— — Bulletin, No. 57—61, 63—65, 67—69.
— Smithsonian Institution:
— — Annual Report 1911 and 1912.
— — Miscellaneous Collections, No. 2187, 2222, 2227, 2229, 2232, 2236 bis 2243, 2245, 2246, 2248, 2251—2253, 2255, 2256, 2258—2266.
— U. S. National Museum:
— — Bulletin, No. 71, part 3, 4; No. 83—87.
— — Contributions to the U. S. National Herbarium, vol. 16, No. 11, 13; vol. 17, No. 4, 5; vol. 18, No. 1, 2.
— — Proceedings, No. 45, 46.
— — Report on the progress 1912/13.
— U. S. Naval Observatory:
— — Publications, 2d ser., vol. 8, 1913.
— — Annual Report for 1913.
— — American Ephemeris 1916.

Washington. Surgeon Generals Office U. S. Army:
— — Index catalogue, vol. 18.
— U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
— — Report of the Superintendent 1912/13.
— U. S. Geological Survey:
— — Bulletin, No. 536, 538—540, 542, 543, 545—547, 551—555, 558, 564, 575, 580 A, B, C.
— — Professional Paper, No. 76, 81, 82, 84, 85 B, C, D, E, 90 A, B.
— — Water Supply Paper, No. 295, 302, 303, 309, 319, 320, 322, 324, 333, 334, 337, 340 A, 345 A—D.
— — Annual Report 34, 1911/12.

Weihenstephan. K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1913/14.

Weimar. Thüring. botanischer Verein:
— — Mitteilungen, N. F., Heft 31.

Wernigerode. Harzverein für Geschichte:
— — Zeitschrift, Jahrg. 46, Heft 3, 4; Jahrg. 47, Heft 1, 2.

Wien. Kaiserl. Akademie der Wissenschaften:
— — Sitzungsberichte, a) der philos.-histor. Klasse, Bd. 171, Abh. 2 und Titel und Register; Bd. 173, Abh. 5, 6; Bd. 174, Abh. 2—4; Bd. 175, Abh. 1, 3; Bd. 176, Abh. 3, 4 und 8; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 122, Abh. 3—10; Bd. 123, Abh. 1; Abt. II^a, Bd. 122, Abh. 5—10; Bd. 123, Abh. 1—3; Abt. II^b, Bd. 122, Abh. 6—10; Bd. 123, Abh. 1—3; Abt. III, Bd. 122, Abh. 4—10.
— — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 57, 2, 4; Bd. 58, 2; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 82 und 89.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, No. 47.
— — Almanach, 63. Jahrg., 1913.
— — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 104, 1.
— K. K. Gesellschaft der Ärzte:
— — Wiener Klinische Wochenschrift 1914, No. 1—53, 4^0.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Verhandlungen, Bd. 64, No. 1—4.
— — Abhandlungen, Bd. 8, No. 1, 2.
— K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
— — Annalen, Bd. 27, No. 4; Bd. 28, No. 1, 2.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 21.
— Mechitharisten-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1913, No. 12; 1914, No. 1—9.
— K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Abhandlungen, Bd. 22, Heft 4.

Wien. K. K. Geologische Reichsanstalt:
— — Verhandlungen 1913, No. 13—18; 1914, No. 1—11.
— — Jahrbuch, Bd. 63, Heft 3, 4.
— — Geologische Karte, Lief. 64 und 115.
— K. K. Universitäts-Sternwarte:
— — Annalen, Bd. 23, 1; 25, 1.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
— — Schriften, Bd. 54, 1913/14.
— K. K. Universität:
— — Inauguration des Rektors 1914/15.
— — Verwaltungsbericht der K. K. Univ.-Bibliothek 7, 1912/13.
— — Übersicht der Behörden 1914/15.
— — Vorlesungen, S.-S. 1914, W.-S. 1914/15.
— — Bericht über die volkstümlichen Universitätsvorträge 1913/14.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Klimatopographie von Österreich 6, 1913.
Wiesbaden. Verein für Nassauische Altertumskunde:
— — Annalen, Bd. 42, 1913.
— — Mitteilungen, Jahrg. 17, No. 1—4.
— Verein für Naturkunde:
— — Jahrbücher, 66. Jahrg.
Wladiwostok. Orientalisches Institut:
— — Izvěstja, tom. 39, 1, 2; tom. 48, 3, 4; tom. 51, 1.
Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
— — Jahrbuch, 12. Jahrg., 1913.
— — Braunschweigisches Magazin, Bd. 19, 1913, 4^0.
Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte, 1913, No. 3—9; 1914, No. 1, 2.
— — Verhandlungen, N. F., Bd. 42, Heft 6; Bd. 43, Heft 1—4.
— K. Altes Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Müller.
— K. Neues Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14.
— K. Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1914; W.-S. 1914/15.
— — Personalstand 1914.
— Historischer Verein:
— — Archiv, Bd. 55.
— — Jahresbericht für 1912.
Wunsiedel. K. Realschule:
— — Jahresbericht 1913/14.

Zürich. Concilium bibliographicum:
— — Annotationes, vol. 8, 1912.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt 116.
— — Vierteljahresschrift, Jahrg. 58, Heft 3, 4; Jahrg. 59, Heft 1, 2.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 40 und Erläuterungen, No. 17.
— — Geologische Spezialkarten, Nr. 55—73.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 15, No. 4; Bd. 16, No. 1—3.
— — 22. Jahresbericht, 1913.
— Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
— — Dissertationen 1914.
— — Programm, S.-S. 1914, W.-S. 1914/15.
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen, No. 104.
— Universität:
— — Schriften aus dem Jahre 1913/14 in 4^0 und 8^0.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen, 49. Jahrg., 1912.

Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:
— — Jahresbericht 1913/14 mit Programm von Krehbiel.

Werke, die der Akademie als Geschenke zugegangen sind.

Aberdeen, University Peace Society:
— Concordia, Annual journal 1913.

Ansbach, Historischer Verein für Mittelfranken:
— Katalog der K. Regierungsbibliothek.

Arbanitopoullos, Dr. Apostolos:
— *Πρακτικὰ τῆς Ἀρχαιολογικῆς ἑταιρίας* 1911 und 1912.
— *Θεσσαλικαὶ ἐπιγραφαί.*

Baer, Jos., Frankfurt a. M.:
— Frankfurter Bücherfreund, Nr. 1.

Benares, Sanscrit College:
— List of Sanscrit and Hindi Manuscripts. Allahabad 1912.

Böhlau, H., Weimar:
— Zeitschrift der Savignystiftung 1913 (3 Teile).

Bogdanow, V. V., Sekretär der Kaiserl. Gesellschaft für Freunde der Naturwissenschaften in Moskau:
— D. N. Anoutchine. Moskau 1913.

Cardenas, Juan de:
— Problemas y secretos Marauillosos. Mexico 1913.

Cunningham Allan:
— A binary canon. London 1900.

Del Castillo, Franc. Fern.:
— Apuntes para la historia de San Angel y sus abredadores. Mexico 1913.

Fabre, Leon, Bordeaux:
— De l'ordre de la base de la géometrie. Bordeaux 1913.

Foucart, Paul, Paris:
— Les Mystères d'Eleusis. Paris 1913.

Freundt, Thorn:
— Dreiteilung des Winkels. Thorn 1908.

Guimaraes, Rod., Lissabon:
— Les mathématiques en Portugal, Append. II. Lissabon 1913.

Haag, Niederländischer Verein für Wirtschaftsgeographie:
— Führer durch die Niederlande, 1913.

Heisenberg, München:
— Byzantinische Zeitschrift, Bd. 22, Heft 3 und 4.

Herder, Freiburg:
— Verlagskatalog 1913.

Hepites:
— Dictionnaire français-grec, tom. 2. Athen 1913.

Houtsma, Leiden:
— Enzyklopädie des Islam, Lief. 19 und 20.

Huber, Anton, München:
— Klima der Zugspitze. München 1913.

Hübner, Erich:
— Beitrag zur Theorie der isostatischen Reduktion der Schwerebeschleunigung. L. 1913.

Kiliani, H., in Freiburg i. Br.:
— Gitalin, ein Gemenge; über digitalinum verum (S.-A.).

Kolde, Gerhard:
— Gedächtnisrede für Theod. Kolde. Erlangen 1913.

Kramar, Prof., Budweis:
— Die Germanen des Tacitus. Budweis 1914.

Kühne, E. E.:
— Bahnbestimmung des Kometen 1913.

Lambros, Spyridon, Athen:
— *Νέος Ἑλληνομνήμων*, Bd. 10 und 11.

Lancaster:
— Bulletin of the international association for promoting the study of quaternious. Lancaster 1913.

Lemberg, Universität:
— Festschrift aus Anlaß des 250jährigen Bestehens. Lemberg 1914.

Lindemann, F., München:
— Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, 3. Aufl. L. 1914.
— Picard, Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft. L. 1914.

Lüttich:
— Un appel aux Wallons pour un musée de la vie Wallonne. L. 1913.

Luschin v. Ebengereuth, Graz:
— Österreichische Reichsgeschichte, 2. Aufl. Bamberg 1914.

Mac Donald:
— Study of man. Washington 1914.

Mehlis, C.:
— Jurassus und Vosegus. Eine ethnographische Wanderung im Oberrheintale. 1914.

Mehlis, C.:
— Älteste Grenzzeichen im Pfälzerwald, I (S.-A.).
— Die klassischen Namen des Schwarzwalds (S.-A.).

Merchich, M.:
— Organistik der Geometrie. Moson (Ung.) 1914.

Merck, Darmstadt:
— 27. Jahresbericht.

Middeldorp:
— Kochscher Bazillus 1913.

München, Schwedisches Konsulat:
— Schweden, historisch-statistisches Handbuch, 1. Teil (Land und Volk) von J. Guinchard. Stockholm 1913.
— Statistisches Amt.
— Einzelschriften, Nr. 11.

Nöther, Max, Erlangen:
— Nachruf auf Paul Gordan 1914.

Obermaier, H, Paris:
— L'anthropologie (S.-A.) 1912.

Regensburg, Fürstliches Zentralarchiv:
— Postgeschichtliche Dokumente von Jos. Rübsam und Rud. Freytag. Regensburg 1914.

Ruess, Ferd.:
— Die Kasseler Handschrift der Tironischen Noten.

Ruge, Arnold:
— Die Philosophie der Gegenwart, Bd. 4. Heidelberg 1914.

Shiraki, T.:
— Grylliden von Formosa, 1913.
— Acrididen Japans, 1910.

Sommer, Oskar:
— Structure of „le livre d'Artus". London 1914.

Soyez-le-Roi:
— Amour et vaillance. Lille 1913.

Speyer, Historisches Museum:
— Führer durch das historische Museum. Speyer 1914.

Stählin, Otto:
— Die christliche griechische Literatur. München 1914.

Teubner, Leipzig:
— Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 2, Heft 2/3; Bd. IV, 2, Heft 4; Bd. IV, 1, II, Heft 3; Bd. III, 1, Heft 5; Bd. II, 1, Heft 7.

Teubner, Leipzig:

— Encyclopédie des sciences mathématiques, tom. III, vol. 2, fasc. 1; tom. IiI, vol. 4, fasc. 1; tom. II, vol. 2, fasc. 2; tom. IV, vol. 5, fasc. 2.

— Corpus Medicorum Graecorum V. 9, 1 und XI, 2, 1. Lipsiae 1914.

Trübner, Straßburg:

— Zeitschrift für Assyriologie, Bd. 28, Heft 2—4.

— Minerva, Bd. 23, 1913/14.

Wahrmund, Ludwig, Prag:

— Quellen zur Geschichte des römisch-kanonischen Prozesses im Mittelalter, 2. Bd., 2. Heft. Innsbruck 1914.

Waldeyer:

— 2. Bericht des Präsidenten der Br. C. Leipzig 1913.

Zürich, Universität:

— Festschrift 1914.

Über Funktionen grosser Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung.

Von **H. Burkhardt.**

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1914.

Die Laplacesche Methode zur Bestimmung angenäherter Werte von Integralen der Form

1) $$J_n = \int f(x)\,\varphi(x)^n\,dx$$

für große Werte von n läßt sich, soweit sie für die hier vorzunehmende Untersuchung in Betracht kommt, folgendermaßen darstellen: Das Verhältnis des Beitrags, den die Umgebung des Maximums der Funktion $\varphi(x)$ zu dem Integral liefert, zu dem Beitrag aller übrigen Teile des Integrationsintervalls nimmt mit wachsendem n zu wie eine Exponentialfunktion vom Exponenten n (vorausgesetzt, daß der erstgenannte Beitrag nicht selbst Null ist). Man bestimme also zunächst dieses Maximum; wird es in einem inneren Punkte x_0 des Intervalls angenommen, so muß in ihm $\varphi'(x_0) = 0$ sein; ist dann $\varphi''(x_0)$ nicht gleich Null, so transformiert Laplace das Integral (1) durch die Substitution

2) $$\varphi(x) = \varphi(x_0)\exp(-\alpha t^2)$$

in die Form

3) $$J_n = \int \chi(t)\exp(-n\alpha t^2)\,dt,$$

wobei, eben weil nur die Umgebung des Maximums einen zu berücksichtigenden Beitrag liefert, die Integration in Bezug auf t von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden kann, aber gleichwohl die Funktion $\chi(t)$ nach Potenzen von t entwickelt werden darf. Mühsam ist dabei nur die Auflösung der Gleichung (2) nach x; das ist wohl mit der Grund gewesen, weshalb Herr Darboux und seine Schüler dieses Verfahren wieder verlassen haben[1]). Man kann aber die Form (3) des Integrals auch durch die viel einfachere Substitution

$$x - x_0 = t \tag{4}$$

erreichen; man muß dann nur folgendermaßen verfahren:

Man beginne mit der Entwicklung:

$$\log \varphi(x) = \log \varphi(x_0) - \alpha t^2 + \beta t^3 + \cdots, \tag{5}$$

sie liefert:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) e^{-\alpha t^2} (1 + \beta t^3 + \cdots). \tag{6}$$

Dieser Ausdruck ist nun noch in die n^{te} Potenz zu erheben; geschieht das mit Hilfe der Binomialreihe, so treten n und seine Potenzen bei den einzelnen Entwicklungsgliedern als Faktoren auf. Das scheint die Verwendbarkeit des Verfahrens zu vernichten; aber man erkennt leicht, daß man in jedem Fall doch nur eine endliche Anzahl von Gliedern zu berücksichtigen braucht, um im Resultat alle Glieder zu bekommen, die keine höhere als eine bestimmte Potenz von n im Nenner haben.

Enthält die Entwicklung von $\chi(t)$ nach Potenzen von t Potenzen mit Exponenten < -1, so muß der Integrationsweg dem Punkte $t = 0$ in bekannter Weise ausweichen; das bringt weiter keine Schwierigkeit mit sich.

[1]) Wenn $f(x)$ sich auf eine Konstante reduziert, kann man sich der Lagrangeschen Reihenumkehrungsformel bzw. des mit dieser der Sache nach identischen, von Herrn Debye, Math. Ann. 67, p. 544 entwickelten Verfahrens bedienen; aber wenn $f(x)$ nicht konstant ist, ist das nicht mehr so bequem.

Hier möge die Rechnung nur für den Fall durchgeführt werden, daß die Entwicklung von $\chi(t)$ ein Glied mit t^{-1} enthält, und daß man im Resultat noch alle Glieder mitnehmen will, die keine höhere Potenz von n als die erste im Nenner enthalten. Man braucht dann nur die im folgenden angegebenen Glieder zu berechnen.

Aus (6) folgt:

$$7) \qquad \varphi(x)^n = \varphi(x_0)^n e^{-n\alpha t^2}(1 + n\beta t^3 + \cdots);$$

ist ferner

$$8) \qquad f(x) = \frac{1}{at + bt^2 + \cdots} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t} - \frac{b}{a} + \cdots\right),$$

so ergibt sich:

$$9) \quad f(x)\varphi(x)^n dx = \frac{\varphi(x_0)^n}{a} \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{b}{a} + n\beta t^2 + \cdots\right) e^{-n\alpha t^2} dt,$$

also

$$10) \quad J_n \sim \frac{\varphi(x_0)^n}{a}\left[\pm \pi i + \left(-\frac{b}{a\sqrt{a}} + \frac{\beta}{2\sqrt{a^3}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \cdots\right].$$

Die Integralausdrücke der Koeffizienten derjenigen trigonometrischen Reihen, welche in der Theorie der Keplerschen Bewegung der Himmelskörper auftreten und nach den Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalie u fortschreiten, nehmen die Form (1) an, wenn man

$$11) \qquad z = e^{iu}$$

als Integrationsvariable einführt. Dabei ist in der Ebene der komplexen Variabeln z über den Einheitskreis zu integrieren, und die Funktion $\varphi(z)$ hat den Ausdruck

$$12) \qquad \varphi(z) = z \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right);$$

ε bedeutet die lineare Exzentrizität, also einen reellen, echten Bruch. Differentiation ergibt

$$13) \qquad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right).$$

Die Nullstellen von $\varphi'(z)$ sind also reelle und liegen bei:

$$14) \qquad z_0 = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} < 1,$$
$$z_1 = \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}} > 1.$$

Schreibt man (13) in der Form:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -\frac{\varepsilon}{2z^2}(1-zz_0)(1-zz_1),$$

so erhält man daraus durch Differentiation:

$$15) \qquad \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} + \cdots = -\frac{\varepsilon}{2z^2}(1-zz_0)(-z_1) + \cdots,$$

wobei die nur durch Punkte angedeuteten Bestandteile bei $z = z_0$ Null sind; also:

$$16) \qquad \frac{\varphi''(z_0)}{\varphi(z_0)} = \frac{\varepsilon}{2z_0^2}(z_1 - z_0) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{z_0^2} > 0$$

und ebenso:

$$\frac{\varphi''(z_1)}{\varphi(z_1)} = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{z_1^2} < 0.$$

Es hat sonach die Funktion $\varphi(z)$ im Punkte z_0 auf der Achse der reellen z ein Minimum, und folglich auf jeder Linie, die diese Achse in diesem Punkte rechtwinklig trifft, in ihm ein Maximum. In der Tat erkennt man, daß auf jedem Kreise von einem Radius r um den Nullpunkt

$$17) \qquad \eta(z) = r \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\Re(z)\right)$$

ist, daß also $\eta(z)$ für $r < 1$ im Schnittpunkt eines solchen Kreises mit der Halbachse der positiv reellen z einen größeren Wert hat, als in jedem anderen Punkte desselben Kreises. Durch diese Bemerkung wird man der Diskussion der Kurven $\eta(z) = \text{const.}$, die sonst an dieser Stelle erforderlich wäre,

überhoben. Man kann also den Integrationsweg in den Kreis $z = z_0$[1]) verlegen, wobei nur dem Punkte $z = z_0$ selbst, wenn nötig, auszuweichen ist.

Speziell für die Koeffizienten der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung

18) $$w - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\zeta$$

(w bedeutet die wahre Anomalie), die sich durch die Integrale

19) $$C_n = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nu - n\varepsilon \sin u)}{1 - \varepsilon \cos u}\, du$$

$$= \frac{-i\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\pi} \int f(z)\, \varphi(z)^n\, dz,$$

wobei:

20) $$f(z) = \frac{1}{z - \frac{\varepsilon}{2}(z^2+1)}.$$

darstellen lassen, gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

Um reelle t zu bekommen, setzen wir abweichend von (4):

21) $$z - z_0 = it, \qquad dz = i\,dt;$$

dann kommt zunächst:

$$\log \varphi(z) = \log z - \frac{\varepsilon}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$= \log z_0 + \log\left(1 + \frac{it}{z_0}\right) - \frac{\varepsilon}{2}(z_0 + it) + \frac{\varepsilon}{2z_0}\left(1 + \frac{it}{z_0}\right)^{-1}$$

$$= \log \varphi(z_0) + \frac{t^2}{2z_0^2} - \frac{it^3}{3z_0^3} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2z_0}\left(-\frac{t^2}{z_0^2} + \frac{it^3}{z_0^3} + \cdots\right).$$

also:

---

[1]) Diesen Kreis wählt auch schon A. Cauchy (Paris, C. R. 38, 1854, p. 1033 = œuvres (1) 12, p. 165) als Integrationsweg; doch spricht er dort nur von der Entwicklung ganzer Funktionen von z und $\frac{1}{z}$.

22)
$$\alpha = \frac{1}{2z_0^2}\left(-1+\frac{\varepsilon}{z_0}\right) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2z_0^2},$$
$$\beta = \frac{i}{z_0^3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{2z_0}\right);$$

ferner:

$$f(z) = \frac{1}{it - \frac{\varepsilon}{2}(2z_0 it - t^2)},$$

also:

23) $$a = i(1-\varepsilon z_0) = i\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad b = \frac{\varepsilon}{2}$$

und demnach:

$$-\frac{ba}{\alpha}+\frac{\beta}{2} = \frac{i}{2z_0^3}\left(\frac{z_0\varepsilon}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{2z_0}\right) = \frac{i}{3z_0^3}$$

$$-\frac{b}{\alpha\sqrt{\alpha}}+\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha^3}} = \frac{2i\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}^3}.$$

also schließlich

24) $$C^n \sim \frac{(z_0 \exp\sqrt{1-\varepsilon^2})^n}{n}\left(1+\frac{4}{3\sqrt{2n\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}^3}\right)$$

übereinstimmend mit dem seinerzeit von Jacobi[1]) auf einem von Carlini gebrochenen, sehr mühsamen Wege erhaltenen Resultate. Wollte man, wie es Herr Flamme[2]) getan hat, die Entwicklung bis zu Gliedern mit $\sqrt{n^3}$ im Nenner treiben, so müßte man in der Entwicklung von $(1+\beta t^3+\cdots)^n$

in den Gliedern mit n bis t^5,
in den Gliedern mit n^2 bis t^7,
in den Gliedern mit n^3 bis t^9

[1]) Astr. Nachr. 1848, 1850 = Werke 7, p. 188, 237.

[2]) Paris thèse 1887, p. 66 = Bordeaux observ. ann. 2, 1887, p. 106. Um aus Flammes allgemeiner Formel den Ausdruck für C_n zu bekommen, hat man $l=m=0$, $k=-2$ zu setzen und mit $\sqrt[n]{1-\varepsilon^2}$ zu multiplizieren.

gehen; ebenso wären noch Glieder mit $n^4 t''$ zu berücksichtigen, aber die Glieder mit n^4 haben mindestens t^{12} zum Faktor, und ebensowenig kommen Glieder mit noch höheren Potenzen von t in Betracht. Es würden also nur die Glieder

$$(25) \quad 1 + n\beta t^3 + n\gamma t^4 + n\delta t^5 + \frac{n^2}{2}(\beta^2 t^6 + 2\beta\gamma t^7) + \frac{n^3}{6}\beta^3 t^9$$

zu berücksichtigen sein.

Dem hier besprochenen Problem kommt ein gewisses historisches Interesse zu. Nicht nur Laplace[1]) und Jacobi[2]) haben zu verstehen gegeben, daß sie im Besitze besonderer Methoden zur Behandlung derartiger Aufgaben seien. Auch Gauß hat bei Gelegenheit der Korrespondenz mit Schumacher[3]) über die Aufnahme der Aufsätze Jacobis in die Astronomischen Nachrichten diesem im Dezember 1849 und Februar 1850 mitgeteilt, er sei seit mehr als 40 oder 50 Jahren im Besitze eines Verfahrens, die Aufgabe „auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art" aufzulösen, Schumachers Vorschlag, es zu veröffentlichen, aber mit der bei ihm gewöhnlichen Motivierung abgelehnt, er könne die Sache noch nicht in einer ihm selbst genügenden Weise darstellen. Soll man in der Tat wagen, daraus zu schließen, Gauß sei schon um die Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert in die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen so tief eingedrungen gewesen, daß

[1]) Supplément à la mécanique céleste, Paris 1827 = œuvres 5, p. 489. Er leitet einen asymptotischen Ausdruck für die Koeffizienten der Entwicklung des Radiusvektor nach den Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalie durch einen von ihm selbst nicht als streng anerkannten Übergang von reellen zu komplexen Größen und bemerkt dann: „j'en ai reconnu l'exactitude par une autre analyse".

[2]) Astr. Nachr. 1848 = Werke 7, p. 176. Er bemerkt, die Eigentümlichkeit der von ihm gebrauchten Methode — die er nicht mitteilt —, habe ihre anderweitige Bestätigung wünschenswert gemacht und er habe deshalb es unternommen zu untersuchen, ob Carlinis Methode, nach Beseitigung der von diesem begangenen Versehen, daselbe Resultat liefere.

[3]) Briefwechsel mit Schumacher 6, p. 51, 58; die in Betracht kommenden Stellen auch abgedruckt in Königsbergers Jacobi-Biographie, p. 471—72, 476—77.

er die Möglichkeit einsehen konnte, die Laplacesche Methode zur Bestimmung der Funktionen großer Zahlen für Probleme der hier besprochenen Art durch geeignete Verschiebung des Integrationswegs in der Ebene der komplexen Zahlen nutzbar zu machen? Er wäre dann Cauchy auch in diesem Punkte um 30 Jahre voraus gewesen.

Endlich sei es erlaubt, in diesem Zusammenhange noch auf eine bis jetzt meines Wissens noch nicht völlig klargelegte Vorschrift Riemanns[1]) zur Untersuchung von Integralen der Form

$$\int f(x) \sin(n\varphi(x))\, dx$$

hinzuweisen: „man untersuche die Stelle, wo die Zeichenwechsel des Sinus sich am langsamsten folgen".

Die vorstehenden Überlegungen eröffnen auch den Weg zum Verständnis der Andeutungen, die A. Cauchy über die Berechnung asymptotischer Werte der hier besprochenen Entwicklungskoeffizienten für stark exzentrische Bahnen gegeben hat. Für $\varepsilon = 1$ fallen die beiden Nullstellen (14) in den Punkt $z = 1$ zusammen: der vorhin benutzte Kreis ist dann nicht mehr als Integrationsweg zu verwenden, da auf ihm $|\varphi(z)$ konstant ist. Cauchy gibt an, man solle in diesem Fall den Integrationsweg aus zwei Bogen logarithmischer Spiralen zusammensetzen, die die Radienvektoren unter Winkeln von 60 Grad schneiden, und gibt deshalb seiner Note[2]) den etwas geheimnisvoll klingenden Titel: „Sur les services que la spirale logarithmique peut rendre à l'astronomie." Damit scheint es folgende Bewandtnis zu haben: der Gebrauch der logarithmischen Spirale ist nicht das wesentliche; sie ist von Cauchy wohl nur deswegen benutzt worden, weil er sich irgendwie elementar davon überzeugt hatte, daß auf ihr der absolute Betrag der Funktion $\varphi(z)$ in der Tat im Punkte 1 und nur in diesem Punkte sein Maximum erreicht. Wesentlich ist nur, daß die Kurve, die man benutzt, in diesem Punkte die an-

[1]) Habilitationsschrift von 1854 = Werke 2. Aufl., p. 261.
[2]) Paris C. R. 38, 1854, p. 1033 = œuvres (1) 12, p. 164.

gegebenen Winkel mit dem Radiusvektor einschließt. Denn dann kann man wie im vorigen Fall verfahren; man muß nur beachten, daß in der Entwicklung (5) jetzt das Glied mit t^2 fehlt und das Glied mit t^3 den Hauptbeitrag liefert. Will man etwa die Richtigkeit des von Cauchy für die Auflösung der Keplerschen Gleichung[1]) gegebenen Resultats bestätigen, so hat man folgende Rechnung auszuführen. Die Entwicklungskoeffizienten sind hier dargestellt durch:

$$24)\quad A_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nu - n\sin u)\,du = -\frac{i}{n\pi}\int\left[z\exp\left(-\frac{z-z^{-1}}{2}\right)\right]^n \frac{dz}{z};$$

setzt man

$$25)\quad z = 1 + \lambda t,$$

wo λ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, so erhält man durch eine kurze Rechnung:

$$26)\quad \varphi(z) = 1 - \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots;$$

und hat nun in Bezug auf t von $-\infty$ bis 0 mit dem einen und von 0 bis $+\infty$ mit dem anderen Wert dieser dritten Einheitswurzel zu integrieren. Das gibt

$$27)\quad A_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{nt^3}{6}\right) dt$$

oder wenn man durch

$$28)\quad t = \sqrt[3]{\frac{6v}{n}}$$

eine neue Integrationsvariable einführt:

[1]) Für eine parabolische Bahn verliert die Keplersche Gleichung ihre Bedeutung, indem man bei dieser nicht mehr von exzentrischer Anomalie reden kann. Aber einerseits macht Cauchy darauf aufmerksam, daß dieselbe Gleichung auch bei einem Problem der homalographischen Kartenprojektion auftritt; andererseits deutet er an, daß dasselbe Verfahren auch dann zum Ziele führe, wenn die Exzentrizität wenig kleiner als 1 ist. In der Tat erkennt man, daß die erste Annäherung hier nicht geändert wird, wenn man für ε den unter (30) angegebenen Wert einführt.

29) $$A^n \sim \frac{\sqrt[3]{6}}{\pi \sqrt[3]{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt[3]{n^4}}$$

wie Cauchy angibt[1]) und auch Herr Debye[2]) gefunden hat.

Nachtrag[3]).

Will man dieses Verfahren auf eine Funktion anwenden, die nicht mehr eine ganze Funktion von $\cos u$ und $\sin u$ ist, so tritt eine neue Schwierigkeit insofern auf, als im Nenner nicht mehr ein einzelnes Glied als alle übrigen überwiegend angesehen werden kann. Das dann einzuschlagende Verfahren möge wieder an dem Beispiel der Mittelpunktsgleichung erläutert werden. Wird

30) $$\varepsilon = 1 - \frac{\eta}{n} \qquad \left(\text{also } \sqrt{1-\varepsilon^2} \sim \sqrt{\frac{2\eta}{n}}\right)$$

gesetzt, so ergibt sich zunächst:

31) $$\frac{1}{f'(z)} \sim -\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \cdots + \frac{\eta}{n} + \cdots.$$

Hier sind nun die überwiegenden Glieder nach den in der Theorie der singulären Punkte algebraischer Kurven ausgebildeten Methoden zu bestimmen: im vorliegenden Falle sind es die beiden angeschriebenen[4]). Das gibt:

32) $$C_n \sim \frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{2\eta}{n^3}} \int_{\frac{\eta}{n} - \frac{1}{2}\lambda^2 t^2}^{\infty} \exp\left(-\frac{n t^3}{6}\right) \lambda \, dt,$$

[1]) Oeuvrer (1) 12, p. 164. [2]) Math. Ann. 67, p. 557.

[3]) Dieser Nachtrag ist erst nach Vorlage der Note beigefügt worden.

[4]) Will man sich nicht mit der ersten Annäherung begnügen, so hat man zunächst den Nenner mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes aus der Theorie der analytischen Funktionen zweier Variablen (hier t und $\frac{1}{n}$) in der Weise umzuformen, daß eine rationale ganze Funktion von t abgetrennt wird. Ist der Mangel dieses Satzes der Grund gewesen, weshalb Cauchy seinen Ansatz nicht weiter verfolgt hat?

wobei auf demselben Wege wie vorhin zu integrieren ist und dem Nullpunkt nicht ausgewichen zu werden braucht. Bei der Zusammenfügung der beiden Teile des Integrals heben sich die reellen Bestandteile weg und es bleiben nur die imaginären übrig. Die Substitution

33) $$t = \frac{w}{\lambda}\sqrt{\frac{2\eta}{n}}$$

liefert:

34) $$C_n \# \sim -2\,\Re\,\frac{2i}{n\pi}\int \frac{\exp\left(-\frac{w^3}{6}\sqrt{\frac{8\eta^3}{n}}\right)dw}{1-w^2}$$

und da in erster Annäherung die Exponentialfunktion durch 1 ersetzt, in Bezug auf w die Integration von 0 bis ∞ erstreckt werden darf, schließlich:

35) $$C_n \sim -2\,\Re\,\frac{i}{n\pi}\left[\log\frac{1+w}{1-w}\right]_0^{\lambda x} \sim \frac{2}{n}.$$

Das Verhalten der Plastosomen in der Spermatogenese von Hirudo medicinalis und Aulastomum vorax.

Von **Hermann Schlechtinger.**

Mit 2 Taf.

Vorgelegt von S. Mollier in der Sitzung am 7. Februar 1914.

Einleitung.

Die Angaben in der Literatur über die Spermatogenese bei Hirudineen speziell bei Hirudo medicinalis und dem ihm nahe verwandten Aulastomum vorax sind äußerst spärlich. Brumpt (1900) hat einige Bemerkungen über den Bau der im Hoden von Hirudineen vorkommenden Zellen gemacht und Leuckart-Brandes (1901) hat die Spermatogenese dieser Tiergattung in seinen „Parasiten des Menschen“ nur in großen Zügen dargestellt. Bei keinem Forscher fanden sich nähere Ausführungen über die Entwicklung und Umgestaltung der einzelnen Zellelemente in der Spermatogenese. Retzius (1904) beschreibt reife Spermien von Würmern; er geht aber nur auf die Polychäten ein, weil diese, wie er sagt, ursprünglichere Formen aufweisen als die Spermien der Oligochäten, Hirudineen und Bryozoen. Um daher einen Einblick in den Bau des Spermiums von Hirudo und Aulastomum zu gewinnen, war eine genauere spermatogenetische Untersuchung der Hoden dieser Tiere nötig und zwar achtete ich im besonderen auf das Verhalten der Plastosomen bei der Samenentwicklung. Die hierbei erhobenen Befunde sollen nun im folgenden mitgeteilt werden.

Untersuchungsmaterial und Technik.

Als Untersuchungsmaterial dienten mir zweierlei Arten von Hirudineen, nämlich: Hirudo medicinalis und Aulastomum vorax. Die erste Art wurde von einer hiesigen Blutegelhandlung bezogen, die die Tiere aus einer der großen ungarischen Zuchten geschickt bekam. Aulastomum vorax dagegen stammt aus der Umgegend Münchens. Diese Tiere wurden meistens frisch zur Untersuchung eingefangen. Beide Arten wurden aber auch in kleinen Aquarien gehalten, wobei sie, um etwaige Hungereinflüsse auszuschalten, reichlich gefüttert wurden: Hirudo erhielt lebende Frösche zum Blutsaugen, Aulastomum nährte sich von Regenwürmern. Hirudo wurde zu jeder Jahreszeit fixiert, Aulastomum hauptsächlich im Frühjahr und Beginn des Sommers, also zur Zeit seiner geschlechtlichen Reife. Die Hoden wurden den lebenden Tieren entnommen und sofort in die Fixierungsflüssigkeiten eingelegt.

Als Fixierungsflüssigkeiten wurden verwendet:

1. Formol 1:10;
2. Zenker-Formol (ohne Eisessig) 1000:5;
3. Regaudsche Fixationen:

R. 5.	Kal. bichromat.	3%	80,0
	Formol		20,0
R. 4.	Formol	10%	
	(1—5 Tage)		
Beizung in	Kal. bichromat.	3%	
	(3—4 Wochen)		
R. 1.	Kal. bichromat.	3%	100
	kristall. Eisessig		5,0
	Formol		20,0
	(2—3 Tage)		
Beizung in	Kal. bichromat.	3%	
	(1 Woche);		

4. Fixation nach Golgi: Arsenige Säure 30%
   Formol 20% 30%
   Alkohol 96% 30%

5. Fixation nach Benda;
6. Fixation nach Hermann: Platinchlorid, Osmium-S. und Eisessig;
7. Fixation nach Szüts: (1912);
8. Fixation in 10%igem Formol auf 60° erhitzt, dann 24 Stunden darin belassen bei Zimmertemperatur und weiter behandelt nach der Bendaschen Methode.

Die Objekte wurden dann in üblicher Weise weiterbehandelt und möglichst vorsichtig und schonend durch Zwischenschalten von Äther-Chloroform, Chloroform und Chloroform-Paraffin in Paraffin eingebettet. Die Schnittdicke betrug 2—5 μ. Es wurden Einzelschnitte und kleine Serien von 6 Schnitten angefertigt.

Außerdem fixierte ich im weiteren Verlauf meiner Untersuchungen, um eine möglichst rasche und intensive Durchdringung der Hodenzellen mit der Fixationsflüssigkeit herbeizuführen, in der Art, daß ich die Hodensäckchen in der Fixierungsflüssigkeit mit einer Nadel zerriß, so daß ihr Inhalt nun frei in der Flüssigkeit schwamm. Durch Zentrifugieren und vorsichtiges Abschütten der Flüssigkeiten vom Sediment brachte ich die Präparate bis zum Paraffin.

Schließlich habe ich auch noch die Samenblasen der Tiere im ganzen fixiert und habe auch Ausstrichpräparate von ihnen gemacht zum Studium der reifen Spermien.

Beim Gebrauch der verschiedenen Fixierungsflüssigkeiten ließen sich folgende Beobachtungen und Erfahrungen gewinnen:

Ein außerordentlich gutes Präparat erhielt ich durch die einfache Fixation mit 10%igem Formol, ohne jede Beizung mit Chromsalzen, und es bestätigt die auch von B. Romeis bei Askarisspermien gemachte Beobachtung, daß zur Darstellung der Plastosomen wenigstens in der Samenzelle eine Beizung mit Chromsalzen, wie Regaud annimmt, nicht unbedingt erforderlich ist.

Als wenig geeignet für unser Objekt erwies sich die Golgische, oben näher angegebene Fixierungsflüssigkeit; es war damit nicht ein einziges brauchbares Präparat zu erhalten.

Sehr gute Resultate ergaben die Anwendung von Zenker-Formol und die verschiedenen Regaudschen Methoden. Ich zog diese Fixationen der Bendaschen im allgemeinen vor, da sie gleichmäßiger fixierten, während ich bei der Osmierungsmethode Bendas oft eine nicht zureichende Durchdringung des Präparates mit der Fixationsflüssigkeit (wohl infolge des starken Eiweißgehaltes der Hoden) und andererseits eine nicht unbeträchtliche Schrumpfung der Stücke beobachten konnte.

Für die Fixation der Ausstrichpräparate verwandte ich außer den eben angegebenen Fixierungen noch die von Retzius mitgeteilte Fixierung in Osmiumdämpfen und eine ähnliche von Dingler (1910) veröffentlichte Methode der Fixation mit Osmiumdämpfen.

Gefärbt wurde bei den Fixationen, die lediglich auf die Darstellung der Plastosomen hinzielten, mit Regaudschem Eisenhämatoxylin und der Bendaschen Mitochondrienfärbung, mit Kristallviolett. Die klarsten und übersichtlichsten Bilder ergab die Regaudsche Eisenhämatoxylinfärbung. Die Bendasche Methode führte ebenso zum Ziele und gab mit Kristallviolett gefärbt Bilder, die mit den Eisenhämatoxylinpräparaten durchaus übereinstimmten.

Die von Szüts (1912) angegebene Modifikation der Benda-Kristallviolettfärbung wurde auch versucht und lieferte brauchbare Bilder, ohne jedoch einen wesentlichen Vorteil vor der ursprünglichen Methode vorauszuhaben.

Gänzlich versagte beim vorliegenden Objekt die Schulzesche Stückfärbung, die sich selbst bei einer Schnittdicke von 2 μ noch als zu unscharf und diffus gefärbt erwies, als daß man Einzelheiten hätte deutlich unterscheiden können.

Da sich nach den Angaben von Laguesse (1912) mit Janusgrün eine vitale Färbung der Plastosomen erzielen läßt, wurde auch dies versucht. Es stellte sich aber heraus, daß die Farbe nur wenig angriff und die Plastosomen nicht deutlicher hervortraten, als man sie schon ohne Färbung an frischen Präparaten beobachten konnte.

Bei dem Studium des reifen Samenfadens färbte ich die Ausstrichpräparate außer nach den oben aufgezählten Färbmethoden noch nach der von Retzius angegebenen Art mit Rosanilin und erzielte nach Überwindung einiger Schwierigkeiten gute, mit den anderen Präparaten übereinstimmende Bilder.

Schließlich wurden noch zur vergleichenden Feststellung der Kernstrukturen Sublimatfixationen gemacht (gewöhnliches Sublimat und das Lenhosseksche Gemisch), die mit Ehrlich-Biondi gefärbt außerordentlich klare Bilder ergaben. Auch das Ehrlichsche Hämatoxylin wurde zur Kernfärbung oft mit bestem Erfolge angewandt.

Zur Vervollständigung der Beobachtungen wurden dann noch Kochsalzmazerationen von Spermien angefertigt und zur Feststellung des Fett- und Glykogengehaltes der Zentralkugeln wurden auch in dieser Hinsicht Präparate nach den von Best angegebenen Methoden und Osmiumschwärzung und Sudanfärbung verfertigt.

Untersuchungen.

Brandes (Leuckart-Brandes 1901) schreibt: „Wählt man ganz junge Blutegel zur Untersuchung, so findet man in der Hodenflüssigkeit einzelne größere Zellen, die wir als Spermamutterzellen aufzufassen haben und deren Abstammung vom Cölomepithel wir in einem späteren Kapitel verfolgen werden.“ Da ich leider keine ganz kleinen Tiere zur Untersuchung bekommen konnte, war es mir nicht möglich, einen derartigen Befund zu erheben, vielmehr habe ich als die jüngsten Zellen immer schon Gruppen von fünf bis sechs Zellen angetroffen, die bereits einen deutlichen syncytialen Charakter trugen. Es sind dies also Stadien, die bereits ein bis zwei Teilungen von der Mutterzelle entfernt sind.

Ein solches junges Entwicklungsstadium stellt Fig. 1 dar. Wir sehen Zellen mit einem großen Kern und nicht eben sehr reichlichem Protoplasma. Der Kern ist bläschenförmig, oft etwas oval, mit einer feinen, gut sichtbaren Kernmembran

umgeben; sein Inneres ist sehr hell und das Chromatin ist mit der hier angewandten Regaudschen Eisenhämatoxylinfärbung infolge der vorangegangenen Beizung mit Chromsalzen überhaupt nicht mitgefärbt. Mit Ehrlichschem Hämatoxylin färbt es sich blaßviolett und man sieht es in Form von kleinen, gleichmäßig verteilten Körnchen innerhalb der Kernmembran liegen. Dagegen ist mit allen Methoden der relativ große Nukleolus leicht darzustellen. Im allgemeinen ist in jedem Kern nur einer vorhanden. Ich habe aber hie und da auch zwei wahrgenommen. Seine Lage im Kern ist ganz verschieden, in der Mitte oder mehr am Rande. Er stellt ein kleines, meist rundliches, schwarz gefärbtes Bläschen dar.

Das Protoplasma der Zelle ist oft in seiner Grundsubstanz etwas dunkler gefärbt als das Kernplasma; eine feine Zellmembran schließt die Zellen nach außen ab, und man sieht in der Abbildung deutlich, wie die Membran einer Zelle in die der anderen übergeht, im Innern fehlt, und die Zellen so ein Syncytium bilden. Die Plastosomen finden sich nicht sehr zahlreich vor, doch sind sie wohl charakterisiert. Ihre Verteilung in den Zellen ist noch regellos, ohne ein deutlich erkennbares Prinzip. Sie sind bei Regaud-Präparaten schwarz gefärbt und haben die Form von kleinen, geschwungenen Fäden. Oft überkreuzen sich diese Plastokonten und können so den Eindruck eines korbartigen Geflechtes hervorrufen. Bei genauer Untersuchung läßt sich aber feststellen, daß sie miteinander nicht in Verbindung treten und von einem etwa fädigen Netzwerk habe ich mich nie überzeugen können.

In Fig. 2 ist nun eine Zellgruppe von der Größe und dem Typus der eben beschriebenen Spermatogonien in der Teilung dargestellt. Nukleolus und Kernmembran sind verschwunden; das Chromatin ist jetzt der weitaus am stärksten färbbare Bestandteil der Zelle geworden, und bleibt auch noch lange schwarz gefärbt, wenn man die Plastosomen durch weitergehende Differenzierung schon entfärbt hat. Zufällig liegt die Schnittebene in diesem Präparat so, daß die beiden Polkörper mit den Spindelfäden nicht sichtbar geworden sind, denn ich

habe dieses Präparat mehr der Plastosomen wegen abgebildet, auf deren Verhalten es mir besonders ankam. Die Teilung ist aus dem Stadium der beginnenden Metaphase, die Chromosomen haben eben die beiden noch ganz dicht nebeneinanderliegenden Tochterplatten gebildet. Die Plastosomen haben ihre Gestalt und Lage wesentlich geändert. Sie sind kleiner geworden und haben sich zu ganz kurzen Stäbchen und Körnern umgebildet. Das Gebiet der Spindelfäden ist frei von ihnen. Und je mehr die beiden Polkörper auseinanderrücken, um so mehr verdrängt die Strahlung mit ihren Spindelfäden die Plastosomen, so daß diese schließlich, wie aus Fig. 2 zu sehen ist, sich in zwei kleinen Halbmonden um die beiden Spitzenenden der Äquatorialplatte gruppieren. Dieser Befund stimmt nun mit den von Depdolla (1906) am Hoden des Regenwurms gemachten Beobachtungen überein, und ich kann die Vermutungen, die er über das Verhalten der mit der Mitochondrien beim weiteren Verlauf der Mitose ausgesprochen hat, mit meinen Beobachtungen bei Hirudo und Aulastomum bestätigen.

Wenn wir auch in Fig. 3 eine Gruppe von Spermatogonien vor uns haben, die vielleicht schon um eine Entwicklungsstufe weiter ist als die oben beschriebenen Zellen, so ist doch sicherlich der Teilungsvorgang im Prinzip bei ihr derselbe, und es ist daher erlaubt, sie in diesem Zusammenhang zu besprechen. Wir sehen in dieser Figur den syncytialen Charakter der Zellen noch deutlicher ausgeprägt wie auf Fig. 2 und zwar besonders deutlich dadurch, daß wir hier eine mittlere, allen Zellen gemeinsame protoplasmatische Masse vorfinden. Die Zellen stehen in der zweiten Hälfte der Mitose, die beiden Tochterplatten sind bereits auseinandergerückt und liegen in den äußeren Enden der etwas ausgezogenen Zellen. Die beiden in Fig. 2 dargestellten halbmondförmigen Gruppen von Plastosomen aber haben sich zu einer Straße vereinigt, die zwischen den Tochterplatten verläuft. Die Form der Plastosomen ist dieselbe geblieben; kleine Körnchen und ganze kurze Stäbchen. Diese Straße aber liegt genau an der Stelle, wo sich dann die beiden Zellen bis zu dem zentral gelegenen Protoplasma voneinander

abschnüren, so daß dadurch dann auch eine gleichmäßige Verteilung der Plastosomen auf die beiden Tochterzellen erreicht wird.

Da sich aber das Protoplasma dieser Zellen einer Gruppe nicht ganz durchteilt, sondern das zentral gelegene, allen Zellen gemeinsame Protoplasma die ihm angehörenden Zellen dauernd zu einer Entwicklungseinheit zusammenhält, liegen in ihm auch die Plastosomen schon auf diesen frühen Stadien anders gruppiert wie in den Samenbildungszellen selbst. Es hat nämlich schon hier — später drängt sich diese Anschauung noch viel intensiver auf — den Anschein, als sei die Zahl der Plastosomen größer als für den Aufbau der Zellen nötig ist. Man sieht nämlich, daß sich bei der Mitose die oben beschriebene Straße der Plastosomen in das die Zellen zusammenhaltende Protoplasma hinein fortpflanzt, daß die Plastosomen dort weitaus zahlreicher und regelloser durcheinanderliegen und besonders dicht angehäuft sind an der Stelle, wo sich die Spermatogonien gegen das Zentralprotoplasma mit einer leichten Abschnürung abzusondern beginnen. Dieses Zentralprotoplasma ist der Beginn der Bildung des Cytophors.

Da nun ohne eine kurze Betrachtung über die Entstehung des Cytophors eine weitere Beschreibung der Entwicklung der Plastosomen nicht gut möglich ist, soll diese hier eingeschoben werden.

Der Cytophor ist gerade bei niederen Tieren eine ziemlich häufige Erscheinung in der Spermatogenese. Wenn nun auch über seine Entstehung die Ansichten sehr weit auseinandergehen und sich widersprechen, so ist man sich doch darüber stets einig gewesen, daß der Cytophor als eine Nährzelle anzusehen ist, und somit der Rachis der Nematoden und der Versonschen Zelle der Insekten, schließlich auch den ernährenden Basalzellen, die bei Mollusken beobachtet wurden, funktionell gleichzusetzen ist. Beim Cytophor hat es sich bisher nun immer darum gehandelt, festzustellen, ob er durch zu Grunde gehende Zellen entsteht, also ursprünglich kernhaltig ist, oder ob er nur aus dem Protoplasma der ihm ansitzenden Samenzellen gebildet wird. Eine der letzten Beobachtungen, die dar-

über gemacht worden sind, sind die von Depdolla (1906) gelegentlich der Spermatogenese des Regenwurmes. Er hat gefunden, daß die jungen Spermatogonien sich um eine der außer den Samenzellen noch im Hoden vorhandenen, von ihm als interstitielle Zellen bezeichneten kleinen kernhaltigen Zellen in radiärer Anordnung gruppieren und mit diesen verschmelzen; allmählich zerfällt dann der Kern der zentralen Zelle und sie wird so zum Cytophor umgewandelt. Eine ähnliche Entstehungsweise des Cytophors geben Shinkishi-Hatai (1900) bei Limnodrilus Gotai und Vermiculus limosus und Jensen (1883) für Clitellio arenarius für Tubificiden an, sie sagen nämlich, daß die im Innern einer Spermatogoniengruppe gelegenen Spermatogonien zerfallen und so den später kernlosen Cytophor liefern. Dazu im Gegensatz stehen die von Bloomfield (1880) und Nasse (1882) erhobenen Befunde, daß der Cytophor bei Tubificiden nur aus Cytoplasma besteht, das von den Spermatogonien nach der Mitte hin abgegeben ist und von vornherein kernlos ist. Doch zweifelt Depdolla diese Befunde an und führt die falschen Resultate dieser Forscher auf die primitive von ihnen verwandte Zupfmethode zur Darstellung des Cytophors zurück. Bei Cephalopoden hat Thesing (1904) die Beobachtung gemacht, daß dort, wie er sich ausdrückt, in einem Kampf ums Dasein Spermatogonien zerfallen und von anderen Spermatogonien als Nährzellen benutzt werden und so einen sekundären Cytophor bilden.

Man sieht aus diesem kurzen Referat einiger Untersuchungen über die Entstehung des Cytophors, daß unter diesem Namen eine Reihe ganz verschieden entstandener Gebilde zusammengefaßt werden, und zwar wohl vor allem infolge der großen Verschiedenartigkeit der Tierarten im allgemeinen, bei denen ein Cytophor beobachtet wurde. Nur darin sind alle Autoren einig, daß er den Zweck einer Nährzelle hat.

Was den Cytophor bei Hirudo und Aulastomum anlangt, so stellt Leuckart-Brandes (1901) lediglich fest, daß die späteren Entwicklungsstadien der Samenbildungszellen einer hellen Zentralkugel von protoplasmatischer Beschaffenheit an-

sitzen; über die Entstehung dieser Zentralkugel äußert er sich nicht. Brumpt (1900) wagt nicht zu entscheiden, ob die Zentralkugel aus einer zu Grunde gegangenen Zelle oder aus von Zellen ausgeschiedenem Protoplasma hervorgegangen ist; andere Beobachtungen konnte ich in der Literatur über die von mir untersuchten Tiere nicht finden.

Ich habe nun meine Serienschnitte genau durchgemustert, habe begonnen bei einzelnen Zellgruppen, wo von einem Cytophor noch gar nichts zu sehen war und sie durch die Serie hindurch verfolgt, habe dann etwas weiter entwickelte Stadien zum Beispiel von dem oben beschriebenen Typus, bis zu Stadien mit wohl entwickeltem Cytophor sorgfältig Schritt für Schritt verfolgt, so daß mir kein etwa im Innern der Kugel liegender Zellkern oder dessen Reste entgehen konnten. Ich habe sowohl Präparate mit spezifischer Kernfärbung (Ehrlichsches Hämatoxylin und Ehrlich-Biondische Mischung) wie auch mit Regaudschem Eisenhämotoxylin und Kristallviolett gefärbter Präparate auf diese Weise untersucht. Bei Hirudo und Aulastomum wurde nie ein Kern oder ein Kernrest im Cytophor angetroffen. Wie aber wird nun der Cytophor von den jungen Samenzellen allmählich gebildet?

Die allgemeine Erklärung findet man sehr einfach durch den Vergleich der Größe des Cytophors in den verschiedenen Entwicklungsstufen der Spermatogenese mit der Größe der Samenzellen. Und da hat Leuckart-Brandes festgestellt, daß die Größe der Zellen zur Größe des Cytophors im umgekehrten Verhältnis steht, d. i. in demselben Maße, wie die Zellen an Größe verlieren, wächst der Cytophor oder die Zellen geben von ihrem Protoplasma an den Cytophor ab und bilden ihn so. Es findet also ein ständiger, langsam sich abspielender Prozeß statt, der das Protoplasma der Samenzellen vermindert und nach einer zentralen, für die Samenentwicklung sich zum Schluß als indifferent erweisende Masse eben dem Cytophor transportiert. Diese Auffassung der Entstehung wurde nun noch dadurch wesentlich gestützt, als ich sah, daß nicht nur das Protoplasma in den Cytophor hineinwandert, sondern mit

ihm auch ein großer Teil der in ihr liegenden Plastosomen, und als ich feststellen konnte, daß eben diese Plastosomen im Cytophor angelangt alsbald ihre regelmäßige Form von kleinen, kurzen Stäben aufgaben und begannen, zu unregelmäßigen Körnern zu zerfallen, die dann wieder zu größeren Brocken zusammenbacken und so mannigfache degenerative Formen annehmen, wie sich aus allen Bildern, bei denen ich den Cytophor mitgezeichnet habe, ersehen läßt. Und gerade dieser letzte Punkt, daß ich im Cytophor immer nur degenerative Formen der Plastosomen gesehen habe und die wohlausgebildeten Plastosomen sich immer in der Samenzelle fanden, ist mir als ein wesentlicher Grund erschienen, die Behauptung, daß das Protoplasma von den Samenzellen nach der Mitte hin ausgeschieden wird, zu befestigen.

Außer dieser erörterten fortwährenden Protoplasmaabgabe der Samenzellen kommt aber nun noch ein zweiter Faktor in Betracht, der wesentlich und zwar besonders im Sinne eines formbestimmenden Einflusses für den Cytophor ist. Das ist die Mitose der Samenzellen. Brumpt (1900) hat nun schon im allgemeinen als ein wichtiges Charakteristikum einer Zellgruppe festgestellt, daß alle Zellen einer Gruppe sich gleichzeitig teilen. Als zweites kommt aber noch die Art hinzu, wie sich die Mitosen zur Zentralkugel einstellen, und da eine genauere Untersuchung der Samenzellen bei der Mitose von Hirudo und Aulastomum noch nicht vorliegt, so konnte dieser, wie ich glaube, wesentlich zum Verständnis der Entstehung des Cytophors beitragende Vorgang auch noch nicht dargestellt werden. Es ist nämlich aus Fig. 3 deutlich zu ersehen, daß die Querachsen der Mitosen in einem ganz bestimmten Sinne angeordnet sind und zwar so, daß sie einen Stern bilden, dessen Mitte der Mittelpunkt des zu bildenden Cytophors ist. Nun teilen sich die Zellen in diesem Sinne durch, aber, wie schon oben beschrieben, nicht vollkommen zu selbständig nebeneinanderliegenden Tochterzellen, sondern sie schnüren sich nur in ihrem peripheren Teil voneinander ab. So wird durch diese beiden Momente: Die Gleichzeitigkeit der Teilung bei einer

Gruppe und die strahlenförmige Achsenanordnung der Mitosen bei nicht vollständiger Durchteilung ein kugelförmiges Zentrum geschaffen, dem alle Zellen in der gleichen Weise ansitzen. Schließlich kommt noch hinzu, daß die Samenbildungszellen frei in der Hodenflüssigkeit umherschwimmen, also von irgendwelchen sie umgebenden Geweben zunächst kein sie in ihrer Form irgendwie beeinflussender Druck ausgeübt werden kann, so daß die Kugel auch als einfachste und zweckmäßigste physikalische Form bedingt ist. Erst bei späteren Entwicklungsstadien, möchte ich hier der Vollständigkeit halber gleich erwähnen, wenn sich die schon langen Schwänze der Samenfäden schopfartig zusammenlegen, habe ich oft eine wohl dadurch entstandene ovale Form des Cytophors wahrgenommen, oder ich habe gesehen, daß ein Hodensäckchen im Stadium der Reife derart angefüllt war, daß sich die einzelnen Cytophore gegeneinander bienenwabenförmig abplatteten.

Zum Schlusse dieser Darstellung, der Entstehung und Art des Cytophors, möchte ich nun noch die Frage aufwerfen, ob man bei Hirudo und Aulastomum den Cytophor wirklich als eine Nährzelle aufzufassen hat, wie es alle anderen Beobachter bei anderen Tiergruppen und auch bei Würmern nach ihrem Befunde getan haben. Bei allen Cytophoren, die aus zu Grunde gegangenen Zellen entstanden sind, sei es nun eine Spermatogonie oder eine interstitielle Zelle, ist ja diese Erklärung die nächstliegende und gegebene. Im vorliegenden Falle haben wir aber gesehen, daß die Spermatogonien selbst erst den Cytophor gebildet haben, indem sie Protoplasma dauernd abgeben, und daß der Cytophor immer mehr wächst, je kleiner die Zellen werden. Es erscheint zum mindesten nicht unwahrscheinlich, daß sich die Samenzellen der Substanz als Nahrung bedienen, deren sie sich erst entledigt haben. Außerdem kommt hinzu, daß ja der ganze Hoden von einer eiweißartigen Flüssigkeit angefüllt ist, in der die Samenzellen schwimmen. Wäre es unter diesen Umständen nicht näherliegend, anzunehmen, daß diese die ernährende Flüssigkeit ist? Und endlich finden sich in dieser Flüssigkeit noch andere Zellen, die vielleicht als eine

Art interstitielle Zellen anzusehen sind (Fig. 38 stellt eine solche dar), bei denen ich sehr oft einen deutlichen Kernzerfall und daran sich anschließende Auflösung der ganzen Zelle wahrnehmen konnte, so daß dadurch die Nährflüssigkeit auch noch bereichert wird. Wenn wir nun noch in Betracht ziehen, daß das Protoplasma des Cytophors, wie schon erwähnt wurde, immer Degenerationserscheinungen zeigt, was zunächst an der Form der Plastosomen zu sehen ist, später aber durch größere Fettvakuolen noch deutlicher wird, so kommt es mir viel näher liegend vor, den Cytophor bei meinen Untersuchungsobjekten als einen Stapelplatz der Abbauprodukte der bei der Samenentwicklung aufgebrauchten und überflüssig gewordenen Stoffe zu betrachten, als ihm die Funktion einer Nährzelle zuzuschreiben.

Wenn wir jetzt zur Beschreibung der Spermatogenese wieder zurückkehren, so begegnen wir in Fig. 5 a einem Stadium mit deutlich ausgebildeter Zentralkugel. Die Samenzellen sitzen mit schmalen protoplasmatischen Stielen dem Cytophor an. Ihre Form ist rundlich, der Kern ist groß und hell, mit deutlich tingiertem Nukleolus. Im Protoplasma sehen wir wieder die Plastosomen. Ihre Form weist keine wesentliche Veränderung auf. Die Verteilung ist aber insofern bemerkenswert, als man deutlich wahrnehmen kann, daß sie am dichtesten an der Stelle angehäuft sind, wo sich die Zelle verjüngt und mit ihrem engen Stiele dem Cytophor ansitzt. Der Stiel selbst ist auch von ihnen angefüllt und im Cytophor liegen sie dann regellos, hier mehr in seinem peripheren Teile, durcheinander. An den im Cytophor gelegenen Plastosomen kann man, was oben schon erwähnt wurde, bereits gewisse Degenerationserscheinungen beobachten; die Plastosomen haben die Tendenz aufzuquellen, sie backen zu größeren Haufen und Kugeln zusammen, ihre Form wird plumper und unregelmäßiger. Während die Zahl der Plastosomen im Cytophor und in dem ihm zunächst gelegenen Abschnitt der Samenzelle in diesem Entwicklungsstadium sehr groß ist, bleibt die Menge und Form der Plastosomen in der oberen um den Kern der Zelle ge-

legenen Protoplasmaschicht ziemlich konstant und erfährt erst nach den Reifungsteilungen größere Veränderungen. Fig. 5 b zeigt Zellen von dem gleichen Charakter wie Fig. 5 a, nur ist der Cytophor hier in seinem größten Durchmesser skizziert worden.

Spermatocyten und Spermien.

Ich habe mich lange bemüht, irgend ein Charakteristikum einer Reifungsteilung zu entdecken, um so mit Sicherheit Spermatocyten erster und zweiter Ordnung festzustellen, es ist mir aber infolge der Kleinheit der Zellen und damit entstehenden Unmöglichkeit die Chromosomen zu zählen, nicht geglückt. Es blieb mir daher nichts anderes übrig, als wie Depdolla vorzugehen; er schreibt: „Bei der letzten Teilung der Samenzellen liegt das Chromatin in stark gefärbten Chromosomen so dicht zusammen, daß eine Unterscheidung seiner Komponenten mir nicht möglich war, ich definiere die betreffenden Mitosen, die ich in Fig. 23 dargestellt habe, als die letzten, also die der Reifungsteilung nur, indem ich die Beschaffenheit des Cytophorplasmas, die Zahl und endlich die Größe der sich teilenden Zellen in Betracht ziehe.“ Ich kann höchstens noch als ein weiteres Charakteristikum die beginnende Umgestaltung der Plastosomen hinzufügen. So stelle ich fest, daß die in Fig. 5 c skizzierte Mitose die kleinste ist, die ich habe entdecken können und ich sie also für eine zweite Reifungsteilung halte und zwar für eine Mitose von Zellen, wie sie Fig. 5 a und b zeigen. Außerdem wurde die Größe des Cytophors an Serienschnitten verfolgt, so daß die beiden Bilder 5 b und 6 jeweils die größten Durchmesser ihrer Kugel darstellen. Eine Zählung der ansitzenden Zellen ergibt nun, daß Fig. 6 nahezu genau die doppelte Anzahl Zellen aufweist wie Fig. 5, also eine Mitose zwischen ihnen liegen muß, so daß Fig. 6 bereits junge Spermatiden darstellt. Auch das Verhalten der Plastosomen in den Fig. 7, 8 und 9 weist darauf hin, daß dieses Stadium bereits hinter der zweiten Reifungsteilung liegt. Auf diesen Bildern sehen wir, wie Plastosomen zusammenwandern und allmählich

verklumpen, so daß schließlich die Form des einzelnen Plastosoms überhaupt nicht mehr erkannt werden kann, sondern die Plastosomen jetzt eine einheitliche Kappe oder schalenförmige Masse darstellen, die dem rundlichen Kern aufsitzt. Bei den hier untersuchten Präparaten ist der Kern der hellste Teil der Zelle und durch einen kleinen Nukleolus unzweifelhaft als solcher charakterisiert. Im Cytophor finden wir eine große Menge der verschiedensten Degenerationsstadien von Plastosomen; wir sehen sie aber in keinem der Verbindungsstiele mehr, ein Zeichen, daß die Abgabe von Plastosomen nach der Mitte wohl aufgehört haben muß. Die Kappenform des Plastosomenapparates ist bei direktem Untersuchen des Präparates durch Drehen an der Mikrometerschraube weitaus leichter und sicherer festzustellen gewesen, als ich es in der Zeichnung durch den verschiedenen Sitz und die Dicke des schwarzen Ringes und eine teilweise Zudeckung des Kernes habe andeuten können. Wir haben es also hier mit der Bildung eines Plastosomenkörpers zu tun, wie er ähnlich nach der zweiten Reifungsteilung schon von Vejodwsky, ferner Duesberg, Meves u. a. beschrieben und von ersterem als Chondriom bezeichnet wurde.

Beim Studium der weiteren Umbildung dieses Körpers, seinen Beziehungen zu Kern und Centrosomen stieß ich nun bei Hirudo medicinalis auf die größten Schwierigkeiten; denn die Zellen nähern sich bei ihrer weiteren Entwicklung immer mehr der Fadenform, so daß die Beobachtung der in ihnen liegenden Bestandteile immer schwieriger wurde und eine sichere Entscheidung fast unmöglich zu sein schien. Ich untersuchte deshalb in der Hoffnung, vielleicht durch Vergleichung in meinen Beobachtungen zu sichereren Resultaten zu kommen, die Hoden von Aulastomum vorax zur Zeit ihrer geschlechtlichen Reife und fand die Samententwicklung dieses Tieres in allen Punkten mit Hirudo völlig übereinstimmend, so daß sie mir meine Befunde bei Hirudo bestätigten. Zugleich aber stellte sich heraus, daß die Zellen in ihrer ganzen Entwicklungsreihe ungefähr die doppelte Größe der entsprechenden

Samenzellen von Hirudo hatten und dieser Umstand ermöglichte es mir, an diesen Zellen mit Sicherheit alle weiteren Differenzierungsvorgänge des auswachsenden Spermiums zu studieren und dann wieder vergleichend dieselben Vorgänge auch bei Hirudo in viel kleinerem Maßstabe, aber in ganz der gleichen Weise zu sehen.

Die weiteren Zeichnungen stammen daher zum größten Teile von Aulastomum vorax und sind der größeren Deutlichkeit wegen linear noch um das Doppelte vergrößert worden. Den Cytophor habe ich von hier ab nicht mehr mitgezeichnet, da er immer dieselben Verhältnisse aufweist und sich ja unser Interesse wesentlich auf die weitere Umbildung der Zellen erstreckt.

Wir sehen also in Fig. 10 bereits die den letztbeschriebenen Stadien von Hirudo sehr rasch folgende nächste Entwicklungsstufe. Die Zelle hat noch ungefähr dieselbe Form und Größe beibehalten. Der Kern erscheint im ganzen hell und enthält noch einen deutlichen Nukleolus, der nur zufällig auf den beiden in Fig. 10 und 11 abgebildeten Schnitten nicht getroffen ist, während er auf Fig. 12 wieder dargestellt wurde. Das Chromatin färbt sich nach E. H. und bildet einzelne Brocken und Körner, das Zellprotoplasma ist von gleichmäßiger Beschaffenheit und umgibt den Kern in deutlich wahrnehmbarer, ziemlich breiter Zone. Die auffallendste Veränderung hat die aus den Plastosomen hervorgegangene Kappe durchgemacht. Sie hat sich in zwei dunkel gefärbte Kugeln geteilt. Von der größeren geht bereits ein blasser, kaum gefärbter feiner Schwanzfaden aus. Man sieht besonders an der kleineren Kugel, daß ihr Inneres heller ist als die umhüllende Schale. Außerdem zeigt sich aber an dem Ende, wo der Schwanzfaden die größere Plastosomenkugel verläßt, ein kleiner, von ihr deutlich abgegrenzter, mit dem Faden in Verbindung stehender, schwarzer Knopf, der sich durch Vergleichung mit den späteren Entwicklungsstadien als das distale Centrosom erweist, wobei ich proximal als den dem Cytophor am nächsten gelegenen Teil der Samenzelle distal das auswachsende Schwanzstück definiere.

Das proximale Centrosom bekommen wir auf diesem Bilde noch nicht zu sehen, da es noch im Innern der Plastosomenkugel verborgen durch ihre dunkle Farbe verdeckt wird. Unter Beibehaltung der Kugelform der Zelle bilden sich jetzt in rascher Folge die inneren Bestandteile der jungen Spermatide so um und gruppieren sich so, wie sie dann beim weiteren Auswachsen und der Streckung des Spermiums zu finden sind. Die eine Plastosomenkugel rückt gegen den Cytophor des Spermiums zu und aus der anderen sehen wir den Faden mit dem proximalen Centrosom hervortreten, auf Fig. 13 schon deutlich ein Stück von den Plastosomenhaufen entfernt. Wie weit nun der Verbindungsfaden der beiden Centrosomen mit dem nunmehr allein noch distal gelegenen Plastosomenhaufen in Berührung steht, durch ihn hindurchgeht oder ihm nur aufliegt, konnte ich nicht feststellen. Jedenfalls ist sicher, daß das distale Centrosom immer in unmittelbarer Nähe dieser Plastosomenkugel angetroffen wird. Die nächste Figur zeigt genau dieselben Verhältnisse, nur ist das proximale Centrosom noch weiter mit seinem feinen Faden nach dem Stielende der Zelle zugerückt. Hat es auf diesem Bilde den Anschein, als ob der Faden direkt durch den Kern hindurchginge, so ist das doch nur ein Aufliegen auf der äußeren Kernwand, wie ja auch aus dem etwas früheren Stadium von Fig. 13 hervorgeht und von mir bei vielen anderen Bildern direkt beobachtet wurde. Der feine kaum färbbare protoplasmatisch helle Schwanzfaden ist auf dieser Figur sehr bald aus der Schnittebene herausgetreten und deshab nur ein so kurzes Stück eingezeichnet worden.

Hat sich die Zelle nun soweit umgebildet, so beginnt die Streckung und allmähliche Ausbildung des Samenfadens. Fig. 15 zeigt ihren Anfang. Der ganze Zelleib hat eine längsovale Form angenommen. Der Kern ist dieser Veränderung noch nicht so rasch gefolgt; infolgedessen ist die ihn umhüllende Plasmazone weitaus schmäler geworden, und an den beiden Zellenden wird sie fast ganz von den zwei wie Kissen dem Kern aufsitzenden Plastosomenkörper eingenommen. Im Kern selbst macht sich eine Weiterentwicklung insofern bemerkbar,

als seine Färbbarkeit mit E. H. auf diesem Entwicklungsstadium sehr rasch zunimmt. Die Chromatinbrocken werden größer und verdichten sich rasch, so daß der Kern bereits auf der folgenden Figur den Eindruck einer im ganzen dunkel gefärbten Blase macht, deren Inneres noch etwas heller durch die dunkel gefärbte, aus einzelnen groben Chromatinbrocken bestehende Schale hindurchschimmert. Auf diesem Stadium der Chromatinverdichtung des Kernes wird nun von vielen Autoren (z. B. Depdolla) ein Abheben der Kernmembran dargestellt, so daß die dichte, schwarze Chromatinmasse noch von einer hellen, schmalen Außenzone umgeben ist, ehe die wieder dunkel gefärbte Kernmembran ihn im ganzen gegen das Zellplasma abgrenzt. Ich habe dieses Phänomen auf keinem meiner Präparate von Hirudo und Aulastomum auftreten sehen und habe eher im Gegenteil festzustellen, was auch aus meinen Abbildungen hervorgeht, daß sich das Chromatin bei seiner Verdichtung direkt der Kernmembran aufzulegen scheint, und im Innern noch eine Zeitlang eine hellere Zone freibleibt. Ein Abrücken des Chromatins vom Kernmembran würde jedenfalls bei Hirudo und Aulastomum auf die Rechnung einer durch die Fixierung hervorgerufenen Flüssigkeitsentziehung zu setzen sein.

Die folgenden Abbildungen schildern nun die allmähliche Ausziehung des Kernes zum Kopfstück des fertigen Spermiums und gleichzeitig die Umbildungen und Lage der beiden Plastosomenkörper und der Centrosome. Der dunkler gewordene Kern bleibt, wie wir aus Fig. 16 sehen, immer in unmittelbarer Nähe des distalen Plastosomenkörpers. Der ganze Zellleib wird gegen dieses Ende zu immer schlanker, so daß das Protoplasma der Zelle an diesem Ende immer spärlicher wird und Kern und Plastosomenkörper immer enger von der Zellwand umschlossen werden, bis sie schließlich ganz mit ihr zu verwachsen scheinen. Daß der Kern aber immer von einer, wenn auch noch so feinen protoplasmatischen Hülle umgeben ist, konnte ich bei einem nach Ehrlich-Biondi gefärbten Präparate dadurch feststellen, daß um den grün gefärbten, schon ziemlich lang ausgestreckten Kern ein feiner, deutlich rot ge-

färbter, protoplasmatischer Saum zu sehen war, der sich bis vor zum Plastosomenkörper (dieser war etwas dunkler rot gefärbt als das übrige Plasma) erstreckte. Die Form des Kernes geht von Fig. 15 bis Fig. 19 allmählich in eine eiförmige Gestalt und von dieser wiederum in noch länger ausgezogene, hie und da auf dem Schnitt mehr birnförmig erscheinende Form über. Dabei nimmt die Intensität der Färbbarkeit mit E. H. ständig zu und man kann wahrnehmen, wie sein distaler, bereits mehr länglicher Teil schon völlig homogen schwarz erscheint, während man in seinem anderen kolbigen Ende auf dem dunklen Grunde einzelne, noch dunkler gefärbte Chromatinschollen erkennen kann. In dem Maße, wie sich der Kern streckt nnd auszieht, läßt er aber in dem ihm entgegengesetzten proximalen Zellstück einen hellen, protoplasmatischen Teil zurück, indem sich nun die in ihm liegenden Zellstrukturen deutlich abheben und sichtbar werden. Man sieht vor allem den großen, kugeligen, proximalen Plastosomenkörper. Er ist auf Fig. 16 so dunkel gefärbt, daß er fast homogen schwarz erscheint. Aber schon im nächsten Bilde sieht man, daß er im Inneren einzelne große Brocken zu bilden beginnt, wenn er auch eine Zeitlang seine kugelige Form noch beibehält. Außerdem ist nun auf allen diesen Bildern (Fig. 16—23) das Verhalten der Centrosomen und des von ihnen ausgehenden Fadens mit größter Deutlichkeit zutage getreten. Man erkennt, wie das Centrosom allmählich immer mehr der proximalen Zellwand zuwandert, und sieht, wie es mit dem dicht dabei gelegenen Plastosomenkomplex in gar keine Beziehung tritt. In Fig. 18 ist das Centrosom lediglich durch den Plastosomenkörper verdeckt, aber nicht in ihm enthalten. Die Größe des Centrosoms bleibt immer dieselbe, es war stets als ein kleiner, tief schwarz gefärbter Punkt zu sehen. Ebenso dunkel ist der zarte Faden auf allen diesen Stadien gefärbt, den man vom proximalen Centrosom bis zum Kern hin verfolgen kann. Auf günstig getroffenen Schnitten machte es häufig den Eindruck, als wiche der Faden mit einem leichten Bogen dem stets nahe gelegenen Plastosomenkörper aus. Wie sich dieser Verbindungs-

faden der beiden Centrosome — denn als solcher ist er der Entwicklung nach anzusehen — dem Kern gegenüber verhält, ob er nur seiner Hülle aufliegt oder durch ihn hindurchgeht, habe ich nicht direkt gesehen, doch habe ich ja beobachtet, wie er in früheren Stadien um den Kern im Protoplasma der Zelle nach dem proximalen Centrosom im Bogen herumzieht, so daß ich glaube, daß er auch später nicht in den Kern eingedrungen ist, sondern der Kernmembran nur aufliegen kann. Außerdem ist von mir gesehen worden, daß an dem sich streckenden distalen Kernende wieder ein kurzes, feines, auf den Abbildungen nicht immer zur Darstellung gelangtes Verbindungsfädchen sowohl zwischen Kern und distalem Plastosomenkörper, als auch zwischen diesem und dem distalen Centrosom vorhanden waren. Was die distale Plastosomenmasse auf dem Stadium der beginnenden Streckung anlangt, so verändert sich diese wenig und hat immer eine einheitliche Beschaffenheit. Es ist ein deutliches Bläschen mit einer dunklen Hülle und einem helleren Inhalt. Ich habe dies auf den Figuren wiederum durch verschiedene Verteilung von Hell und Dunkel anzudeuten versucht. Außerdem ist aber an dem Bläschen deutlich der Einfluß des sich streckenden und nachdrängenden Kernes erkennbar; es paßt sich nämlich diesem mit der ihm zugewandten Fläche an und bildet sich so allmählich zu einer Spitzkugel um. An der Spitze aber können wir deutlich ein kleines, sich von ihr und dem hellen Schwanzfaden scharf abhebendes schwarzes Knöpfchen wahrnehmen: das distale Centrosom. Wir sehen ferner noch, daß sich der Kern rascher verjüngt, während das distale Plastosomenbläschen noch seine Form beibehält, nur im ganzen kleiner wird, so daß z. B. auf Fig. 21—25 der Kern an seinem Ende bereits fädig ausgezogen erscheint und dieser allmähliche Übergang in den Schwanzfaden plötzlich durch das knopfartig sich vorwölbende Plastosomenbläschen unterbrochen wird. Man kann nun schon auf diesen Stadien die Hauptelemente des fertigen Samenfadens unterscheiden, und so erblicken wir in dem reichlich mit Protoplasma umgebenen proximalen Teil der Zelle mit seinem Plastosomen-

körper, Centrosom und nach dem Schwanz zu führende Faden, das spätere Spitzenstück, in dem sich ausziehenden Kern den Kopf des Spermiums, in dem Bläschen mit dem distalen Centrosom das Mittelstück und schließlich in dem hellen Endfaden den Schwanz.

Verfolgen wir nun die Entwicklung dieser Teile an der Hand unserer Figuren weiter: so zeigt Fig. 24 und 25, daß sich der Kopf rasch weiter auszieht und schon zum größten Teile die Form eines schwarzen Stabes angenommen hat, nur in dem dem späteren Spitzenstück zugewandten Teil ist er noch kolbenartig verdickt. Am Centrosom und dem von ihm zum Kopf hinziehenden Faden sind keine Veränderungen vorgegangen. In einem wichtigen Umbildungsprozeß aber treffen wir den proximalen Plastosomenhaufen. Haben wir schon aus den früheren Stadien eine Umbildung seines Inhaltes zu Brocken wahrnehmen können, so ist auf Fig. 24 dieser Prozess so sehr fortgeschritten, daß wir gar nicht mehr von einer einheitlichen Plastosomenkugel sprechen können, sondern nur mehr einzelne gröbere, wohl noch miteinander im Zusammenhang stehende Brocken wahrnehmen; auf der folgenden Abbildung, die auf ganz derselben Entwicklungsstufe steht, sehen wir sogar schon zwei größere, deutlich getrennte Haufen. Außerdem zeigt sich bereits ein färberischer Unterschied insofern, als sich auch die einzelnen Brocken selbst nicht mehr so schwarz färben, sondern mit E. H. einen mehr bräunlichen Farbton annehmen. Verfolgen wir nun des besseren Zusammenhanges wegen die Entwicklung des Spitzenstückes allein weiter, so beobachten wir an den Figuren folgende Umbildungen: Die allgemeine Protoplasmamasse des Spitzenstückes bleibt noch ziemlich lange in ihrer nahezu nur gegen das Kopfende zugespitzten Kugelform bestehen, etwa bis auf dem in Fig. 28 abgebildeten Stadium. Der Auflösungsprozeß des Plastosomenhaufens macht immer größere Fortschritte. Wir sehen deutlich, wie seine Färbbarkeit abnimmt und seine Formen immer unbestimmter werden. Auf den Fig. 26—28 tritt hauptsächlich die schwächere Farbe in den Vordergrund, während der eigentliche Auflösungsprozeß nicht vor Fig. 29

deutlich und unzweifelhaft wird. Auf diesem Stadium, wo bereits auch das ganze Protoplasma des späteren Spitzenstücks sich in die Länge zu ziehen beginnt, erblicken wir nur noch zwei blasse, beträchtlich kleiner gewordene Komplexe zu beiden Seiten des Verbindungsfadens von Centrosom und Kopf. Auf den nächsten beiden Bildern sehen wir, wie auch sie dem Verfall entgegengehen und sich in kleine, unregelmäßig gruppierte Körperchen auflösen, bis auch diese noch auf Fig. 32, dem letzten Stadium vor dem fertigen Samenfaden, ganz verschwunden sind. Betrachten wir jetzt auch das im Spitzenstück gelegene Centrosom mit seinem Verbindungsfaden, den als Achsenfaden anzusprechen ich infolge analoger Angaben in der Literatur kein Bedenken trage, so finden wir ein ziemlich konstantes Verhalten. Das Centrosom findet sich immer an derselben Stelle, d. h. der proximalen Zellmembran ziemlich nahe. Es ist auf allen Stadien, ausgenommen dem allerletzten, immer gut sichtbar und von annähernd gleicher Größe und Färbbarkeit. Auf dem letzten Stadium vor dem fertigen Spermium (Fig. 32) verschwindet es in dem spitz ausgezogenen Ende, ohne mehr deutlich als Punkt wahrgenommen werden zu können. Auch der Achsenfaden tritt auf allen diesen Stadien deutlich sichtbar hervor. Er stellt immer eine Verbindung mit dem Kopfstück und Centrosom dar und unterscheidet sich vom Kopf noch eine ganze Zeit lang durch seinen viel kleineren Durchmesser. Erst auf dem letzten Stadium, wo auch der Kopf bereits fadenförmig ist, verwischen sich die Unterschiede etwas, doch kann man den Kopf auch da noch an seiner deutlich dunkleren Färbung leicht vom Achsenfaden abgrenzen. Verschiedentlich stieß ich bei der Durchsicht meiner Präparate auf Bilder, wie sie Fig. 27 und 28 darstellen. Der Achsenfaden zeigte da eine wohlausgebildete, wellenförmig geschlängelte Form. Da ich ihn aber keineswegs immer so vorfand, sondern oft auch ganz gerade verlaufend, so konnte ich mich nicht entschließen, diesem Phänomen eine besondere Bedeutung beizulegen, wollte aber doch nicht verfehlen, es auf meinen Abbildungen zum Ausdruck zu bringen. Dieser Befund erinnert

an eine Angabe von Meves (1903), den er bei Spermien von Paludina erhebt; er schreibt, daß er konstant eine Schlängelung des Kopfes und Mittelstückes habe beobachten können, sagt aber weiter: „es ist mir unklar geblieben, was diese Erscheinung zu bedeuten hat". Zum Schluß büßt auch der Achsenfaden seine Färbbarkeit zum größten Teil ein und ist nur gerade noch als ganz blasser, bis zur Spitze führender Faden zu sehen.

Betrachten wir jetzt den Kopf des Spermiums während dieser letzten Entwicklungsperiode, so findet sich hier die allmähliche, vom distalen Ende aus beginnende Streckung und Ausziehung desselben, bis er schließlich dem Schwanzfaden an Feinheit nichts mehr nachgibt und sich von ihm nur noch durch seine intensivere Färbbarkeit unterscheidet. Er ist auf allen Stadien gleichmäßig schwarz gefärbt und ragt immer ein Stück weit in das Protoplasma des Spitzenstückes hinein; anfänglich ist diese Partie noch deutlich kolbenartig verdickt, aber in dem Maße, als der Kopf an Länge im ganzen zunimmt, schwindet auch diese Verdickung, bis sie mit seinem völligen Auswachsen schließlich gar nicht mehr wahrnehmbar ist. Man sieht aber weiter noch auf den Figuren 26—28, daß sich das Protoplasma des Spitzenstücks ganz allmählich dem Kern immer mehr anschmiegt und schon dadurch der Eindruck hervorgerufen wird, daß das Kopfstück nicht nur aus Kernsubstanz besteht, sondern noch von einer, wenn auch ganz dünnen und auf dem Längsschnitt nicht wahrnehmbaren, protoplasmatischen Hülle bekleidet wird. Diese Annahme wurde nun bestätigt, als ich auf einem Präparate einen Querschnitt durch diese Region des Spermiums vorfand. Hier hebt sich der protoplasmatische Mantel deutlich von dem schwarzen Mittelpunkt, d. i. dem Kern ab (Fig. 37). Irgendwelche innere Strukturen habe ich sowohl auf dem Längs- wie auf dem Querschnitt bei der großen Feinheit und dunklen Farbe, die der Kopf alsbald annimmt nicht mehr wahrnehmen können.

Schließlich ist noch das dritte wichtige Stück eines fertigen Spermiums in seiner Entwicklung und endgültigen Form

zu besprechen: das Mittelstück. Wir erblicken zunächst auf Fig. 18—25 das Plastosomenbläschen mit dem ihm aufsitzenden distalen Centrosom etwas kleiner geworden, im übrigen aber ohne wesentliche Veränderung seiner charakteristischen Merkmale: Das zugespitzte Bläschen mit seiner dunklen Hülle, das sich gegenüber dem Spitzenende des Kopfstückes leicht abhebt und dadurch gut zu sehen ist.

Konnte ich alle die vorhergehenden Entwicklungsvorgänge an Präparaten von Aulastomum vorax studieren, so boten sich mir für diesen Teil nirgends durchaus klare und einwandfreie Bilder dar; und dies mochte wohl daher kommen, daß eben bei Aulastomum der ganze Samenfaden größer angelegt wird, so daß auf Schnittpräparaten, auf denen allein man diese Details mit wünschenswerter Klarheit zu Gesicht bekommt, der Kopf schon so weit ausgezogen war, daß er nur selten auch noch mit dem ansitzenden Mittelstück in eine Schnittebene fiel. So durchsuchte ich also darauf meine von Hirudo gemachten Präparate nochmals und fand an einem nach Benda mit Kristallviolett gefärbten Präparate die Ausdifferenzierung des Plastosomenbläschen zum Mittelstück in überraschend klarer und einleuchtender Weise. Diesem Präparate sind die beiden Fig. 35 und 36 entnommen. Ich habe sie der einfacheren Reproduktion wegen auch schwarzweiß gezeichnet. Man sieht auf ihnen im allgemeinen dieselben Verhältnisse, nur im ganzen etwas kleiner; denn auch diese beiden Figuren wurden linear noch um das Doppelte vergrößert. Wir sehen nun auf Fig. 35 an der Stelle, an der auf der vorangegangenen Entwicklungsstufe das Plastosomenbläschen dem Kopfende aufgesessen hatte, ein sich mit Kristallviolett intensiv färbendes längliches Gebilde mit zwei zugespitzten Enden und einem in der Mitte etwas dicker aufgequollenen Teil. Es ist dies ganz unzweifelhaft nach seiner topographischen Lage und Färbbarkeit das frühere Plastosomenbläschen, das inzwischen diese Form angenommen hat. Über den Verbleib des Centrosoms kann ich leider keine weiteren Mitteilungen machen, da es sich meiner Beobachtung durch seine große Kleinheit entzog; so weiß ich nicht, ob es sich

auch zu einem länglichen Gebilde auszieht, ähnlich wie das Plastosomenbläschen, oder dem distalen Ende dieses Teiles aufsitzt, jedenfalls steht so viel fest, daß es sich keineswegs allein zum Mittelstück umbildet, sicher aber in ihm enthalten ist, sondern daß vor allem das Plastosomenbläschen sich in seiner ganzen Größe zum Mittelstück ausbildet. Auf der nächsten Figur haben wir die weitere Streckung dieses Organs vor uns. Die färberischen Unterschiede sind wieder dieselben. Außer diesen hebt sich aber das Mittelstück noch durch eine wenn auch minimale Verbreiterung von Kopf und Schwanz ab, und zeigt damit an, daß es noch nicht ganz ausgewachsen ist, sondern sich bis zur völligen Reife des Samens noch weiter strecken wird.

Es bleibt nun noch übrig eine kurze Beschreibung des fertigen Samenfadens anzufügen. Schon auf dem letztgeschilderten Stadium sehen wir, wie sich die Samenfäden, die noch an der Zentralkugel haften zu Schöpfen aneinanderliegen. So bleiben sie auch in ihrem reifen Zustande zusammenliegen (welche Verhältnisse schon von Leuckart-Brandes genau so geschildert wurden und von mir nur bestätigt werden konnten) und wir treffen sie dann zu Paketen zusammengebacken in der Samenblase an. Fig. 33 stellt ein solches Paket aus der Samenblase von Aulastomum in einfacher Vergrößerung dar und Fig. 34 einen einzelnen Samenfaden in doppelter Vergrößerung. Wir sehen an dem Paket deutlich die verschiedenen Hauptabschnitte des Spermiums: das Spitzenstück, Kopfstück, Mittelstück und Schwanzstück. Über die Entwicklung des Schwanzstückes ist vielleicht noch vervollständigend nachzutragen, daß es während der ganzen Umbildung der übrigen Teile auch wächst, sich aber im übrigen immer wieder als derselbe blasse, protoplasmatische Faden ohne weiter erkennbare Strukturen präsentiert. So habe ich z. B. auf Fig. 27 einmal den Schwanz in seiner ganzen Ausdehnung mitgezeichnet. Es wurde auch versucht, mit Hilfe von Kochsalzmazerationen einen etwa vorhandenen fibrillären Aufbau des Schwanzfadens oder eine Isolierung des Achsenfadens von der übrigen Masse des

Schwanzes zur Darstellung zu bringen, doch gaben diese Methoden keinen weiteren Aufschluß über den Bau des Schwanzes. Die Größe des Mittelstückes, seine Abgrenzung gegen den Schwanz und Kopf hin habe ich durch verschiedene Färbungen mit Ehrlich-Biondi, E. H. und der von Retzius angegebenen Rosanilinfärbung nach Fixation in Osmiumdämpfen und durch vergleichende Messungen der gezeichneten Bilder sichergestellt. Es wurden dazu natürlich nur Ausstrichpräparate aus der Samenblase benutzt, um nicht durch Anschnitte getäuscht zu werden. Daraus ergab sich dann immer wieder das obige Bild. Außerdem vermischte ich, wie in Leuckart-Brandes angegeben ist, das Sekret der weiblichen Genitalien mit dem Inhalt der Samenblase und brachte so die Samenfäden dazu, ihre Paketform aufzugeben, fixierte dann und konnte dadurch die eineinzelnen reifen Spermien betrachten. Immer wieder zeigten sich dieselben Formen. Das ausgewachsene Spermium ist ein langer, gleichmäßig dünner Faden und seine einzelnen Abschnitte sind nur durch die verschiedene Färbbarkeit zur Darstellung gelangt. Zum Schluß sei noch eine merkwürdige Erscheinung erwähnt: Ich habe an den zusammengebackenen Spermabündeln immer wieder beobachten können (vgl. Fig. 33), daß sich sowohl die Abgrenzung der Kopfstücke gegen das Mittelstück hin wie auch dann die Grenze zwischen Mittelstück und Schwanz immer wieder durch eine etwas dunklere Färbung und leichte Aufquellung des ganzen Bündels an dieser Zone bemerkbar macht. Ich verzeichne diese Tatsache lediglich, ohne dafür eine hinreichende Erklärung gefunden zu haben. Bei der distalen dunkler gefärbten Stelle könnte man ja an das distale Centrosom als Ursache denken; für die proximale ist diese Deutung dagegen nicht möglich.

Allgemeiner Teil.

Der Kern.

Im nachfolgenden wurden die Vorgänge, die sich in der jungen Spermatogonie bis zur Entstehung der Spermatide im Kern abspielen, nicht berücksichtigt, da es infolge der Kleinheit des Objektes unmöglich war, genaue Befunde zu erheben. Dagegen wurde in allen mit Kernfärbung behandelten Präparaten genau darauf geachtet, ob sich für einen Chromatinaustritt aus dem Kerne bei dem vorliegenden Objekt irgendwelche Anhaltspunkte finden ließen. Die darauf hinzielenden Untersuchungen waren durchgehends negativ.

Zentralkörper.

Es scheint eine allgemeinere Erscheinung zu sein, daß die Zentralkörper in den früheren Stadien der Entwicklung, in den ruhenden Zellen schwer darstellbar sind und deshalb meist nicht zur Beobachtung kommen. So schreibt z. B. Meves (1907) in seiner Arbeit über die Spermatocytenteilung der Honigbiene: „Die Centriolen, welche ich in den ruhenden Spermatogonien nicht habe auffinden können, werden bald nach Beginn der Wachstumsperiode nachweisbar."

So gelang es auch hier erst die Schicksale der Centrosomen nach abgelaufenen Reifungsteilungen fortlaufend zu beobachten und zwar ermöglichte besonders das Auftreten des Achsenfadens und die Verbindung, die die Centrosome mit ihm eingehen, ihre sichere Identifizierung. Dieses Verhalten der Centrosome ist eines der wenigen Merkmale, die allen Studien über Samenentwicklung bei den verschiedensten Tiergattungen gemeinsam sind. Sieht man aber weiter nach, wie sich die Centrosome mit dem Achsenfaden zu den anderen Bestandteilen des reifenden Samens (Kern, Nebenkern, Sphäre, Spitzenstück) verhalten, so begegnen wir schon innerhalb nahe verwandter Tierklassen großen Verschiedenheiten und wie ich festgestellt habe, stehe ich mit dem bei Hirudo und Aulastomum erhobenen Befunde ganz allein. Das allgemeinste Vorkommnis ist: Daß

sich das proximale Centrosom in den ihm nächst gelegenen Kernpol einbettet, dieses oder das distale bildet das Mittelstück und der Achsenfaden verbindet sie (vgl. Meves, von Korff, Depdolla u. a.). Bei Helix pomatia (von Korff 1899) wächst das Mittelstück und mit ihm der verbindende Achsenfaden ungemein lang aus, so daß die beiden Centrosome weit voneinander getrennt werden; auch eine Wanderung der Centrosome ist bei Amphiuma beschrieben worden (nach Korschelt und Heider). Aber in einem anderen Sinne, nämlich von der das Spitzenstück bildenden Sphäre weg nach der Gegend des Mittelstückes zu. Dafür aber, daß, wie bei Hirudo und Aulastomum das eine Centrosom mit dem Achsenfaden sich im vordersten Ende des Spitzenstückes befestigt, der Achsenfaden dann neben dem Kern herläuft, durch das Mittelstück hindurch und das distale Centrosom diesem in Form eines kleinen Knöpfchens — wenigstens in noch nicht ganz ausgereiften Spermien — an seine dem Schwanzfaden zugewandten Ende aufsitzt, konnte in der Literatur keine Parallele gefunden werden. Und doch ist gerade das Heraufwandern des einen Centrosoms nach der Spitze in allen meinen Präparaten mit so großer Deutlichkeit zu sehen, daß darüber gar kein Zweifel entstehen konnte. Das andere Centrosom beteiligt sich an der Bildung des Mittelstückes, und es frägt sich nun, ob dieses Centrosom wächst und sich, wie Meves bei Paludina vivipara festgestellt hat, zu einem Stabe umbildet, der das Innere des Mittelstückes aufnahm. Da sich in unserem Falle die Streckung des Kerns und Mittelstückes schon sehr bald und zwar zu einem äußerst dünnen Faden vollzieht, konnte dieser wichtige Punkt nicht sicher entschieden werden. Soviel aber habe ich sicher feststellen können, daß das distale Centrosom von dem Plastosomenkörper, wie schon oben beschrieben, vor sich hergeschoben wird und daß es diesem, solange er noch als eine deutliche Verdickung wahrnehmbar ist, als kleines Knötchen an seinem distalen Ende aufsitzt. Wenn nun ein Wachstum des Centrosoms in Stabform in den Plastosomenkörper angenommen werden sollte, so müßte diese in umgekehrtem Sinne vom distalen Ende

des Plastosomenkörpers nach dem Kern hin erfolgen, und das scheint mir zum mindesten zweifelhaft, wenn nicht unwahrscheinlich, da es der ganzen Wachstumstendenz des Spermiums entgegenliefe. Ich glaube vielmehr, daß das distale Centrosom auch in den späteren Stadien, in denen es nicht mehr vom Plastosomenkörper gesondert darzustellen war, seine Größe beibehält und diesen dicht ansitzt. Die Beziehungen, in denen die Centrosome sonst noch zu den Plastosomen stehen, will ich bei der Besprechung dieser Gebilde erledigen.

Die Plastosomen.

Es ist von Rubaschkin (1910) festgestellt worden, daß die Plastosomen in den Ursamenzellen stets die primitivste Form, nämlich die Körnerform zeigen und sich erst im Laufe der Entwicklung zu Fäden und Ringen umbilden. Da ich bei den untersuchten Tieren die Ursamenzellen überhaupt nicht mehr zu Gesicht bekam, konnte ich zu dieser Frage, die neuerdings angezweifelt worden ist, nicht Stellung nehmen. Ich habe die Plastosomen stets in Form von kurzen Plastokonten angetroffen. Oft ist ein förmliches Netzwerk dicht verschlungener Fäden von Plastosomen dargestellt worden, so z. B. hat Dingler (1910) längere und häufiger verschlungene Fäden in einer Figur dargestellt, die sonst bei Hirudo und Aulastomum vorkommenden Stadien, in denen noch kein Cytophor gebildet ist, sehr ähnelt, besonders hat er auch festgestellt, daß sich die Plastosomen nach dem Zentrum hin bei seinen Achtergruppen gegenüber der Peripherie dicht anhäufen. Die Plastokonten bei Hirudo und Aulastomum sind immer als kurze, nicht untereinander zusammenhängende Fäden gesehen worden, besonders auf einen netzartigen Zusammenhang wurde genau geachtet, er konnte aber nie festgestellt werden. Eine Veränderung dieser Form und vielleicht ein Zurückgehen auf die von Rubaschkin als primitivere Körnerform bezeichnete wurde bei der Mitose beobachtet. Da fanden sich immer Körner, zumal gegen Ende der Mitose. Es frug sich nun, ob diese in der Mitose vorkommenden Körnerformen nicht vielleicht ein

Resultat einer Teilung der früheren Stäbchenform und somit eine Vermehrung der Plastosomen darstellen könnte, es konnte dies aber nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Aus dem reichlichen Auswandern der Plastosomen in den Cytophor hinein muß man ja auf eine starke Vermehrung dieser Gebilde schließen. Nun hat Terni (1912) bei Geotriton eine transversale Teilung der Plastoconten im Stadium der Zellteilung beobachtet, eine Tatsache, die meine — eben geäußerte Vermutung vielleicht etwas zu stützen imstande ist. Was die Topographie der Plastosomen während der Mitose betrifft, so läßt sich ihre Verteilung wohl mit den von Terni gemachten Beobachtungen und auch mit den Befunden von Romeis (1913) bei Ascarisblastomeren vergleichen und eine prinzipielle Übereinstimmung feststellen. Diese beschreiben ebenso wie ich es beobachtet habe: „das allmähliche Zurückweichen der Plastosomen von den Polstrahlungen, Freibleiben der Spindel, das Zusammendrängen der Plastosomen an den Seitenwänden der Zelle und ihr Eindringen zwischen die beiden auseinanderweichenden Tochterkerne". Die weiteren Lagebeziehungen der Plastosomen zu dem sich bildenden Cytophor während der Mitose wurden schon bei der Frage nach der Entstehung desselben erörtert und können natürlich hier nicht mit in den Vergleich hineingezogen werden. Das von Terni und Romeis beobachtete „tonnenartige" Zusammendrängen der Plastosomen an den Seitenwänden der Zelle zur Zeit der Bildung der Äquatorialplatte hat bei Hirudo und Aulastomum infolge der geringeren Protoplasmamenge nicht mehr zu einer vollständigen tonnenartigen Bildung geführt sondern die Plastosomen sind in zwei Haufen auseinandergedrängt worden, die, wie schon beschrieben, halbmondförmig an den beiden entgegengesetzten Enden der Äquatorialplatte liegen. — So sehen wir auch hier, daß sich die Plastosomen während der Mitose passiv verhalten und die drei von Romeis aufgestellten Faktoren 1. die Form und Topographie der Plastosomen, 2. die Menge des Protoplasmas und 3. die allgemeine Lagebeziehung der teilenden

Zellen zu ihrer Umgebung das Verhalten der Plastosomen während der Mitose beeinflussen und bestimmen.

In späteren Entwicklungsstadien sind dann von mehreren Beobachtern ring- und bläschenförmige Umformungen der Plastosomen angegeben worden, und diese führten dann zur Bildung des sogenannten Nebenkerns. (Meves, Sokolow, Vejdovsky, Dingler u. a.). Ich habe ein derartiges Zwischenstadium nicht beobachten können, vielmehr verdichteten sich bei meinem Objekt in diesem Stadium die Plastosomen direkt zu einer Kappe und diese bildete dann ihrerseits den Nebenkern. Der Nachweis, daß dieser so gebildete Nebenkern oder Chondriom nach Vejdovsky tatsächlich aus den Plastosomen gebildet wird, ist mir besonders wesentlich gewesen. Denn das weitere Schicksal des Nebenkerns ist in der Literatur ein Gegenstand des größten Interesses. Wenn sich auch die Plastosomen auf verschiedene Weise zu diesem Nebenkern umwandeln, so fand sich doch in vielen spermatogenetischen Untersuchungen, daß sie sich auf dem Stadium der beginnenden Ausdifferenzierung des Samenfadens zu einem kompakten, meist kugeligen Gebilde zusammenfügen (Duesberg, Meves, Vejdovsky, Depdolla, Otte u. a.). Otte beschreibt sogar einen Nebenkern bereits vor der letzten Reifungsteilung, der sich während der Mitose auflöst und dann wieder neu bildet; ein Vorkommnis, das außer ihm noch von niemanden bei einem anderen Objekte beobachtet wurde. Dieser Plastosomenkörper interessiert nun zunächst durch seine Beziehungen zu den Centrosomen. Meine Beobachtungen darüber befinden sich in Übereinstimmung mit den Resultaten von Vejdovsky (1911 bis 1912), Depdolla (1906), Bonnevie (1904). Diese alle haben die Centrosome im Nebenkern liegend vorgefunden. Besonders Vejdovsky sagt, daß die Centrosome bei Diestramena direkt im „Chondriom" enthalten sind, während Depdolla nur konstatiert, daß sie von ihm verdeckt werden, und erst nach totaler Entfärbung des Plastosomenkörpers sichtbar werden.

Die Teilung des Plastosomenkörpers in zwei Hälften deckt sich mit den Angaben Duesbergs (1911) bei Blatta germanica,

dort teilt sich ebenfalls der Nebenkern in zwei Plastosomenkörper. Das Schicksal dieser beiden Plastosomenkörper ist aber nun für die Frage, ob die Plastosomen Vererbungsträger der protoplasmatischen Substanz sein können oder nicht, von großer Bedeutung. Meine Untersuchungen haben dazu geführt, die Möglichkeit dieser Rolle offen zu lassen, denn bei dem Nachweis der völligen Ausstoßung der Plastosomensubstanz wäre die Frage überhaupt nicht mehr diskutierbar; das Studium der endgültigen Ausdifferenzierung des Samens bei Hirudo und Aulastomum hat aber eindeutig ergeben, daß der eine dieser Körper ganz und gar in das Mittelstück des reifen Spermiums übergeht. Dieses Verhalten der Plastosomen ist schon bei den verschiedensten Tiergattungen festgestellt worden, so daß man es wohl bald als ein allgemein gültiges Gesetz ansehen darf.

Man darf jedoch nicht verhehlen, daß erst in letzter Zeit wieder von einigen Forschern auf Grund ihrer bei verschiedenen Tieren gewonnenen Resultate dagegen Einspruch erhoben wurde (Vejdovsky, Montgomery, Lillie). Daß jedoch diese Einwände nicht völlig stichhaltig sind, hat Meves in seiner letzten Arbeit bereits dargelegt. Vejdovsky und Montgomery stützen ihre Ansicht darauf, daß die Plastosomen während der letzten Ausdifferenzierung des Spermiums in einem Cytoplasmaballen völlig ausgestoßen werden. Meves dagegen gibt an, daß nach seinen und Duesbergs Feststellungen kein einziges der Plastosomen in den abgeschnürten Cytoplasmaballen hineingelangt. Da die Möglichkeit vorlag, in unserem Untersuchungsmaterial ein interessantes Vergleichsobjekt zu finden, wurde auf diesen Punkt geachtet. Wie sich aber schon aus der obigen Beschreibung der Spermatogenese gezeigt hat, ließ sich der Vorgang bei Hirudo und Aulastomum nicht beobachten. Das findet vielleicht seine einfache Erklärung in der hier ständig gegebenen Möglichkeit, Protoplasma und Plastosomen nach dem Cytophor hin abzugeben. Wir treffen aber noch eine zweite Verminderung der Plastosomen bei der Bildung des Spitzenstückes an; der dort befindliche Plastosomen-

körper, der aus der Teilung des ursprünglichen hervorgegangen ist, zerfällt in kleine Körper, welche sich schließlich ganz auflösen. Ein ähnliches Verhalten dieser im Spitzenstück befindlichen Plastosomen wurde von Otte (1907) angegeben. Er schildert die Entstehung des Spitzenstückes aus dem Idiozom, d. i. dem Spindelrestkörper und findet bei diesem noch Plastosomen, die mit nach dem späteren Spitzenstück hinwandern und dort dann zerfallen und sich auflösen. Zu beachten ist aber bei allen diesen Vorgängen, die eine Verminderung der Plastosome zur Folge haben, daß ein Teil der Plastosomen im Mittelstück erhalten bleibt. Andererseits erhellt aus ihnen die Möglichkeit, daß ganz gut bei gewissen Tieren in einem abgeschnürten Protoplasmaballen Plastosomen mitausgestoßen werden können, wie es z. B. Dingler (1910) und Depdolla (1906) beobachtet haben. Es wäre daher auch möglich, daß tatsächlich bei Diestramena, wie von Vejdovsky beschrieben, Plastosomen abgeschnürt werden und sich auflösen, während ein anderer Teil von ihnen sich schon zum Mittelstück umgewandelt hat und von ihm übersehen wurde.

Die obige Darstellung der Verminderung der Plastosomen fordert unwillkürlich zu einem Vergleich mit der Reduktion des Chromatins auf. In der Tat hat bereits Duesberg (1908) und durch ihn angeregt Sokolow (1913) eine Reduktion der Plastosomen während der Reifungsteilungen beschrieben. Duesberg schreibt: „Nehmen wir also an, daß die Mitochondriensubstanz vom Ende der Wachstumsperiode ab nicht mehr zunimmt, so wird es selbstverständlich, daß nach zwei rasch aufeinanderfolgenden Teilungen die Zahl der Mitochondrien in den letzten Produkten dieser Teilungen geringer ist und zwar auf ein Viertel der Zahl der Mitochondrien der Mutterzellen herabgefallen ist.“ Wenn Duesberg diese Annahme infolge der großen Menge der Mitochondrien bei seinem Untersuchungsobjekt (Ratte) nicht mit absoluter Sicherheit hat feststellen können, so hatte Sokolow in Euskorpius carpathicus ein geeigneteres Objekt vor sich und findet die Duesbergsche Hypothese bei diesem Tier auf das genaueste bestätigt. Bei

Hirudo und Aulastomum treffen wir nun zwei neue Möglichkeiten der Reduktion der Plastosomen außer dieser von Duesberg und Sokolow beobachteten, die natürlich bei unseren Objekten auch noch bestehen wird: nämlich die eine, die sich während des ganzen Zeitraums der Zellteilungen der Spermatogonie und Spermatocyten abspielt: Die direkte Ausstoßung der Plastosomen in den Cytophor und eine zweite sich nach der zweiten Reifungsteilung im Spitzenstück abspielende: die allmähliche Auflösung des dort gelegenen Plastosomenkörpers. Es ergibt sich daraus aber ein weiterer Grund für die Wichtigkeit der Plastosomen als Vererbungsträger, indem wir gesehen haben, daß nicht nur überhaupt Plastosomen in den reifen Samen hineingelangen, sondern eine in ihrer Größe genau differenzierte Masse.

Damit wäre also festgestellt, daß bei Hirudo und Aulastomum die Plastosomen während der Ausbildung des Spermiums nur zum Teil ausgestoßen werden, der Rest aber im reifen Spermium als Mittelstück Verwendung findet. Infolgedessen steht auch die Möglichkeit offen, daß sie als Erbmasse in Betracht kommen.

Das nächste Erfordernis wäre nun nachzuweisen, ob bei der Befruchtung der plastosomale Anteil mit in die Eizelle eintritt. Daß dies der Fall sein kann, dafür hat Meves nunmehr schon bei drei Tierarten den Nachweis erbracht (Ascaris, Echiniden, Phallusia mamillata). Leider war es bisher nicht möglich, geeignetes Material von Hirudineen zu erlangen, um den Vorgang auch hier zu untersuchen.

Zusammenfassung.

Die Spermatogonien haben einen großen Kern mit einem und manchmal zwei Nukleolen. Im Cytoplasma finden sich verstreut Plastosomen von der Form kurzer Fäden. Die jungen Spermatogonien stehen in einem syncytialen Zusammenhang.

Bei ihren Teilungen geben sie Protoplasma nach dem Zentrum ab und bilden so den Cytophor. Der Cytophor ist kernlos. Die Größe des Cytophors steht zu der der ihn umgebenden Zellen in umgekehrtem Verhältnis. Es wird ständig auch von den ruhenden Spermatogonien Cytoplasma und mit ihm Plastosomen nach dem Cytophor ausgeschieden.

Die Plastosomen gruppieren sich in der Mitose kappen- oder halbmondförmig um die von den Polstrahlungen freien Enden der Äquatorialplatte. In der Metaphase treten sie zwischen die beiden Tochterplatten und verteilen sich so gleichmäßig auf die beiden neuen Zellen. Die Plastosomen, die in dem nicht mit durchgeteilten Protoplasma liegen, verbleiben da und gehen allmählich zu Grunde. Die Plastoconten nehmen in der Mitose Körnerform an.

In der jungen Spermatide verdichtet sich das Chromatin des Kerns. Der Kern streckt sich aus und wird zum Kopf des reifen Spermiums. Die Plastosomen verdichten sich auf diesem Entwicklungsstadium zu einer Kappe. Diese Kappe bildet den Plastosomenkörper. Dieser verfällt in zwei Hälften. Die eine geht nach dem Spitzenstück und löst sich dort allmählich auf, die andere bildet sich zum Mittelstück um, und sitzt dem distalen Ende des Kernes auf. Allmählich streckt sich dieser Plastosomenkörper zu einem langen Stabe aus: das fertige Mittelstück.

Die Zentralkörper sind anfangs im Plastosomenkörper verborgen, später wandert das proximale Centrosom nach dem Spitzenstück und bleibt mit einem langen Achsenfaden mit dem distalen in Verbindung. Das distale Centrosom sitzt dem Plasto-

somenkörper während seiner Ausdifferenzierung zum Mittelstück auf und zwar dem distalen, dem Schwanzfaden zugewandten Ende.

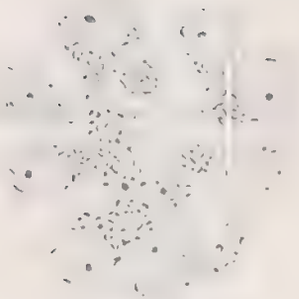
Das reife Spermium findet sich in der Samenblase zu Paketen zusammengebacken, sie lassen deutlich die vier Hauptteile unterscheiden: Spitzenstück, Kopf, Mittelstück und Schwanzfaden.

Für die Überlassung dieser Arbeit und die bei ihrer Abfassung jederzeit in liebenswürdigster Weise gewährte Unterstützung sei es mir erlaubt, an dieser Stelle meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Mollier, und Herrn Prosektor Dr. Romeis meinen ergebensten Dank auszusprechen.

1

2

3



4

5c

5a

5b

7

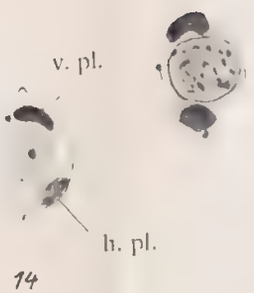
8

9

10

11

12



14

13

15

16

17

Literaturverzeichnis.

Benda, 1902: Die Mitochondria. Ergebn. d. Anat. und Entwicklungsgesch., Bd. 12.

Bolsius, 1905: La sperme de la Haementeria costata du spermatophore à l'oviducte. C. R. 6. Congrès international. zool.

Bonnevie, 1904: Zur Kenntnis der Spermiogenese bei den Gastropoden. Biol. Centralbl. 24.

Brandes, 1901: Die Begattung der Hirudineen. Abhandl. Natur. Ges. Halle.

Brumpt, 1900: Réproduction des Hirudinées. Mém. Soc. Zool. France, Tome 13.

Depdolla, 1906: Beiträge zur Kenntnis d. Spermatogenese beim Regenwurm. Zeitschr. f. wissenschaftl. Zool., Bd. 81.

Dingler, 1910: Über die Spermatogenese des Dicrocoelium lanceolatum. Arch. f. Zellforsch., Bd. 4.

Duesberg, 1911: Nouvelles recherches sur l'appareil mitochondrial des cellules seminales. Arch. f. Zellforsch., Bd. 6.

— 1912: Plastosomen „apparato reticolare interno" und Chromidialapparat. Ergebn. d. Anat. u. Entwicklungsgesch., Bd. 20.

von Korff, 1899: Zur Histogenese der Spermien von Helix pomatia. Arch. f. mikr. Anat., Bd. 54.

Korschelt u. Heider, 1902: Lehrbuch der vergl. Entwicklungsgesch. d. Wirbellosen.

Kowallevsky, 1901: Phenomènes de la fécondation chez l'haementeria costata. Mém. Acad. Sc. Pétersbourg, Vol. 11.

Kuschakewitsch, 1913: Studien über den Dimorphismus der männlichen Geschlechtselemente bei Prosobranchia. Arch. f. Zellforsch., Bd. 10.

Laguesse, 1912: Methode de coleration vitale des Chondriosomes par le vert de Janus. C. rend. soc. biol., Tome 73.

Leuckart, 1901: Parasiten des Menschen, 2. Aufl., neubearbeitet von Brandes.

Lillie, 1912: Studies of Fertilization in Nercis. III. The Morphology of the Normal Fertilization of Nercis. Journ. of Experiment. Zool., Vol. 12.

Meves, 1899: Über Struktur und Histogenese der Samenfäden des Meerschweinchens. Arch. f. mikr. Anat., Bd. 54.

Meves, 1901: Struktur und Histogenese der Spermien. Ergebn. d. Anat. und Entwicklungsgesch., Bd. 11.

— 1903: Über oligopyrene und apyrene Spermien und über ihre Entstehung nach Beobachtungen an Paludina und Pygaera. Arch. f. mikr. Anat., Bd. 61.

— 1911: Zum Verhalten des sogen. Mittelstückes des Echinidenspermiums bei der Befruchtung. Anat. Anzeiger, Bd. 40.

— 1911: Über die Beteiligung der Plastochondrien an der Befruchtung des Eies von Ascaris megalocephala. Arch. f. mikr. Anat., Bd. 76.

— 1913: Über das Verhalten des plastosomatischen Bestandteils des Spermiums bei der Befruchtung des Eies von Phallusia mamillata. Arch. f. mikr. Anat.

Meves und Duesberg, 1907: Die Spermatocytenteilungen bei der Hornisse (Vespa crabro). Arch. f. mikr. Anat., B. 71.

Montgomery, 1912: Complete discharge of Mitochondria from the Spermatozoön of Peripabus. Biol. Bull., Vol. 22.

Otte, 1907: Samenreifung und Samenbildung bei Locusta viridissima. Zool. Jahrbücher, Bd. 24.

Retzius, 1881: Biol. Unters.

— 1904: Biol. Untersuch., neue Folge, Bd. 11.

Romeis, 1913: Beobachtungen über die Plastosomen von Ascaris megalocephala während der Embryonalentwicklung unter besonderer Berücksichtigung ihres Verhaltens in den Stamm- und Urgeschlechtszellen. Arch. f. mikr. Anat., Bd. 81.

Rubaschkin, 1910: Chondriosomen und Differenzierungsprozesse bei Säugetierembryonen. Anat. Hefte.

Schubert, 1899: Beiträge zur Histologie d. männl. Geschlechtsorgane von Hirudo. Zeitschr. f. wissenschaftl. Zool., Bd. 66.

Sokolow, 1913: Untersuchungen über die Spermatogenese bei Arachnoideen. Arch. f. Zellforsch., Bd. 9.

v. Szüts, 1913: Mikrotechn. Mitteilg. Zeitschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie, Bd. 29, Heft 3.

Terni, 1912: Sul comportamento dei condriosomi durante le divisioni di maturazione. Arch. ital. di Anat. e Embr., Vol. X.

Thesing, 1904: Beiträge zur Spermatogenese der Cephalopoden. Zeitschrift f. w. Zool., Bd. 76.

Vejdovsky, 1911/12: Zum Problem der Vererbungsträger. Prag, K. Böhmische Ges. d. Wissenschaften.

Erklärungen der Abbildungen.

Alle Figuren sind auf der Höhe des Objekttisches mit dem Abbeschen Zeichenapparat entworfen. Bei allen Zeichnungen diente als Objektiv die homog. Immersion, 2 mm. Apertur 1,4 und als Okular das Kompens.-Ok. 12 von Zeiß.

Figurenerklärung.

v. c. = vorderes Centrosom.
h. c. = hinteres Centrosom.
K. = Kern.
pl. = Plastosomen.
v. pl. = vorderer Plastosomenkörper.
h. pl. = hinterer Plastosomenkörper.
S. = Schwanz.
Sp. = Spitzenstück.

Fig. 1. Junge Spermatogonien von Hir. med. Plastosomen in Form von kleinen, geschwungenen Fäden. Regaud.

Fig. 2. Junge Spermatogonien in der Mitese. Äquatorialplatte mit halbmondförmiger Anordnung der Plastosomen. Regaud.

Fig. 3. Weiter vorgerückte Stadien einer Mitose. Die Plastosomen treten zwischen die beiden Tochterplatten und fließen im beginnenden Cytophor zusammen. Regaud.

Fig. 4. Etwas älteres Stadium der Spermatogonien. Größere Ansammlung im zentralen Protoplasma von Plastomen und degenerative Formen derselben. Regaud.

Fig. 5a. Stadium mit wohl entwickeltem Cytophor. Plastosomen in ihm in vielfachen degenerativen Formen. Viele Plastosomen in den Verbindungsstielen; geringe Anzahl von Plastosomen in den eigentlichen Samenbildungszellen. Regaud.

Fig. 5b. Zellen desselben Stadiums wie 5a, Cytophor im größten Durchmesser skizziert.

Fig. 5c. Zellen des gleichen Stadiums in der Mitose. Regaud.

Fig. 6. Junge Spermatile nach der zweiten Reifungsteilung. Cytophor im größten Durchmesser. Plastosomen in den Zellen in Kappenform.

Fig. 7. Zelle wie auf Fig. 6, linear doppelt vergrößert, Zusammentreten der Plastosomen. Regaud.

Fig. 8. Weiteres, noch dichteres Zusammenbacken der Plastosomen zur Kappenbildung.

Fig. 9. Fertig gebildete Kappe. 8 und 9 linear, auch doppelt vergrößert. Fig. 1—9 sind alle Präparaten von Hirudo med. entnommen. Fig. 10—22 stammen von Aulostomum vorax und sind alle linear doppelt vergrößert.

Fig. 10 u. 11. Zwei Plastosomenkörper, Auswachsen des jungen Schwanzfadens. Sichtbarwerden eines Centrosoms. Regaud.

Fig. 12, 13 u. 14. Wanderung des proximalen Centrosoms mit dem Achsenfaden gegen das proximale Zellende zu. Die beiden Plastosomenkörper liegen von nun ab in den entgegengesetzten Zellpolen. Regaud.

Fig. 15. Beginnende Streckung der jungen Spermatide. Das Chromatin bildet größere Brocken.

Fig. 16, 17 u. 18. Weitere Streckung der Zelle. Verdichtung des Chromatins. Proximales und distales Centrosom, Achsenfaden und zwei Plastosomenkörper. Regaud.

Fig. 20—23. Weitere Ausbildung und Streckung der Zellelemente Bläschenform des Plastosomenhaufens. Regaud.

Fig. 24, 25 u. 26. Rasche, energische Streckung des Kernes. Beginn der Auflösung des proximalen Centrosomenhaufens.

Fig. 27. Stark ausgezogener Kern. Die Schlängelung des Achsenfadens, Darstellung des Schwanzfadens in seiner ganzen Länge.

Fig 28—32. Ausbildung des Spitzenstückes. Auflösung des proximalen Plastosomenkörpers. Streckung des Protoplasmas, Feinerwerden des Achsenfadens und Centrosoms. Regaud.

Fig. 33. Paket reifer Spermien, linear nicht vergrößert. Färberische Unterscheidung von Spitzenstück, Kopfmittelstück und Schwanz.

Fig. 34. Einzelner Samenfaden, linear, doppelt vergrößert. Regaud.

Fig. 35 u. 36. Ausbildung des Mittelstückes. Einem Präparat von Hirudo med. entnommen, linear doppelt vergrößert. Benda.

Fig. 37. Querschnitt eines Samenfadens in der Höhe des Kopfstückes auf dem Entwicklungsstadium von Fig. 27. Zentral gelegener Kern mit feiner Plasmahülle. Linear doppelt vergrößert. Regaud.

Fig. 38. Interstitielle Zelle aus dem Hodenbläschen von Hir. med. zerfallendem Kern, linear nicht vergrößert.

Der einfacheren Reproduktion wegen wurden die nach Benda gefärbten Präparate auch schwarz gezeichnet.

Berichtigung. Seite 24 Zeile 8 von unten: Statt „Es erscheint zum mindesten nicht unwahrscheinlich“ muß es heißen: „Es erscheint zum mindesten unwahrscheinlich“.

Das Verhältnis der bayrischen zur preussischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München.

Von **S. Finsterwalder.**

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Februar 1914.

Die Neutriangulierung Bayerns ist zu einer unaufschieblichen wirtschaftlichen Notwendigkeit geworden. Bayerns Vermessungswesen hat zwar lange genug als Vorbild gedient und die im Jahre 1873 erschienene vom damaligen Direktor des bayrischen topographischen Bureaus Oberstleutnant Karl v. Orff[1]) besorgte mustergültige wissenschaftliche Bearbeitung der den Zeitraum von 1804—1870 umfassenden Beobachtungen des Hauptdreiecksnetzes ließ die Sorgfalt und Beobachtungskunst, namentlich auch der älteren Zeiten in hellem Licht erscheinen, ja man konnte damals noch mit einem vielleicht ein Jahrhundert ausreichenden Bestand der Grundlagen des bayrischen Vermessungswesens rechnen, allein die Verhältnisse haben gezeigt, daß das eine Täuschung war. Der ursprüngliche Zweck der bayrischen Landesaufnahme war auf eine graphische Darstellung des Landes im Maßstab 1 : 5000 (bzw. 1 : 2500) gerichtet und nichts kann die Gründlichkeit und Vorsicht ihrer Leiter in helleres Licht setzen, als daß man ihre Arbeiten 70 Jahre nach deren Beginn auch noch für eine zahlenmäßige Aufnahme, bei der mit einzelnen Zentimetern gerechnet wird, ausreichend erachtete, obwohl sich inzwischen die Ansprüche an die Genauigkeit nahezu verhundertfacht hatten. Folgendes

[1]) Die Bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873.

sind die Gründe, welche die Hoffnung, die alte Landestriangulation den neuen Verhältnissen anpassen zu können, zunichte machten. Es fehlte ursprünglich an einer systematischen Ausgleichung der Messungen, die erst 1873 von v. Orff für das Hauptdreiecksnetz nachgeholt wurde und es waren daher die Berechnungsergebnisse nicht so genau als es die Messungen an sich zugelassen hätten. Dann fehlte es auch beim Sekundärnetz an der engen Verbindung benachbarter Punkte, wodurch deren gegenseitige Lage für die heutigen Genauigkeitsanforderungen nicht mehr genügend zuverlässig bestimmt war und schließlich war das alte Netz in den entlegeneren, früher schwer zu bereisenden Teilen wie in der Oberpfalz nicht nur weitmaschig sondern auch mit geringerer Genauigkeit gemessen; ja es mußten sogar wegen der Schwierigkeit der Beobachtung der langen Sichten im bewaldeten Mittelgebirge an sich unzulässige Messungswidersprüche geduldet und nach Möglichkeit verteilt werden, wobei es naturgemäß auch bei besser beobachteten Netzteilen nicht ohne Schaden an Genauigkeit abging[1]). Alle diese Mißstände hätten sich schließlich im Laufe der Zeit ausmerzen lassen, wenn nicht von Anfang an der Grundfehler begangen worden wäre, daß man eine ausreichende Bezeichnung und Sicherung der gemessenen Punkte, insbesondere jener des Hauptdreiecksnetzes, die vielfach bei den gewöhnlichen Messungen wegen der Schwierigkeit ihrer Signalisierung und ihrer entlegenen Stellung auf bewaldeten Bergkuppen nicht gebraucht werden, unterlassen hätte. Eine in den achtziger Jahren nach den Resten der alten Signale vorgenommene Neuversicherung mußte naturgemäß allerlei Zweifeln

[1]) Man vergleiche hiezu und zu dem Folgenden: Die bayerische Landesvermessung in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Im Auftrag des K. Katasterbureaus, dargestellt von Joseph Amann, K. Steuerassessor. München 1908. Insbesondere die darin enthaltene wertvolle Studie vom K. Steuerrat Dr. J. Bischoff über das Triangulierungswesen S. 417, sowie die Gelegenheitsschrift vom K. Obergeometer Clauß, Gedanken über eine Reform des bayrischen Dreiecksnetzes rechts des Rheines. Zeitschrift des Bayerischen Geometersvereins, 14. Bd., 1910, S. 251.

über das Zusammenfallen der früher gemessenen und der neuvermarkten Punkte Raum lassen; besonders dort, wo es an genügend zahlreichen und gut erhaltenen Sekundärpunkten, insbesondere Kirchtürmen zur Prüfung der neuen Versicherung fehlte, wie das im Norden und Osten Bayerns vielfach der Fall war. Allein auch bei den als Hauptdreieckspunkten benützten Kirchtürmen, die noch die besten Garantien für die dauernde Erhaltung zu bieten schienen, hat es an Veränderungen durch Winddruck, Umbau, Brand, ja sogar Einsturz nicht gefehlt und es wäre ein höchst mißliches Beginnen gewesen auf derartiger, überall schwankenden Grundlage neue Fundamente legen zu wollen. Die von maßgebender Seite lange erkannten Schäden machten sich im Messungsdienst in dem Maße mehr und mehr geltend, als die Stellen, an denen zahlenmäßige Aufnahmen größeren Umfanges, die einer trigonometrischen Grundlage nicht entbehren könnten, wie Stadtvermessungen und Flurbereinigungen sich häuften und miteinander in Verbindung traten. Es stellten sich Anschlußschwierigkeiten aller Art heraus und man mußte die leidige Erfahrung machen, daß ausgedehnte Netzteile in ungenügenden Zusammenhang mit dem Hauptnetz waren und alle Anschlüsse unsicher und widerspruchsvoll wurden. Eine Abhilfe dieser Mißstände wurde zuerst in der Rheinpfalz getroffen. Die preußische Landestriangulation hatte ihr Hauptdreiecksnetz, das die Verbindung nach Elsaß-Lothringen vermittelte, über die Pfalz gespannt und die in Bayern gelegenen Punkte Donnersberg und Calmit darin einbezogen. An diese sehr genaue und wohlversicherte Grundlage konnte die Neutriangulierung der Pfalz einfach und einwandfrei angeschlossen werden[1]). Ein ähnliches Verfahren kann auch für das rechtsrheinische Bayern ins Auge gefaßt werden, nachdem im Norden des Landes eine über 200 km lange Reihe preußischer Triangulationspunkte, die zum Teil sogar auf bayrischem Boden gelegen sind, vor-

[1]) Siehe Gustav Clauß, Das neue pfälzische Dreiecksnetz. Zeitschrift des Bayerischen Geometervereins, Bd. 12, 1908, S. 64.

handen ist. Diese bieten infolge der Genauigkeit, mit der sie gemessen und der peinlichen Sorgfalt, mit welcher sie vermarkt sind, eine ganz ausgezeichnete Stütze für die künftige Neutriangulierung von Bayern, wie sie sonst nur mit großen Opfern an Arbeitsaufwand, Zeit und Geld durch Messung einer neuen Basis im Norden Bayerns geschaffen werden könnte. Das vom K. Katasterbureau neu entworfene und erkundete trigonometrische Netz sieht infolgedessen auch den unmittelbaren Anschluß an die preußische Landestriangulation vor. Seine Punkte sind mit geringen Ausnahmen solche des alten von v. Orff bearbeiteten Netzes, das aber damals infolge der größeren territorialen Erstreckung Bayerns nach Norden (z. B. im Bezirk Orb) und der weisen Vorsicht der Entwerfer über die heutigen Landesgrenzen hinausgriff und benachbarte, günstig gelegene Aussichtswarten zur Abrundung und Festigung des Messungswerkes heranzog. Die meisten dieser außerbayrischen Netzpunkte der alten bayrischen Landestriangulation sind inzwischen in die preußische Triangulation einbezogen worden, so daß ein ziemlich ausgiebiges Vergleichsmaterial zur Prüfung der bayrischen Triangulation und zum Zusammenschluß mit der preußischen vorliegt [1]). Für den Zusammenschluß besteht insofern ein praktisches Bedürfnis, als man auf diesem Wege Näherungskoordinaten der zukünftigen bayrischen Netzpunkte im preußischen Landesvermessungssystem erhält, was für die Berechnung und Ausgleichung des künftigen bayrischen Netzes von großem Nutzen ist. Um diesen Zusammenschluß zu bekommen, habe ich zehn gemeinsame Punkte beider Netze, deren Identität keinem ernsten Zweifel begegnet, ausgewählt und ihre geographischen Koordinaten auf dem Besselschen Erdellipsoid miteinander verglichen. Nun sind die Ausgangspunkte

[1]) Die Ergebnisse der preußischen Triangulation sind in vorbildlicher Form niedergelegt in: Die Königlich preußische Landestriangulation, Abrisse, Koordinaten und Höhen sämtlicher von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme bestimmten Punkte, wovon für uns in Betracht kommen: 16. Teil, Reg.-Bez. Erfurt, Berlin 1910 und 21. Teil, Reg.-Bez. Cassel und Wiesbaden, Berlin 1913.

beiderlei Netze sehr verschieden: für das preußische Netz der trigonometrische Punkt 1. Ordnung Rauenberg bei Berlin mit der Orientierung nach dem Azimut der Marienkirche in Berlin, für das bayrische der nördliche Frauenturm in München mit dem Azimut nach Aufkirchen bei Erding. Die Lage der Ausgangspunkte auf dem Besselschen Ellipsoid wurde durch voneinander unabhängige astronomische Bestimmungen älteren Datums festgelegt, so daß es nicht wundernehmen darf, wenn beträchtliche Unterschiede in den geographischen Koordinaten der 10 Anschlußpunkte auftreten. Nun hat der wissenschaftliche Bearbeiter des bayrischen Netzes schon für den Fall vorgesorgt, daß sich eine Änderung der Ausgangswerte der bayrischen Koordinaten für nötig erweisen sollte und für jeden Netzpunkt Formeln aufgestellt, die die Änderung seiner Lage bei gegebenen kleinen Änderungen der Ausgangswerte des Koordinatensystemes zu berechnen gestatten. Für uns liegt nun eine umgekehrte Verwendung dieser Formeln näher. Wir wollen die Ausgangswerte so bestimmen, daß die damit veränderten bayrischen Koordinaten der 10 Vergleichspunkte den preußischen möglichst gleich werden. Mit diesen Ausgangswerten lassen sich dann Näherungswerte der übrigen bayrischen Koordinaten im preußischen System ableiten. Die Vergleichspunkte sind zumeist in beiden Systemen Punkte 1. Ordnung, nur Steigekoppe ist im bayrischen System 2. Ordnung und Berg im preußischen ebenfalls 2. Ordnung. Die Mitteilung der Soldnerschen Koordinaten des Punktes Steigekoppe verdanke ich Herrn Regierungsrat Dr. J. Bischoff; aus ihnen mußten die geographischen Koordinaten und die Übertragungskoeffizienten im bayrischen System erst gerechnet werden, während diese Größen für die andern Punkte im Landesvermessungswerk unmittelbar vorliegen. In folgender Tabelle I sind die Orffschen geographischen Koordinaten der 10 Vergleichspunkte mit den entsprechenden Koordinaten der preußischen Landesaufnahme zusammengestellt und zwar nach der geographischen Länge von West nach Ost geordnet. Die kleinen Änderungen $\delta\varphi$ und $\delta\lambda$ der Koordinaten φ und λ, welche eintreten, wenn der Ursprung

der bayrischen Koordinaten um $\delta\varphi_0$ in der Breite, um $\delta\lambda_0$ in der Länge geändert und das Ausgangsazimut um ϑ gedreht wird, wenn ferner die große Achse a des Referenzellipsoides (unter Beibehaltung der Abplattung) eine Änderung δa erfährt, drücken sich durch folgende Formeln[1]) aus:

$$\delta\varphi = f\left(\frac{\delta a}{a}\right) + h\vartheta + \delta\varphi_0;$$

$$\delta\lambda = f'\left(\frac{\delta a}{a}\right) + h'\vartheta + k'\delta\varphi_0 + \delta\lambda_0.$$

Die Einführung von $\frac{\delta a}{a}$ hat für uns den Zweck einer Maßstabverschiedenheit beider Landesvermessungen Rechnung tragen zu können.

Mittels der Näherungswerte:

$$\frac{\delta a}{a} = 0, \quad \vartheta = 14{,}50'', \quad \delta\varphi_0 = 2{,}55'', \quad \delta\lambda_0 = 12{,}74'',$$

wobei der Wert von ϑ die unrichtige Orientierung des bayrischen Koordinatensystems aufhebt[2]), ergaben sich folgende Fehlergleichungen für die an den Näherungswerten anzubringenden Verbesserungen, von welchen nur die Koeffizienten tabellarisch angeführt werden (Tabelle II).

Zur Bildung der Normalgleichungen wurde den auf die Breite bezüglichen Fehlergleichungen das Gewicht $3^2 : 2^2$ beigelegt, entsprechend dem Verhältnis der linearen Werte der Breitensekunde zur Längensekunde in Nordbayern (genauer

---

[1]) Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, S. 556, insbesondere die Tabelle S. 561. v. Orff hebt S. 558 Zeile 10 von oben ausdrücklich hervor, daß die Formeln nur für $\delta\varphi_0 < 2''$ auf $0{,}005''$ sicher genau seien, während sie im folgenden bis auf $2{,}63''$ ausgedehnt werden. Für den nächstliegenden Zweck der Gewinnung von Näherungswerten der geographischen Koordinaten der bayrischen Punkte im preußischen System ist dieser Umstand ganz belanglos; aber auch für die spätere Bestimmung der Lotabweichung von München dürfte er ohne sachliche Bedeutung sein.

[2]) A. a. O. S. 635.

Tabelle I.

Bezeichnung des trigonometrischen Punktes	Geographische Breite: im bayrischen System	Geographische Breite: im preußischen System: Umgerechnet aus 2	Geographische Breite: im preußischen System: Amtliche Angabe gekürzt	Geographische Breite: Unterschied 3−4	Geographische Länge östlich von Ferro: im bayrischen System	Geographische Länge östlich von Ferro: im preußischen System: Umgerechnet aus 6	Geographische Länge östlich von Ferro: im preußischen System: Amtliche Angabe gekürzt	Geographische Länge: Unterschied 7−8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Melibocus	49° 43′ 29,92″	32,940	32,960	− 0,020	26° 18′ 0,68″	13,941	13,956	− 0,015
Taufstein	50° 31′ 3,01″	5,923	5,963	− 0,040	26° 54′ 8,92″	21,855	21,917	− 0,062
Steigekoppe	50° 2′ 34,41″	37,324	37,261	+ 0,063	26° 58′ 11,21″	24,605	24,621	− 0,016
Orb	50° 11′ 22,11″	25,009	24,995	+ 0,014	27° 2′ 54,11″	7,563	7,542	+ 0,021
Breitsöl	49° 54′ 11,20″	14,100	14,110	− 0,010	27° 5′ 28,62″	41,971	41,937	+ 0,034
Kreuzberg	50° 22′ 13,65″	16,457	16,447	+ 0,010	27° 38′ 39,68″	53,216	53,188	+ 0,028
Groß-Gleichberg	50° 23′ 17,07″	19,787	19,783 [1]	+ 0,004	28° 15′ 22,05″	35,611	35,568 [1]	+ 0,043
Coburg	50° 15′ 56,92″	59,583	59,586	− 0,003	28° 39′ 25,13″	38,659	38,649	+ 0,010
Döbra	50° 16′ 43,41″	45,977	45,979	− 0,002	29° 18′ 27,03″	40,583	40,598	− 0,015
Berg	50° 22′ 28,09″	30,635	30,647	− 0,012	29° 26′ 38,65″	52,241	52,260	− 0,019

[1]) Auf den bayrischen Triangulationspunkt umgerechnet.

Tabelle II.

Fehlergleichungen für die geographische Breite				Fehlergleichungen für die geographische Länge				
$\frac{\delta a}{a}$	ϑ	$\delta \varphi_0$	—	$\frac{\delta a}{a}$	ϑ	$\delta \varphi_0$	$\delta \lambda_0$	—
f	h	—	l	f'	h'	k'	—	l'
— 0,5583	0,0342	1	0,005	1,0914	0,0418	— 0,059	1	— 0,079
— 0,8489	0,0272	1	— 0,008	0,8800	0,0646	— 0,047	1	— 0,070
— 0,6781	0,0264	1	0,082	0,8473	0,0511	— 0,046	1	— 0,047
— 0,7315	0,0255	1	0,035	0,8201	0,0553	— 0,044	1	— 0,001
— 0,6285	0,0250	1	0,003	0,7998	0,0472	— 0,043	1	— 0,002
— 0,8000	0,0185	1	0,021	0,5986	0,0607	— 0,032	1	0,030
— 0,8085	0,0114	1	0,002	0,3688	0,0613	— 0,020	1	0,061
— 0,7654	0,0068	1	— 0,017	0,2177	0,0579	— 0,012	1	0,030
— 0,7705	— 0,0008	1	0,031	— 0,0263	0,0583	0,001	1	0,021
— 0,8049	— 0,0024	1	— 0,042	— 0,0776	0,0610	0,004	1	0,025
	$p = 2{,}25$				$p = 1{,}00$			

Die konstanten Glieder l bzw. l' geben den Unterschied zwischen den mit den Näherungswerten

$$\frac{\delta a}{a} = 0,\ \vartheta = -14{,}50'',\ \delta \varphi_0 = 2{,}55'' \quad \text{und} \quad \delta \lambda_0 = 12{,}74''$$

umgerechneten bayrischen Koordinaten und den preußischen Koordinaten an.

30,1 : 19,9 m). Das Schema der so gebildeten Normalgleichungen lautet:

17,8481	0,00345	— 17,99172	5,5198	— 0,21350
	0,04231	0,39644	0,5592	0,00795
		24,01318	— 0,2980	0,13035
			10,0000	— 0,03600
				0,04758

Die Auflösung ergibt zusammen mit den Näherungswerten folgende Werte:

$$\frac{\delta a}{a} = (0{,}0646 \pm 0{,}0316)\,10^{-4}$$
$$\vartheta = 14{,}50'' - 1{,}985'' \pm 0{,}630''$$
$$\delta\varphi = 2{,}55'' + 0{,}0768'' \pm 0{,}0270''$$
$$\delta\lambda = 12{,}74'' + 0{,}0818'' \pm 0{,}0410'',$$

oder abgekürzt:

$$\frac{\delta a}{a} = (65 \pm 32)\,10^{-7}$$
$$\vartheta = 12{,}515'' \pm 0{,}630''$$
$$\delta\varphi = 2{,}627'' \pm 0{,}027''$$
$$\delta\lambda = 12{,}822'' \pm 0{,}041''.$$

Rechnet man mit diesen Größen die Orffschen geographischen Koordinaten auf das preußische System um, so nähern sie sich den preußischen Koordinaten, soweit es ohne Zerstörung ihres inneren Zusammenhanges möglich ist. $\Sigma(pvv)$ ergibt sich zu 0,0251 und hieraus der mittlere Fehler für die Gewichtseinheit (Längensekunde)

$$\sqrt{\frac{0{,}0251}{16}} = \pm 0{,}0397$$

oder in linearem Maße 0,8 m. Letztere Zahl gibt den mittleren Koordinatenunterschied der bayrischen und preußischen Messungen. Die größten Differenzen finden sich in der Breite der Steigekoppe (0,063" = 1,9 m linear), in der Länge des Tauf-

stein (0,062″ = 1,2 m linear) und in der Breite desselben Punktes (0,040 = 1,2 m linear); sonst bleiben sie meist erheblich unter 1 m, so daß man mit ziemlicher Sicherheit erwarten kann, daß die schließlichen Koordinaten der neutriangulierten bayrischen Netzpunkte im preußischen System sich um weniger als 2—3 m von den aus der alten Triangulation ermittelten Näherungskoordinaten unterscheiden werden.

Die ermittelte Korrektion $\frac{\delta a}{a}$ sagt aus, daß man die große Halbachse des bayrischen Erdellipsoides um 65.10^{-7} vergrößern muß, um die bayrischen geographischen Koordinaten in die preußischen überzuführen. Statt dessen kann man auch die bayrischen Längenmaße im gleichen Verhältnis verkleinern, um sie den preußischen möglichst anzunähern. In der Tat sind die Längenmaße der preußischen Landesaufnahme zu klein und bedürfen einer Korrektion von + 58,0 Einheiten der 7. Dezimale des Logarithmus[1]) zur Überführung auf das internationale Meter. Aus der Vergleichung mit den bayrischen Koordinaten hätte sich diese Korrektion zu 28 ± 14 Einheiten der 7. Dezimale des Logarithmus ergeben. Es ist also der Maßstab des alten bayrischen Netzes nicht unerheblich besser als der des neuen preußischen, was sich auch schon in der Rheinpfalz gezeigt hatte, wo Herr Obergeometer Clauß fand, daß sich die fast 36 Kilometer lange Seite Calmit-Donnersberg aus der alten bayrischen Messung bis auf 8 cm genau wie aus der um die 58 Einheiten korrigierten preußischen Messung ergab[2]).

Der aus der Ausgleichung hervorgegangene Wert für $\vartheta = 12{,}5''$ bestätigt die Angabe des Orffschen Messungswerkes auf 2″, welche leicht Lotabweichungen zwischen Berlin und München zur Last fallen können. Die große Differenz von 12,82″ zwischen den bayrischen und preußischen Längen

[1]) Siehe das früher erwähnte Koordinatenverzeichnis der K. preußischen Landesaufnahme. Fußnote in der Einleitung S. IV bzw. V.

[2]) Das pfälzische Dreiecksnetz, Bd. 12 der Zeitschrift des Bayerischen Geometervereins, S. 14.

rührt größtenteils von einer falschen Annahme der geographischen Länge von Berlin zur Zeit der Aufstellung des Rauenberges als Anfangspunkt des preußischen Systemes her. Eine besondere Beachtung verdient der ermittelte Wert von $\delta\varphi = 2{,}63''$ welche Breitendifferenz auf eine erhebliche Lotabweichung zwischen Berlin und München schließen läßt, die um so bemerkenswerter ist, als sie eine Abweichung des Lotes in München von den Alpen weg, also nach Norden bedeutet. Diese Lotabweichung soll nun genauer untersucht werden.

Im bayrischen System hat der Anfangspunkt der Landesvermessung, der nördliche Frauenturm in München, die geographischen Koordinaten [1]):

Nördliche Breite . . . $48^0\ 8'\ 20{,}00''$,
Östliche Länge von Ferro $29^0\ 14'\ 15{,}00''$.

Mit den oben gerechneten Korrekturen

$$\delta\varphi = 2{,}63'' \pm 0{,}03 \quad \text{und} \quad \delta\lambda = 12{,}82'' \pm 0{,}04$$

werden die geographischen Koordinaten im preußischen System:

$$\varphi_0 = 48^0\ 8'\ 22{,}63'' \pm 0{,}03 \qquad \lambda_0 = 29^0\ 14'\ 27{,}82'' \pm 0{,}04.$$

In ähnlicher Weise findet man aus den bayrischen Koordinaten der Westkuppel der Sternwarte in Bogenhausen

$$48^0\ 8'\ 45{,}18'' \quad \text{und} \quad 29^0\ 16'\ 15{,}70''$$

die entsprechenden Koordinaten im preußischen System:

$$\varphi = 48^0\ 8'\ 47{,}80'' \pm 0{,}03 \qquad \lambda = 29^0\ 16'\ 28{,}52'' \pm 0{,}04.$$

Diese Koordinaten sind geodätisch bestimmte und zwar vom Rauenberg [2]) in Berlin aus. Die astronomisch bestimmten

---

[1]) Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, S. 553.

[2]) Die geographischen Koordinaten des Rauenberges sind:

$$\varphi = 52^0\ 27'\ 12{,}021'', \quad \lambda = 31^0\ 2'\ 4{,}928'' \text{ ö. v. F.}$$

Siehe Hegemann, Lehrbuch der Landesvermessung. Berlin 1906, S. 206.

Koordinaten für die Westkuppel der Sternwarte in Bogenhausen sind folgende. Die Breite ist nach Herrn Dr. Pummerer[1]) 48° 8′ 45,22″ ± 0.01. Um die Länge vergleichbar mit der des Rauenberges zu finden, ziehen wir von der im preußischen System angenommenen Länge dieses Punktes im Betrag von 31° 2′ 4,93″ den aus der Albrechtschen Ausgleichung[2]) hervorgegangenen Längenunterschied Rauenberg-Sternwarte Bogenhausen = 1° 45′ 35,81″ ab und erhalten so als astronomische Länge der Westkuppel der Sternwarte Bogenhausen 29° 16′ 29,12″ ± 0,″52, wobei der mittlere Fehler nach den Ausgleichungsergebnissen des mitteleuropäischen Netzes von telegraphischen Längenbestimmungen geschätzt ist. Aus der Differenz der geodätischen und der astronomischen Koordinaten der Sternwarte Bogenhausen läßt sich die relative Lotabweichung derselben gegen den Rauenberg unter Zugrundelegung des Besselschen Erdellipsoides bestimmen, wobei aber noch die Unrichtigkeit der Längenmaße der preußischen Landesaufnahme, die sich infolge unseres Anschlusses auch voll auf den bayrischen Teil der geodätischen Verbindung übertragen hat, zu berücksichtigen ist. Ehe das geschieht, soll die Länge des geodätischen Bogens Rauenberg-München samt seinen Azimuten und den Übertragungskoeffizienten bestimmt werden, welch letztere gestatten die Wirkung einer Lotabweichung in Rauenberg und kleiner Abweichungen des Referenzellipsoides vom Besselschen Ellipsoid auf die Lotabweichung der Münchener Sternwarte zu berechnen. Die Differentialformeln hiezu sind von Herrn Helmert in den Veröffentlichungen des K. Preußischen Geodätischen Instituts, Lotabweichungen, Heft 1, Berlin 1886 gegeben. Setzt man in den Seite 2 und 3 des Tafelanhanges zusammengestellten Formeln:

$$\begin{aligned} \text{Rauenberg } (i) \quad & B_i = 52^\circ\,27'\,12{,}02'' \\ \text{Sternwarte Bogenhausen } (k) \quad & B_k = 48^\circ\ 8'\,47{,}80'' \\ & l = L_k - L_i = -\ 1^\circ\,45'\,36{,}41'', \end{aligned}$$

[1]) Neubestimmung der Polhöhe Münchens nach der Horrebow-Methode. Inauguraldissertation 1911, S. 47.

[2]) Astronomische Nachrichten Nr. 3993—94. Bd. 167, S. 158.

so wird die Entfernung $S = 495102{,}6$ m, das Azimut

$$T_{ik} = 195^0\,21'\,4{,}555''$$

(in Rauenberg) und

$$T_{ki} = 13^0\,59'\,45{,}719''$$

(in Bogenhausen).

Mit diesen Werten werden die 18 Übertragungskoeffizienten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ gerechnet:

$\mathfrak{p}_1 = -1{,}00026$	$\mathfrak{q}_1 = -0{,}03421$	$\mathfrak{r}_1 = -0{,}06170$
$\mathfrak{p}_2 = -0{,}01489$	$\mathfrak{q}_2 = -0{,}08925$	$\mathfrak{r}_2 = -0{,}97199$
$\mathfrak{p}_3 = 0{,}03142$	$\mathfrak{q}_3 = 0{,}01170$	$\mathfrak{r}_3 = 0{,}01170$
$\mathfrak{p}_4 = -0{,}01878$	$\mathfrak{q}_4 = 0{,}11257$	$\mathfrak{r}_4 = -1{,}22594$
$\mathfrak{p}_5 = -15555{,}0$	$\mathfrak{q}_5 = -5793{,}9$	$\mathfrak{r}_5 = -5793{,}9$
$\mathfrak{p}_6 = 3443{,}4$	$\mathfrak{q}_6 = -3642{,}2$	$\mathfrak{r}_6 = -3803{,}5.$

Zur Überführung auf internationale Meter hat man den Logarithmus von S um 58 Einheiten der 7. Dezimale zu vergrößern, was einem $\delta S = 6{,}55$ m gleichkommt. Diese 6,55 m bewirken eine Änderung der Breite um $\delta\varphi = -\mathfrak{p}_3\,\delta S = -0{,}21''$ und eine solche der Länge von $\delta\lambda = -\mathfrak{q}_3\,\delta S = -0{,}08''$, so daß die richtiggestellten, geodätisch ermittelten geographischen Koordinaten von Sternwarte Bogenhausen sind:

$$\varphi_g = 48^0\,8'\,47{,}59'' \pm 0{,}03'' \qquad \lambda_g = 29^0\,16'\,28{,}44'' \pm 0{,}04''.$$

Verglichen mit den astronomisch ermittelten geographischen Koordinaten

$$\varphi_a = 48^0\,8'\,45{,}22'' \pm 0{,}01'' \qquad \lambda_a = 29^0\,16'\,29{,}12'' \pm 0{,}52''$$

ergeben sich die Lotabweichungen in Breite und Länge:

$\xi = -2{,}37'' \pm 0{,}03$	nach Norden (Zenitabweichung nach Süden)
$(\lambda) = 0{,}68'' \pm 0{,}52$	nach Westen (Zenitabweichung nach Osten).

Die ostwestliche Lotabweichungskomponente läßt sich noch auf eine zweite Art berechnen, nämlich aus der Azimutüber-

tragung. Das von Rauenberg nach der Sternwarte Bogenhausen übertragene Azimut ergab eine Verdrehung des alten bayrischen Koordinatensystems um $12.515'' \pm 0.63$ in dem Sinn, daß dadurch die neuen Azimute um diesen Betrag größer werden. Mit Rücksicht auf die Korrektur der Entfernung Rauenberg-Sternwarte um 6,55 m ändert sich diese Verdrehung um $-r_3 \delta S = -0.058''$: sie wird also $12.515'' - 0.058'' = 12.457'' \pm 0.63''$. Die astronomische Bestimmung in München hat jene Verdrehung zu $14.50'' \pm 0.73''$ ergeben. Es besteht also ein Unterschied zwischen astronomischem und geodätischem Azimut im Betrage von $2.043'' \pm 0.97''$. Diesem entspricht eine westliche Lotabweichung in Länge im Betrage von $(\lambda) = (2.43'' \pm 0.97'') : \sin q = 2.74'' \pm 1.30''$. Wie man sieht, ist diese Bestimmung der Lotabweichung aus dem Azimut erheblich unsicherer als jene aus der Längenübertragung. Verbindet man beide Bestimmungen mit Rücksicht auf ihre mittleren Fehler zu einem Gesamtmittel, so wird dasselbe: $0{,}97'' \pm 0{,}48''$.

Der Widerspruch gegen die Laplacesche Bedingung, nach welcher beide Bestimmungen der ostwestlichen Lotabweichung gleiche Werte ergeben müßten, beträgt:

$$2{,}74'' \pm 1{,}30'' - 0{,}68'' \pm 0{,}52'' = 2{,}06'' \pm 1{,}40''.$$

Führt man statt der Lotabweichung in Länge jene in Zenitdistanz ein, so werden die Zahlen im Verhältnis $\cos q$ kleiner und man erhält für die ostwestliche Zenitabweichung $\eta = (\lambda) \cos q = 0.64'' \pm 0.32''$ (astronomischer Zenit östlich vom geodätischen). Um diesen Betrag hängt also das Lot auf der Sternwarte Bogenhausen gegen Westen unter Zugrundelegung des Besselschen Ellipsoides. Der Widerspruch gegen die Laplacesche Bedingung wird in Zenitdistanz: $1.37'' \pm 0.93''$.

Die soeben ermittelten Lotabweichungen für die Sternwarte Bogenhausen beziehen sich auf das Besselsche Ellipsoid als Referenzellipsoid und die Annahme, daß Rauenberg die Lotabweichungen Null habe. Nun hat Herr Helmert gezeigt, daß für Mitteleuropa ein besseres Referenzellipsoid erhalten

wird, wenn man unter Beibehaltung der Abplattung die große Halbachse des Besselschen Ellipsoides um 1 : 10000 vergrößert. Außerdem hat er als wahrscheinliche Werte der Lotabweichung in Rauenberg die Werte $\xi_i = 5''$ und $\lambda_i = 4''$ gefunden [1]). Um nun für diese Ausgangswerte gültigen Lotabweichungen für die Sternwarte Bogenhausen zu finden, bedienen wir uns der schon erwähnten Helmertschen Übertragungsformeln [2]), welche ausgehend von den geodätisch ermittelten Koordinaten der Bogenhauser Sternwarte im preußischen System folgende Lotabweichungen ξ_k, λ_k liefern:

$$\begin{aligned}\xi_k &= -2{,}58'' - 5{,}00\,\mathfrak{p}_1 - 4{,}00\,\mathfrak{p}_2 + 6{,}55\,\mathfrak{p}_3 + 3{,}17\,\mathfrak{p}_4 + 0{,}0001\,\mathfrak{p}_5 \\ &= -2{,}58'' + 5{,}014'' + 0{,}060'' + 0{,}206'' - 0{,}060'' - 1{,}556'' \\ &= 1{,}084'' \pm 0{,}031''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k &= 0{,}60'' - 5{,}00\,\mathfrak{q}_1 - 4{,}00\,\mathfrak{q}_2 + 6{,}55\,\mathfrak{q}_3 + 3{,}17\,\mathfrak{q}_4 + 0{,}0001\,\mathfrak{q}_5 \\ &= 0{,}60'' - 0{,}171'' - 0{,}537'' + 0{,}077'' + 0{,}356'' - 0{,}579'' \\ &= -0{,}354'' \pm 0{,}52''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k &= 2{,}666'' - 5{,}00\,\mathfrak{r}_1 - 4{,}00\,\mathfrak{r}_2 + 6{,}55\,\mathfrak{r}_3 + 3{,}17\,\mathfrak{r}_4 + 0{,}0001\,\mathfrak{r}_5 \\ &= 2{,}666'' - 0{,}309'' + 3{,}888'' + 0{,}077'' - 3{,}890'' - 0{,}579'' \\ &= 1{,}853'' \pm 1{,}30''.\end{aligned}$$

Zur Erläuterung sei bemerkt, daß die Zahlen 2,58" und 0,60" aus den Differenzen der astronomischen und der geodätischen Koordinaten der Sternwarte im preußischen System herrühren. Die Zahl 2,666" ist die entsprechende Azimutdifferenz 1,985" dividiert durch den Sinus der Breite der Sternwarte. Die Zahl 6,55 stammt von der Verbesserung der Entfernung und 3,17 ist die zu der Lotabweichungskomponente $\lambda_i = 4''$ in Rauenberg gehörige Azimutdifferenz. Nimmt man aus den beiden Werten für λ_k das entsprechende Mittel, so findet man $\lambda_k = -0{,}05'' \pm 0{,}48''$.

Durch Einführung des Helmertschen Erdellipsoides und der Lotstörungen für Rauenberg ist die Lotstörung für München

[1]) Veröffentlichungen des K. Preußischen Geodätischen Instituts. Lotabweichungen, Heft IV. Berlin 1909, S. 94.

[2]) Siehe das Zitat S. 8.

(bzw. Sternwarte Bogenhausen) nicht nur wesentlich kleiner geworden, sondern es findet jetzt auch entsprechend dem positiven Vorzeichen von $\xi_k = 1{,}084''$ eine schwache Ablenkung des Lotes gegen die Alpen zu statt. Eine Ost-West-Komponente der Lotabweichung ist nicht mehr vorhanden. Der Widerspruch gegen die Laplacesche Bedingung hat sich nur unbedeutend vergrößert; er beträgt jetzt in Länge: $2{,}207'' \pm 1{,}40''$, in Zenitdistanz: $1{,}47'' \pm 0{,}93''$.

Der geringe Betrag der Lotabweichung gegen die Alpen erklärt sich daraus, daß bei der Lage von München in einiger Entfernung vom Alpenfuße die Anziehung der sichtbaren Bergmassen schon großenteils durch die Wirkung des unterirdischen Massendefektes aufgehoben wird.

Zum Schlusse folgt noch eine Zusammenstellung der geographischen Näherungskoordinaten $\varphi_p \lambda_p$ der Punkte des zukünftigen bayrischen Netzes im preußischen System, welche mit Zugrundelegung der im vorhergehenden ermittelten Konstanten durch folgende Formeln aus den Orffschen Koordinaten $\varphi_b \lambda_b$ berechnet wurden:

$$\varphi_p = \varphi_b + 0{,}0646 f \cdot 10^{-4} + 12{,}515 h + 2{,}627$$
$$\lambda_p = \lambda_b + 0{,}0646 f' 10^{-4} + 12{,}515 h' + 2{,}627 (1 + k').$$

Da die φ_b und λ_b nur auf 2 Dezimalen der Sekunde angegeben sind, so haben die gerechneten 3. Dezimalen in den φ_p, λ_p keine tiefere Bedeutung. Für die Neupunkte des Netzes hat das K. Katasterbüro vorläufige rechtwinklige Koordinaten ermittelt, die von den Herren Clauß und Felsenstein auf meinen Wunsch in die φ_b und λ_b umgesetzt wurden. Hiefür, sowie für die Berechnung der zugehörigen Koeffizienten f, h usw. bin ich ihnen zu bestem Dank verpflichtet. Desgleichen Herrn Privatdozent Dr. Deimler, welcher mich bei den Ausgleichungsrechnungen und bei der Koordinatentransformation unterstützt hat.

Tabelle III.

Näherungskoordinaten der künftigen bayrischen Hauptdreiecksnetzpunkte im preußischen System.

		Geographische Breite	Geographische Länge ö. v. F.	
1	Aenger	47° 43′ 4,925	27° 49′ 39,880	
2	Arber	49° 6′ 48,836	30° 48′ 14,017	
3	Asbach	48° 25′ 30,845	28° 56′ 3,607	Neuer Punkt
4	Asten	48° 5′ 58,150	30° 23′ 34,660	
5	Aufkirchen bei Erding	48° 18′ 26,650	29° 31′ 29,706	
6	Braunau	48° 17′ 36,720	30° 42′ 0,602	
7	Brennberg	49° 4′ 21,835	30° 4′ 2,996	
8	Dillenberg	49° 27′ 12,212	28° 26′ 52,238	
9	Döbra	50° 16′ 45,9792	29° 18′ 40,5978	Preuß. Punkt
10	Eggersdorf	48° 34′ 13,738	29° 38′ 51,611	Neuer Punkt
11	Eichelberg	49° 5′ 8,093	29° 22′ 53,601	
12	Frankenwarte . . .	49° 46′ 58,582	27° 34′ 29,198	„ „
13	Groß-Gleichenberg .	50° 23′ 21,8296	28° 15′ 37,3092	Preuß. Zentrum
14	Günzelhofen	48° 14′ 28,581	28° 47′ 9,943	Neuer Punkt
15	Habsberg	49° 18′ 51,651	29° 18′ 0,217	
16	Haid	48° 40′ 9,116	30° 27′ 53,562	
17	Hesselberg	49° 4′ 10,928	28° 11′ 39,129	
18	Hochgern	47° 45′ 6,978	30° 11′ 5,454	
19	Hoheleite	49° 26′ 2,377	27° 55′ 58,056	
20	Hohenstein	49° 35′ 15,636	29° 5′ 25,085	
21	Johannesbrunn . . .	48° 29′ 17,517	30° 8′ 32,712	
22	Kapellenberg . . .	50° 11′ 21,463	29° 58′ 6,922	Sächs. Punkt
23	Königsberg	48° 54′ 13,065	29° 12′ 4,183	Neuer Punkt
24	Kreuzberg	50° 22′ 16,4473	27° 38′ 53,1882	Preuß. Punkt
25	Mitbach	48° 9′ 55,170	29° 41′ 52,062	
26	Mühlhausen	48° 41′ 28,725	30° 2′ 23,878	Neuer Punkt
27	München	48° 8′ 22,627	29° 14′ 27,822	
28	Murleinsnest	49° 53′ 26,454	28° 5′ 12,370	
29	Oberhof	48° 4′ 58,467	30° 1′ 53,951	„ „
30	Ochsenkopf	50° 1′ 54,898	29° 28′ 39,781	
31	Peissenberg	47° 48′ 6,526	28° 40′ 49,776	

		Geographische Breite	Geographische Länge ö. v. F.	
32	Pöttmes	48° 34′ 14,233	28° 43′ 10,630	Neuer Punkt
33	Rauchwanne	45° 46′ 2,518	28° 10′ 30,787	
34	Roggenburg	48° 16′ 32.351	27° 53′ 46,094	
35	Rohr	48° 47′ 9.025	29° 37′ 33,326	
36	Schweitenkirchen . .	48° 30′ 23.793	29° 16′ 29.694	
37	Silberhütte	49° 45′ 32,129	30° 3′ 58,114	
38	Stauffersberg . . .	48° 26′ 44.365	28° 23′ 0.606	
39	Teuchatz	49° 51′ 40.529	28° 44′ 28,720	
40	Wendelstein	47° 42′ 15,713	29° 40′ 49,014	
41	Wülzburg	49° 1′ 34,009	28° 40′ 21.120	

Untersuchung regionaler und lokaler Bodensenkungen im oberbayerischen Alpenvorland durch Feinnivellement.

Von **M. Schmidt.**

Mit 4 Textfiguren.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. März 1914.

Auf der ersten Erdmessungskonferenz in Berlin im Jahre 1864 wurde beschlossen, in allen am Erdmessungsunternehmen beteiligten Ländern längs der Eisenbahnen und Landstraßen Nivellements erster Ordnung (Präzisionsnivellements) vorzunehmen, welche als Grundlage für alle weiteren Höhenmessungen und für Untersuchungen über Hebungen und Senkungen des Bodens dienen sollten.

Mit der Aufstellung allgemeiner Grundsätze für die Ausführung derartiger Nivellements befaßte sich sodann die im Jahre 1867 in Berlin abgehaltene zweite allgemeine Konferenz der Bevollmächtigten der an der Europäischen Gradmessung teilnehmenden Staaten, wobei der zu dieser Konferenz eingeladene Geologe, Professor Dr. Sartorius von Waltershausen aus Göttingen, den Vorschlag machte, die Höhenlage der bei diesen Nivellements festgelegten Höhenmarken später in nicht zu langen Zwischenräumen, womöglich von 10 zu 10 Jahren, zu kontrollieren und auf die Möglichkeit hinwies, vertikale Bewegungen des Erdbodens durch in langen Fristen wiederholte Nivellements festzustellen.

In der Schweiz wurde mit der Durchführung von Feinnivellements bereits im Jahre 1864 der Anfang gemacht. In Preußen begann das unter General von Baeyers Leitung stehende geodätische Institut in Berlin im Frühjahre 1867 mit diesen

Arbeiten und auch in Bayern sind Feinnivellements unter v. Bauernfeinds Leitung durch die Erdmessungskommission der K. Akademie der Wissenschaften im Spätherbst des Jahres 1868 auf den das Fichtelgebirge umfassenden Bahnlinien in Angriff genommen und in der folgenden Zeit über das ganze Land diesseits und jenseits des Rheines ausgedehnt worden.

Einen vorläufigen Abschluß haben diese Arbeiten durch Veröffentlichung der Nivellementsergebnisse im Jahre 1893 für das rechtsrheinische Bayern und im Jahre 1895 für die Pfalz gefunden. Die gesamte Länge der bis dahin nivellierten Linien beträgt 3501 km im diesseitigen Bayern und 571 km in der Pfalz, somit zusammen 4072 km.

Aber schon während der Zeit der erstmaligen Durchführung dieser Nivellements sind wiederholte Nivellierungen einzelner Linien zur Aufklärung von Nivellierfehlern und Höhenänderungen von Festpunkten vorgenommen worden.

Die Zeiten der erstmaligen und wiederholten Ausführung dieser Nivellements und ihre Längen sind:

1.	Schleife um das Fichtelgebirge . . .	1868/82	243 km
2.	Neuenmarkt—Kulmbach—Lichtenfels .	1869/83	43 „
3.	Coburg—Lichtenfels—Bamberg . . .	1869/83	53 „
4.	Lindau—Bregenz - Fußach	1869/85	20 „
5.	Partenstein—Aschaffenburg—Kahl . .	1871/86	50 „
6.	Schwarzenacker—Biebermühle—Kaiserslautern	1892/93	59 „
7.	Hochspeyer—Neustadt—Monsheim . .	1892/93	63 „
8.	Marnheim—Langmeil—Kreuznach . .	1892/93	55 „
9.	Böhl—Mutterstadt	1892/93	9 „
		in Summa	595 km

Unter diesen Nivellementswiederholungen ist als die bemerkenswerteste diejenige des Polygons um das Fichtelgebirge hervorzuheben, welches die Orte Neuenmarkt, Oberkotzau, Eger, Weiden, Bayreuth, Neuenmarkt verbindet.

Diese in den Jahren 1868 und 1869 zum ersten Male nivellierte Schleife besitzt einen Umfang von 243,5 km und

ergab einen Schlußfehler von 108 mm. Ein im Jahre 1878 ausgeführtes einfaches Kontrollnivellement ließ diesen Schlußfehler unaufgeklärt, da sich in den einzelnen Teilstrecken nahezu die gleichen Höhenunterschiede wie früher ergaben. Die Fehlerursache mußte daher in einer ungünstigen Fehleranhäufung auf den langen und steilen Steigungen der Strecken zwischen Neuenmarkt und Stammbach, Oberkotzau und Asch, sowie Asch und Franzensbad gesucht werden.

Von entscheidendem Einfluß auf die im Jahre 1882 erfolgte Wiederholung des Nivellements der Fichtelgebirgsschleife war der durch den 3. Internationalen Geographischen Kongreß im September 1881 in Venedig gefaßte Beschluß „die Internationale Geodätische Vereinigung für eine Europäische Gradmessung möge das Feld ihrer Untersuchungen auch auf die durch erneute Präzisionsnivellements meßbaren Bewegungen der Erdrinde ausdehnen".

Durch die wiederholte Nivellierung der Fichtelgebirgsschleife sollte nun der Nachweis einer solchen Erdkrustenbewegung versucht werden. Das neue Nivellement hatte jedoch nur eine Verminderung des Schleifenschlußfehlers auf 36 mm und des mittleren Kilometerfehlers von 7 auf 2,3 mm als Ergebnis; eine in der Zwischenzeit von 13 Jahren auf der Nivellementslinie etwa erfolgte Bodenbewegung war indessen nicht erkennbar.

In der VI. Mitteilung über das Bayerische Präzisionsnivellement, München 1883, sind die Differenzen der Ergebnisse der beiden Nivellements der Fichtelgebirgsschleife graphisch dargestellt. Die größten Beträge derselben sind bei Falls mit 7 cm und zwischen Haßlau und Franzensbad mit 13 cm angegeben.

Erklärt wurden diese Differenzen durch ungewöhnlich starke Einflüsse der Witterungs- und Bodenverhältnisse auf das Nivellement und durch Änderungen der die Festpunkte tragenden Kunstbauten der Bahn, welche auch lange Zeit nach ihrer baulichen Herstellung, besonders durch den darüber laufenden Verkehr schwerer Lasten, noch Senkungen erfahren können.

Hiezu mag bemerkt werden, daß Senkungen von Erddämmen, die aus zum Rutschen geneigtem Material bestehen, in niederschlagsreichen Witterungsperioden bisweilen sogar in einer die Sicherheit des Bahnbetriebes gefährdenden Größe eintreten und nach unseren eigenen auf der Linie Traunstein—Teisendorf in Oberbayern gemachten Erfahrungen sogar während der Nivellierarbeit selbst Veränderungen im Latten- und Instrumentenstand hervorrufen.

Mit der Erforschung neuzeitlicher Bodenbewegungen hat sich ferner, angeregt durch ein Ersuchen des im Jahre 1903 in Wien abgehaltenen Internationalen Geologenkongresses, die Internationale Vereinigung der Akademien befaßt und bei der Erdmessungskommission ein gemeinsames, internationales Zusammenwirken angeregt, um durch in langen Fristen wiederholte Feinnivellements zu untersuchen, ob insbesondere in den von Erdbeben heimgesuchten Gegenden die Gebirgsketten unveränderlich fest sind, oder ob sie nicht Hebungen oder Senkungen erfahren.

Über diese Frage hat der Direktor des französischen Generalnivellements Herr Lallemand auf der 15. Konferenz der Internationalen Erdmessung in Budapest 1906 einen eingehenden Bericht[1]) erstattet, in welchem er nach einer geschichtlichen Einleitung über frühere Untersuchungen dieser Art, die in Frankreich und Japan, in der Umgegend von Agram, am Genfer- und Bodensee, sowie auf dem Telegraphenberg bei Potsdam zur Ausführung gekommen sind, die großen Schwierigkeiten derartiger Untersuchungen bespricht und eingehende Vorschläge für das bei solchen Forschungen anzuwendende Untersuchungsverfahren macht.

Der Berichterstatter empfiehlt nicht nur in den von Erdbeben betroffenen Gegenden, sondern auch in allen übrigen an den Erdmessungsarbeiten beteiligten Ländern zwei oder dreimal im Jahrhundert einige zu einem Netz verbundene Hauptlinien

[1]) Verhandlungen der 15. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung in Budapest. II. Teil. Spezialberichte S. 74. Berlin 1908.

wiederholt zu nivellieren, welche die Hauptbergzüge des Landes überschreiten und sich bis an die Meeresküsten erstrecken, wobei die Längenfehler der Nivellierlatten besonders sorgfältig zu berücksichtigen und die übrigen Nivellierfehler in engeren Grenzen als bisher zu halten seien.

Als noch zulässige Fehlerwerte für die in beiden Richtungen auszuführenden Nivellements schlägt Lallemand vor:

± 0,8 mm pro Kilometer für den wahrscheinlichen Wert des zufälligen Fehlers,

± 0,15 mm pro Kilometer für den wahrscheinlichen Wert des systematischen Fehlers,

± 0,015 mm pro Meter für den Maßvergleichungsfehler der Lattenteilungen,

während nach den im Jahre 1867 von der zweiten Erdmessungskonferenz in Berlin aufgestellten Grundsätzen der wahrscheinliche Fehler der Höhendifferenz zweier um 1 km entfernter Punkte im allgemeinen nicht 3 mm und in keinem Falle 5 mm überschreiten soll.

Die im Jahre 1912 in Hamburg abgehaltene 17. Allgemeine Konferenz der Internationalen Erdmessung hat sodann in Anbetracht der großen Fortschritte, welche die Nivellierkunst seit dem Jahre 1867 gemacht hat, die Grenzwerte der bei Feinnivellements für Erdmessungszwecke zulässigen Nivellierfehler beträchtlich herabzusetzen beschlossen und für in beiden Richtungen ausgeführte Feinnivellements von hoher Genauigkeit (nivellements de haute précision) neue Fehlergrenzen festgesetzt, die jedoch die von Lallemand auf der Budapester Konferenz im Jahre 1906 vorgeschlagenen Grenzwerte nicht ganz erreichen. Diese von der Hamburger Konferenz angenommenen neuen Fehlergrenzen sind:

± 1 mm pro Kilometer für den wahrscheinlichen Wert des zufälligen Fehlers,

± 0,2 mm pro Kilometer für den wahrscheinlichen Wert des systematischen Fehlers.

Die entsprechenden mittleren Fehlerwerte werden durch Multiplikation der wahrscheinlichen Fehlerwerte mit $\frac{3}{2}$ aus letzteren erhalten.

Es mag bemerkt werden, daß die durch die Bayerische Erdmessungskommission seit dem Jahre 1901 ausgeführten Feinnivellements, deren Ergebnisse in Heft 1 der Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivellement 1908 veröffentlicht worden sind, bereits diesen erhöhten Anforderungen genügen.

Vertikale Bodenbewegungen können durch wiederholte Nivellierung von Höhenfestpunkten nur dann mit Sicherheit nachgewiesen werden, wenn letztere an anstehendem Gestein, d. h. an natürlichen Felsen, oder an größeren Bauwerken angebracht sind, deren Fundamente bis in frostsichere Tiefe hinabreichen und auf möglichst unveränderlichem festen Untergrund stehen.

Kleinere Kunstbauten an Straßen, Wasserläufen und Eisenbahnen gewähren zumeist nicht die erforderliche Sicherheit, da insbesondere an letzteren durch das Darüberlaufen von schweren Verkehrslasten äußerlich unbemerkbare Veränderungen eintreten können; sie eignen sich daher nicht zu Trägern von auf die Dauer zuverlässigen Höhenfestpunkten. Insbesondere sind auch die an den Verkehrswegen stehenden Abteilungssteine zu dem genannten Zweck unbrauchbar, da sie zumeist nicht bis unter die Frostgrenze in den Boden reichen, welche in Mitteldeutschland 0,50 bis 0,70 m, in Norddeutschland selbst bis zu 1,25 m unter der Bodenoberfläche liegt.

Am zuverlässigsten sind die an gut unterhaltenen, unter amtlichem Schutz stehenden, massiven Gebäuden angebrachten Höhenmarken. Diese letzteren verdienen daher bei Untersuchungen über Bodenbewegung in erster Linie Beachtung. Derartige Hauptfestpunkte sind bei Anlage des bayerischen Nivellementsnetzes ursprünglich in einer Anzahl von 78 Stück hergestellt und zur besseren Versicherung der 44 Netzknotenpunkte in den Jahren 1901 bis 1903 um weitere 142 vermehrt worden.

Diese Vermehrung der gut versicherten Höhenpunkte an den Netzknotenpunkten wird von besonderem Nutzen sein, wenn künftig die auf den Eisenbahnlinien ausgeführten Feinnivellements durch Einschalten weiterer, längs der Straßen und Wasserläufe geführter Nivellementszüge ergänzt, oder zur Wiederherstellung verloren gegangener Festpunkte und zur Untersuchung von Erdkrustenbewegungen wiederholt werden.

Die Feststellung von Erdkrustenbewegungen durch den Vergleich von Nivellementsergebnissen älteren und neueren Datums ist im bayerischen Landesnivellement dadurch erschwert, daß die Netzlinien desselben entgegen den von der zweiten Berliner Erdmessungskonferenz aufgestellten Grundsätzen vom Jahre 1867 im allgemeinen nicht in beiden Richtungen nivelliert worden sind. Es muß daher hier in höherem Maße als sonst mit der Möglichkeit des Vorkommens von Irrtümern in den Beobachtungsergebnissen gerechnet werden, welche durch die Schleifenschlußfehler allein, wenn der Umfang der Schleifen ein beträchtlicher ist, nicht leicht nachzuweisen sind.

Die Gründe, welche den Leiter der bayerischen Nivellementsarbeiten veranlaßt haben, von der durch die Rücksicht auf größere Sicherheit gegen Beobachtungsfehler gebotenen Wiederholung der Liniennivellements in entgegengesetzter Richtung abzusehen, sind wohl in der Notwendigkeit an Zeit und Kosten zu sparen zu suchen, denn ein in beiden Richtungen ausgeführtes Nivellement erfordert nahezu die doppelte Zeit und den doppelten Kostenaufwand, als das einmalige Nivellement. Dazu kam noch, daß man dem angewendeten Nivellierverfahren mit „doppelten Anbindepunkten“, sowie späterhin mit doppelt übereinander gelegten Fußplatten und mit „Reversionslatten“ dieselbe Zuverlässigkeit glaubte zuschreiben zu dürfen, wie einem mit völlig verschiedenen Instrumenten- und Lattenstellungen in beiden Richtungen ausgeführten Doppelnivellement.

Der beim bayerischen Nivellierverfahren aus den Doppelmessungen der Höhenunterschiede der beiden Lattenstandorte in jeder Aufstellung des Nivellierinstruments sich ergebende

sogenannte mittlere Standfehler ist zwar gering und beträgt nur $\pm 0{,}76$ mm für 1 km Nivellementslänge, dagegen zeigt der aus den Schleifenschlußfehlern durch die Netzausgleichung ermittelte Gesamtfehler für 1 km Länge und 10 m Höhenunterschied den dreimal so großen Wert von $\pm 2{,}3$ mm. Die Erklärung dieser vergleichsweise beträchtlichen Fehlergröße ist darin zu finden, daß bei den vor dem Jahre 1882 ausgeführten Nivellements nur sehr selten Lattenvergleichungen vorgenommen wurden, sowie darin, daß die nur einseitig ausgeführten Liniennivellements keine genügende Sicherheit gegen Refraktionseinflüsse bieten, die sich zwar in ihrer Wirkung in den einzelnen Schleifen gegenseitig aufheben oder stark abschwächen können, in der Netzausgleichung dagegen hervortreten.

Bei den seit dem Jahre 1906 durch die Bayerische Erdmessungskommission in Oberbayern ausgeführten Feinnivellements von nunmehr 334 km Gesamtlänge, bei welchen Gewicht auf sorgfältige, meist täglich ausgeführte Lattenvergleichungen gelegt worden ist, haben sich in der Tat wesentlich geringere Fehlerbeträge ergeben und zwar fand sich trotz großer nivellierter Höhenunterschiede aus der Linienausgleichung der nach längerer Zwischenzeit in entgegengesetzter Richtung ausgeführten Doppelnivellements der mittlere zufällige unregelmäßige Kilometerfehler zu $\pm 1{,}18$ mm und der entsprechende wahrscheinliche Fehler zu $\pm 0{,}79$ mm; der mittlere und wahrscheinliche systematische Fehler wurde zu $\pm 0{,}21$ mm bzw. $\pm 0{,}14$ mm gefunden, während der mittlere Standfehler sich auf $\pm 0{,}47$ mm stellt. Die Netzausgleichung für das aus 3 Schleifen und 10 Einzellinien bestehende Netz ergab einen mittleren, beziehungsweise wahrscheinlichen Kilometerfehler im Betrage von $\pm 1{,}65$ mm und $\pm 1{,}11$ mm.

Diese Fehlerwerte entsprechen somit den von der Hamburger Erdmessungskonferenz im Jahre 1912 für Feinnivellements von hoher Genauigkeit gestellten Anforderungen.

Die Ergebnisse dieser in neuester Zeit in Oberbayern ausgeführten Feinnivellements können daher unbedenklich zur

sicheren Feststellung kleiner Höhenänderungen dienen, auch wenn diese nur wenige Zentimeter betragen.

I. Regionale Höhenänderungen der Inn-Salzachplatte.

In Heft 1 der Ergänzungsmessungen zum Bayerischen Präzisionsnivellement ist mitgeteilt, daß bei den in den Jahren 1904/05 auf der Staatsstraße Passau—Freilassing ausgeführten Nivellements zwischen den Höhenmarken am südlichen Tor der Stadt Laufen an der Salzach und am Stationsgebäude in Freilassing ein um 84,7 mm größerer Höhenunterschied als bei dem erstmaligen Nivellement dieser Strecke im Jahre 1887 gefunden wurde.

Dieser Widerspruch konnte durch sorgfältige Nachprüfung der betreffenden Beobachtungshefte und Rechenlisten nicht aufgeklärt werden. Bei der geringen Entfernung der beiden Höhenfestpunkte von nur 14 km ist derselbe auch sicher nicht durch Anhäufung kleiner zufälliger Beobachtungsfehler entstanden. Da die fragliche Linie zugleich Netzgrenzlinie ist, so fehlte leider die sonst mögliche Probe durch eine anstoßende weitere Schleife.

Zur zweifelsfreien Feststellung etwaiger Höhenänderungen weiterer Punkte derselben Linie ist im Jahre 1906 die ganze 64 km lange Netzlinie Marktl—Freilassing in beiden Richtungen mit dem Ergebnis neu nivelliert worden, daß sich auch der Höhenunterschied der beiden Linienendpunkte um 73,8 mm größer fand, als im Jahre 1887. Dadurch war nunmehr auch ein Anwachsen des Schlußfehlers der 302 km langen Schleife XV Marktl—München—Rosenheim—Freilassing des Hauptnetzes von + 23 mm auf + 97 mm bedingt. Bei der großen Sorgfalt der Ausführung des neuen Nivellements in beiden Richtungen mußte das Vorkommen eines größeren Beobachtungsfehlers als nahezu ausgeschlossen betrachtet werden, zumal sein Ergebnis mit dem des zwei Jahre früher von der K. Obersten Baubehörde auf der gleichen Straße ausgeführten Feinnivellements übereinstimmte. Es erschien deshalb eine Wiederholung des Nivellements auch der übrigen Linien der Schleife XV wünschenswert.

Fig. 1.

Zugleich entstand die Frage, ob die beobachtete Höhendifferenz nicht als die Folge einer Bodensenkung durch Erdkrustenbewegung zu erklären sein könne.

Eine solche hatte nach dem hierüber vom Leiter der geologischen Landesaufnahme von Bayern, Dr. von Ammon, abgegebenen wissenschaftlichen Gutachten in jenem von Erderschütterungen vielfach betroffenen Gebiet große Wahrscheinlichkeit für sich und das um so mehr, als die Nivellementslinie an der fraglichen Stelle südlich von Laufen durch eine tektonische Hauptstörungslinie überquert wird, deren Verlauf in der beigefügten Netzskizze (Fig. 1) angegeben ist.

Die Tektonik des hier in Frage kommenden Gebietes hat kürzlich durch den Landesgeologen Dr. Otto Reis in München

eine sorgfältige Neubearbeitung erfahren. Derselbe teilte als Ergebnis seiner Untersuchungen folgendes mit:

„Zu den jüngsten Bewegungen im Alpengebiet gehören gewisse im Alpenstreichen ONO—WSW erfolgende Bewegungen, für welche man bisher nur in der Kalkzone Beweise zu haben glaubte. Diese Bewegungen haben aber offenbar auch in der Flyschzone, sogar in der Verbreitung der Molasse ihre Stelle gehabt."

„Es läßt sich nun nachweisen, daß entsprechend dem Salzburger Knie Marzoll—Salzburg eine Zerreißung der Flyschzone stattfand und ein Teil des früher östlich der heutigen Salzach gelegenen Flysches als Teisendorfer Flyschscholle sich nördlich vor den Höglberg—Teisenberg—Kachelstein—Zinnkopfzug vorgeschoben hat. Ähnlich hat sich im Kalkgebirge die sogenannte „Berchtesgadner Masse" auf die „Bayerische" emporgeschoben; der Verlauf der Verschiebung entspricht ungefähr dem Saalachtal zwischen Lofer und Reichenhall."

„Zu dieser Bewegung von ONO nach WSW gehört eine zweite Bewegungs-Gleitfläche, dies ist die als tektonische Gebirgsscheide schon lange erkannte, auch ziemlich geradlinig 5 km südlich von Traunstein und Laufen verlaufende Molassegrenze. Man war früher zum Teil geneigt in dieser Grenze den Südrand eines riesigen Grabenbruches zu sehen, in dessen Becken die Molasse zur Ablagerung gelangte; dann mußte aber bei der Alpenfaltung diese Fläche erneut eine Trennungsfläche geworden sein, an welcher die Molasse relativ gehoben, beziehungsweise die südlich liegende Flyschzone gesunken war."

„Man wird aber richtiger diese Bewegungsfläche als die Fläche einer in NO—SW bzw. ONO—WSW streichenden Bewegung von NO nach SW auffassen."

„Da derartige streichende Bewegungen in einem vorher schon stark gefalteten Gebirge auch schon emporragende Gebirgsteile treffen, so können sie nur da ein ausgiebiges Maß erreichen, wo einem sich in OW bewegenden Schollenteil relativ flach liegende Gebirgsgebiete seitlich benachbart sind; es erscheinen so im Kalkgebirge an den Rändern solcher Schub-

schollen flach unter diese untertauchende, viel jüngere Formationen, welche älteren transversalen oder diagonalen Gebirgssenken entsprechen."

„Etwas ähnliches muß man für das ganze jetzige Saalach- und Salzachgebiet zwischen Lofer und Laufen annehmen, d. h. eine Senke mit nach Ost einfallender Böschung, auf deren westlichen Flügel von Osten her die Schubmassen allmählich emporgerückt sind. Diese Bewegung hat gerade westlich von Teisendorf im Gebiet des alten Bergbaues sehr eigenartige Flözgestaltungen hervorgerufen."

„Die in der jüngsten Gegenwart etwa noch vorkommenden Niveauverschiebungen könnten als eine Fortdauer jener ostwestlichen Bewegungen mit Emporhebungen im Flyschgebiet gelten; andererseits ist aber auch in der Umgebung jener großen tektonischen Vorgänge die Möglichkeit von späteren örtlichen Eigenbewegungen der Molasse nicht von der Hand zu weisen."

„Zu erinnern wäre auch in dieser Hinsicht daran, daß manche der zu beiden Seiten der Alpen liegenden Seebecken als ältere ‚versunkene' Alpentäler gedeutet werden, was auf Senkungsbewegungen noch in glazialer und postglazialer Zeit hindeuten würde."

Bei dieser Sachlage konnte somit von einer wiederholten Nivellierung der die Schleife XV des Hauptnetzes bildenden Linien und einiger, diese Schleife transversal teilenden Querlinien, nicht allein Aufklärung über etwaige bei dem früheren Nivellement dieser Linien begangene Beobachtungsfehler erwartet werden, sondern auch Aufschlüsse über neuzeitlich eingetretene regionale Höhenänderungen in diesem Teile des nördlichen Vorlandes der bayerischen Alpen.

Die in diesem Gebiet größtenteils zum ersten Male im Jahre 1871 und neuerdings in der Zeit von 1904 bis 1912 wiederholt nivellierten Linien sind in der Netzskizze Fig. 1 dargestellt. Sie bilden ein aus drei geschlossenen Schleifen bestehendes Netz, welches das nördlich der Bahnlinie Rosenheim—Salzburg zwischen Inn und Salzach sich ausbreitende Gebirgsvorland, die sogenannte Inn-Salzachplatte, überspannt.

Tabelle I

Vergleichung der Nivellementsergebnisse.

Nr.	Streckenbezeichnung	Länge km	Höhenunterschiede ausgeglichen H_1	Höhenunterschiede gemessen 1906—1912 H_2	Höhenunterschiede gemessen 1871—1887 H_3	H_3-H_2 mm	m mm
1	Rosenheim—Mühldorf	61,9	— 37,0498	— 37,0469	— 37,0219	+ 25,0	± 24,50
2	Mühldorf—Neuötting	13,0	— 41,9440	— 41,9438	— 41,9393	+ 4,5	± 10,21
3	Neuötting—Marktl	13,2	— 0,0707	— 0,0705	— 0,0644	+ 6,1	± 10,28
4	Marktl—Tittmoning	29,5	+ 18,1495	+ 18,1521	+ 18,1640	+ 11,9	± 15,38
5	Tittmoning—Laufen-Stadt	21,5	+ 16,9147	+ 16,9173	+ 16,9225	+ 5,2	± 13,14
6	Laufen-Stadt—Freilassing	14,0	+ 16,8368	+ 16,8371	+ 16,7535	— 83,6	± 10,60
7	Freilassing—Traunstein	28,4	+ 175,8532	+ 175,8542	+ 175,8758	+ 21,6	± 15,08
8	Traunstein—Übersee	14,9	— 70,7733	— 70,7575	— 70,7737	— 16,2	± 10,92
9	Übersee—Rosenheim	38,4	— 77,9164	— 77,8971	— 77,9006	— 3,5	± 17,52
10	Mühldorf—Garching	16,5	+ 48,7324	+ 48,7374	—	—	—
11	Garching—Kirchweidach	7,8	+ 40,6936	+ 40,6974	—	—	—
12	Kirchweidach—Laufen-Bahn	29,4	— 59,5883	— 59,5819	—	—	—
13	Laufen-Bahn—Freilassing	12,0	— 19,9514	— 19,9489	—	—	—
14	Traunstein—Garching	33,9	— 137,0071	— 137,0025	—	—	—
	Summe	334,4					

Die zwischen den Hauptfestpunkten der Netzlinien neugemessenen Höhenunterschiede sind zunächst zum Zwecke einer scharfen Fehler- und Gewichtsbestimmung einer Linienausgleichung und sodann einer streng methodischen Netzausgleichung unterworfen worden, deren Ergebnisse ausführlich in Heft II der von der Bayerischen Erdmessungskommission zur Veröffentlichung kommenden Ergänzungsmessungen zum Bayerischen Präzisionsnivellement mitgeteilt werden.

Die Tabelle I enthält eine vergleichende Zusammenstellung der Nivellementsergebnisse.

Außer den Werten der ausgeglichenen Höhenunterschiede H_1 sind hier auch jene Höhenunterschiede H_2 und H_3 aufgeführt, welche sich als direkt beobachtete, unverbesserte Beobachtungswerte sowohl aus dem neuen, als auch aus dem älteren, bereits im Jahre 1871 begonnenen Nivellement ergeben haben. Die Tabelle enthält ferner neben den Unterschieden dieser Beobachtungswerte $H_3 - H_2$ auch deren mittlere Fehler m, wie sie sich nach dem Fehlersummierungsgesetz aus den mittleren Fehlern der älteren ($\pm$ 2,30 mm) und der neueren Nivellements ($\pm$ 1,65 mm) berechnen.

Eine nähere Betrachtung dieser Unterschiede und ihrer mittleren Fehler läßt erkennen, daß in der Strecke Nr. 6 Laufen-Stadt—Freilassing eine größere Differenz von 83,6 mm zwischen beiden Messungen hervortritt, die etwa den 8fachen Betrag des nach der Fehlertheorie zu erwartenden Fehlerwertes $+$ 10,6 mm zeigt und die zulässige Fehlergrenze beträchtlich überschreitet. Auch die Differenzen der Höhenunterschiede der Linien 7 und 8 sind ein und einhalbmal so groß, als die mittleren Fehler erwarten lassen und bedürfen noch der Aufklärung. Für die übrigen Strecken, die Linie Nr. 1 Rosenheim—Mühldorf ausgenommen, bleiben die Differenzen hinter den entsprechenden mittleren Fehlerwerten beträchtlich zurück. Für die Linie Nr. 1 liegt ein älteres Nivellement nicht vor; der Höhenunterschied der Linienendpunkte ist vielmehr aus der Hauptnetzausgleichung übernommen und

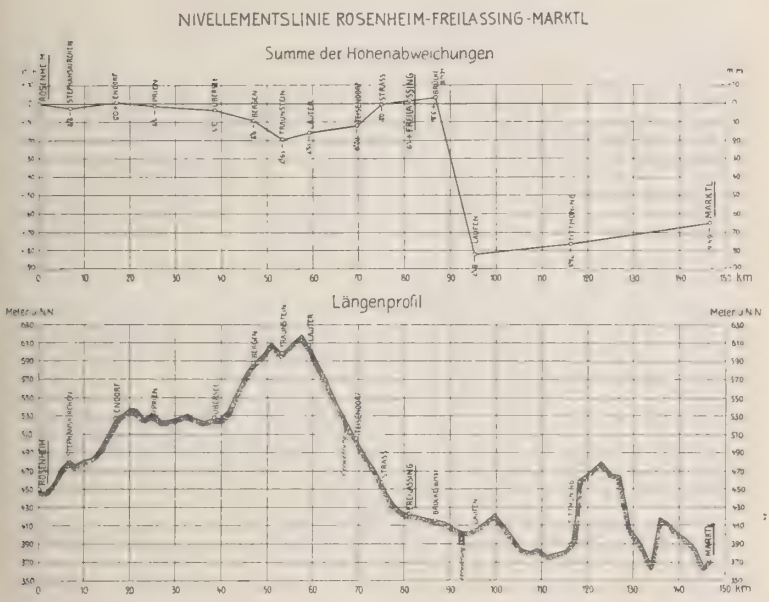


Fig. 2.

durch ein auf dem großen Umweg über München und nur in einer Richtung ausgeführtes Nivellement von 81,6 km Länge bestimmt.

Einen guten Überblick über die Unterschiede der Ergebnisse der älteren und neueren Nivellierung der Netzlinien Rosenheim—Freilassing—Marktl gewährt die in Fig. 2 gegebene graphische Darstellung der von Rosenheim ab summierten Abweichungen der in den einzelnen Teilstrecken gemessenen Höhenunterschiede.

In dieser Darstellung tritt die große Zunahme der Höhenabweichungen gerade an jener Stelle augenfällig hervor, an welcher die Nivellementslinie in der Nähe von Laufen durch die vorerwähnte Hauptverwerfungslinie überquert wird. Bemerkenswert ist außerdem noch eine deutliche Beziehung zwischen der Form der Fehlerkurve und dem in der gleichen

Figur in stark überhöhtem Maßverhältnis gezeichneten Längenprofil der Nivellementslinie, dessen höchste Erhebung bei Traunstein und Lauter der tiefsten Einsenkung der Fehlerkurve entspricht, was deutlich auf einen systematischen Nivellierfehler hinweist, der wahrscheinlich durch einen kleinen Fehler der Lattenmeterlänge entstanden ist. Die Einsenkung verschwindet fast, wenn man die Höhenunterschiede des älteren Nivellements um etwa 0,08 mm pro Meter verkleinert.

Die zwischen Laufen und der Straßenbrücke a 131 bei Freilassing festgestellte Höhenabweichung von rund 84 mm bei nur 8,9 km Länge des Nivellements, das 84 Instrumentenstände erforderte, entspricht einem systematischen Fehler von 1 mm für jeden Stand, welcher bei dem geringen Höhenunterschied von 10,2 m der beiden Streckenendpunkte keinesfalls durch einen Fehler der Lattenmeterlänge erklärt werden kann.

Die Frage ob nicht auch Strahlenbrechungseinflüsse die Ursache der großen Höhenabweichung bei Laufen gewesen sein könnten, muß verneint werden, da die durch sogenannte Bodenrefraktion hervorgerufenen Nivellierfehler die beobachteten Höhenunterschiede stets vergrößern, während hier eine Höhenabweichung im entgegengesetzten Sinne vorliegt.

Der Wunsch die bei Laufen aufgefundene Höhenabweichung aufzuklären, hat den damaligen Assistenten am geodätischen Institut der Technischen Hochschule, Diplomingenieur Dr. Franz Kohlmüller veranlaßt den Refraktionseinfluß auf die Zielhöhenablesung an Nivellierlatten durch besondere Beobachtungen näher zu untersuchen und seine Größe festzustellen. Die Ergebnisse der zu diesem Zweck ausgeführten Nivellements hat der Genannte in seiner Promotionsschrift mit dem Titel „Zur Refraktion im Nivellement, München 1912“ veröffentlicht. Danach haben sich an warmen, sonnigen Tagen und in starken Steigungen, bei welchen die eine der beiden Ziellinien in unmittelbarer Bodennähe verläuft, in der Tat unerwartet große Refraktionsfehler ergeben.

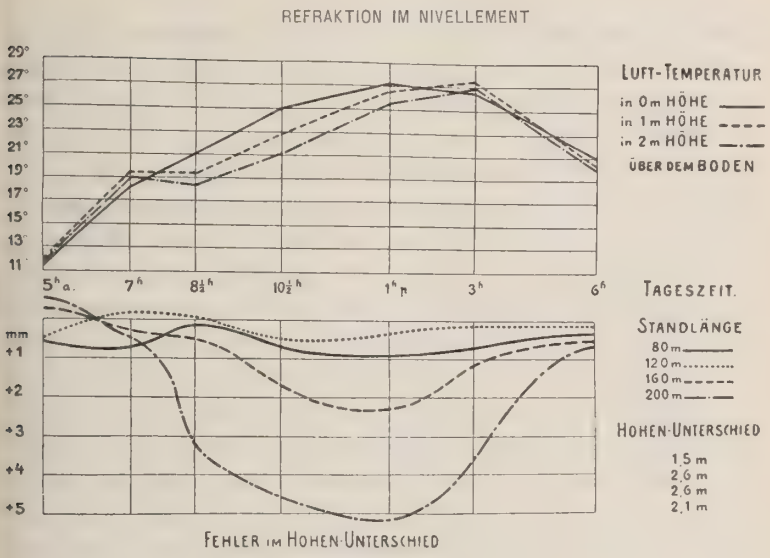


Fig. 3.

Die bei seinen zu verschiedenen Tageszeiten mit Zielweiten von 40 bis 100 m und zugleich bei hohen Tagestemperaturen ausgeführten Versuchen ermittelten Fehler im Höhenunterschied zweier in gleichen Abständen vom Instrument angenommenen Lattenstandorte sind nebst den entsprechenden, in drei verschiedenen Höhen über dem Boden gemessenen Lufttemperaturen in Fig. 3 graphisch dargestellt.

Nur an sehr warmen Tagen mit 25 bis 27° Mittagstemperatur, bei Zielweiten zwischen 40 und 60 m, bei Höhenunterschieden der Lattenstandorte von 1,5 bis 2,6 m und bei großer Bodennähe der einen der beiden Ziellinien beträgt der vorgenannte Fehler etwa 0,5 mm und wirkt stets in vergrößerndem Sinne auf den beobachteten Höhenunterschied, während an kühlen Tagen, bei kleinen Höhenunterschieden und größeren Zielhöhen der Refraktionseinfluß nahezu verschwindet.

Bei dem hier näher in Betracht zu ziehenden erstmaligen Nivellement der Strecke von Laufen bis zur Straßenbrücke

a 131, das am 20. Mai 1887 vorgenommen wurde, ist zu berücksichtigen, daß die Ausführung in eine Jahreszeit fällt, in welcher in der dortigen Gegend hohe Tagestemperaturen selten auftreten. Der Höhenunterschied der Endpunkte der Nivellementsstrecke, die ohne steile Steigungen und Gefälle verläuft, beträgt 10,2 m, wobei in den 84 Instrumentenständen die Höhenunterschiede der Lattenstandorte nur wenige Dezimeter betragen. Es verlaufen demnach die Ziellinien in so beträchtlicher Höhe über der Bodenfläche, daß merkliche Refraktionsfehler nicht zu fürchten sind. Dieselben können daher keine stichhaltige Erklärung für die beobachtete Höhenabweichung von 84 mm bilden.

Wenn die früher ausgesprochene Vermutung richtig ist, daß seit dem erstmaligen im Jahre 1887 ausgeführten Nivellement der Strecke 6 zwischen den Hauptfestpunkten am Stadttor in Laufen und am Stationsgebäude in Freilassing an der Kreuzungsstelle mit der in der Richtung Laufen—Teisendorf verlaufenden tektonischen Hauptstörungslinie eine Erdkrustenbewegung eingetreten ist, so lassen sich auch Höhenänderungen in anderen benachbarten Nivellementslinien, insbesondere auf der Strecke 7 Freilassing—Traunstein und zwar an jener Stelle erwarten, wo diese Strecke von der gleichen Störungslinie überquert wird.

Ein Blick auf den die Höhenabweichungen dieser Strecke in Fig. 2 darstellenden Teil der Fehlerkurve lehrt indessen, daß eine solche Höhenstörung hier nicht eingetreten ist.

Aus der kürzlich vom K. und K. Militärgeographischen Institut in Wien in Bd. XXXII seiner Mitteilungen vom Jahre 1913 veröffentlichten Neuausgleichung der Schleifen IV bis VII des Nivellementsnetzes im westlichen Teile der österreichisch-ungarischen Monarchie ergibt sich noch eine Probe für die Richtigkeit des bayerischen Nivellements der Linie Freilassing—Rosenheim, wenn man die von österreichischer Seite nivellierten Strecken Kufstein—Wörgl—Bischofshofen—Salzburg mit den bayerischen Strecken Salzburg—Freilassing—Rosenheim—Kufstein zu einer Schleife von 331 km Umfang vereinigt.

Je nachdem man hier die älteren oder neueren auf den bayerischen Strecken gemessenen Höhenunterschiede einführt, erhält man Schleifenschlußfehler von + 8,6 mm bzw. — 5,8 mm, deren geringe Größe die Richtigkeit der durch die bayerischen Nivellements für die Linie Rosenheim—Freilassing ermittelten Höhenunterschiede und damit auch das Fehlen regionaler tektonischer Höhenstörungen bestätigt.

Endlich kann man auch aus den durch das K. und K. Militärgeographische Institut im Jahre 1880 in beiden Richtungen ausgeführten Nivellierungen der Linie Braunau—Salzburg, deren Ergebnis in Bd. VIII der Astronomisch-Geodätischen Arbeiten des genannten Instituts veröffentlicht ist, den Höhenunterschied der bayerischen Hauptfestpunkte in Marktl und Freilassing auf dem Wege über Simbach berechnen, wenn man die österreichischen Messungsergebnisse auf der genannten Strecke mit den von bayerischer Seite in den Jahren 1871 bis 1875 nivellierten Höhenunterschieden Marktl—Simbach und Freilassing — Salzburg verbindet. Aus diesen älteren österreichischen Messungen, welchen mittlere Kilometerfehler von + 0,70 mm und + 0,82 mm zukommen, erhält man den Höhenunterschied Marktl-Bahnhof — Freilassing-Bahnhof zu + 51,8892 m, während durch die bayerischen Messungen in den Jahren 1904 bis 1906 hiefür in Mittel + 51,9160 m gefunden wurde. Der Unterschied beider Werte von 26,8 mm, welcher den Schlußfehler der 152 km langen Schleife darstellt, kann offenbar als von zufälligen Beobachtungsfehlern herrührend angesehen werden.

Es liegen nunmehr für den Höhenunterschied der Hauptfestpunkte in Marktl und Freilassing folgende vier Bestimmungen aus den beigefügten Jahren vor:

$h_1 = + 51{,}8892$ m aus dem Jahr 1880
$h_2 = + 51{,}8400$ „ „ „ „ 1887
$h_3 = + 51{,}9256$ „ „ „ „ 1904/05
$h_4 = + 51{,}9065$ „ „ „ „ 1906.

Das Mittel der Werte h_1, h_3 und h_4 gibt

$$h_m = + 51{,}9071 \pm 10{,}5 \text{ mm}$$

und weicht von der Messung des Jahres 1887 um + 67,1 mm ab. Dieser Unterschied und damit auch die vermeintliche Höhenstörung bei Laufen darf daher mit großer Wahrscheinlichkeit als ein Beobachtungsfehler des im Jahre 1887 ausgeführten Nivellements gedeutet werden, da es nicht wohl denkbar ist, daß der betrachtete Höhenunterschied sich im Laufe der Jahre zunächst vermindert und dann später um beinahe denselben Betrag wieder vergrößert hat.

Auf allen übrigen Strecken kann von einer im Laufe der letzten Jahrzehnte eingetretenen Höhenänderung keine Rede sein.

II. Höhenänderungen durch Bodensenkung in Penzberg.

Die K. Oberste Baubehörde hat zur Wiederherstellung der an den bayerischen Staatsstraßen gelegenen, im Laufe der Zeit vielfach verfallenen Festpunkte des bayerischen Präzisionsnivellements in den Jahren 1903 bis 1906 ausgedehnte Feinnivellements ausführen lassen und dabei zahlreiche Höhenänderungen an dem Anschein nach gut erhaltenen Höhenpunkten festgestellt. Eine der bedeutendsten Änderungen fand sich bei der am Betriebshauptgebäude des Bahnhofes in Penzberg in Oberbayern im Jahre 1878 angebrachten Höhenmarke Nr. 894[1]), für welche sich durch ein von der Höhenmarke an der Pfarrkirche zu Tölz Nr. 3258 ausgehendes, im September 1904 ausgeführtes und im Juli 1905 in entgegengesetzter Richtung wiederholtes Feinnivellement eine Senkung von 0,439 m ergab.

Da dieser Punkt große Wichtigkeit für den am genannten Ort betriebenen Kohlenbergbau besitzt und im Jahre 1901 gelegentlich der Ausführung der Versicherungsnivellements für die Knotenpunkte des bayerischen Nivellementsnetzes als Ausgangspunkt für die Festlegung von weiteren vier Hauptfestpunkten am gleichen Ort gedient hatte, war eine nähere

[1]) Die hier angewendete Nummerierung der Höhenpunkte ist der unter dem Titel „Das Bayerische Landesnivellement“ im Jahre 1910 veröffentlichten Neubearbeitung des Höhenverzeichnisses des Bayerischen Präzisionsnivellements entnommen.

Untersuchung der Höhenänderung dieses Ausgangspunktes sowie der auf ihn bezogenen Versicherungspunkte geboten.

Diese Untersuchung erfolgte durch ein im Jahr 1908 durch die Erdmessungskommission ausgeführtes Feinnivellement, das von den an der Kirche und der Bahnstation in Seeshaupt angebrachten beiden Höhenmarken Nr. 3420 und Nr. 887 ausging und in beiden Richtungen der Bahn entlang vorgenommen wurde.

Um einen für den sicheren Anschluß späterer Nivellements geeigneten, von den Bodensenkungen im Penzberger Felde völlig unabhängigen, zuverlässigen Hauptfestpunkt zu erhalten, ist bei Vornahme des Nivellements im Jahre 1908 an dem 1 km nördlich von der Grube Penzberg gelegenen „Gasthaus zur schönen Aussicht“ eine weitere Höhenmarke Nr. 3410 angebracht und in das in Seeshaupt angeschlossene Feinnivellement einbezogen worden.

Ein Blick auf das in der beigegebenen Abbildung Fig. 4 dargestellte Schichtenprofil des Hauptquerschlags der Grube Penzberg läßt erkennen, daß das die Höhenmarke tragende Gebäude auf dem die Penzberger und Langsee-Mulde trennenden Grundgebirgsrücken gelegen ist, welcher einen von den in beiden Mulden infolge des Kohlenabbaues etwa eintretenden Bodenbewegungen unabhängigen, mächtigen Sicherheitspfeiler darstellt.

Das Ergebnis der im Jahre 1908 wiederholten Nivellierung der in Penzberg im Jahre 1901 angebrachten Versicherungspunkte bestand in der Feststellung einer abermaligen Senkung der Höhenmarke Nr. 894 am Stationsgebäude und einer teilweisen Höhenänderung der Punkte Nr. 3406 bis 3409. Im Juni 1913 wurden die Höhenunterschiede dieser Punkte neuerdings nivelliert und abermals kleine Höhenänderungen derselben beobachtet.

Die Ursache der beobachteten Höhenänderungen muß offenbar in dem in Penzberg betriebenen Kohlenbergbau gesucht werden, weshalb auf die dortigen Bergbauverhältnisse noch etwas näher eingegangen werden soll.

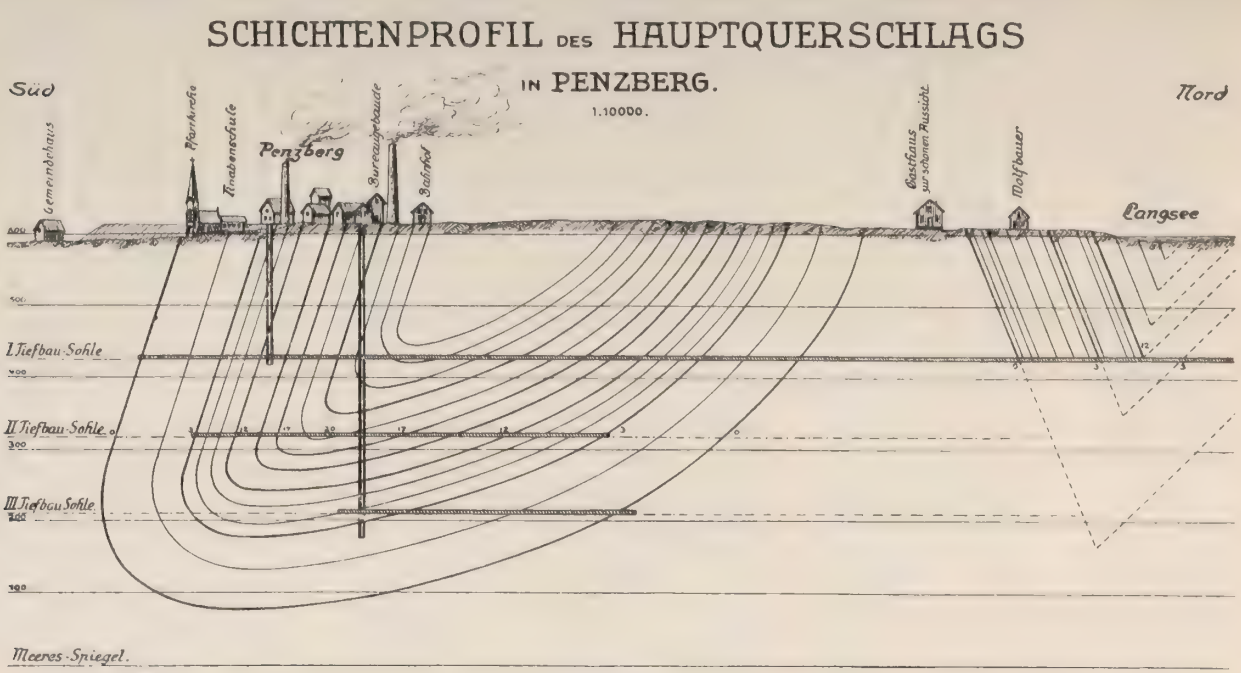

SCHICHTENPROFIL DES HAUPTQUERSCHLAGS
IN PENZBERG.
1:10000.
Süd
Nord
Gemeindehaus
Pfarrkirche
Knabenschule
Penzberg
Bureaugebäude
Bahnhof
Gasthaus zur schönen Aussicht
Wolfbauer
Langsee
I. Tiefbau-Sohle
II. Tiefbau-Sohle
III. Tiefbau-Sohle
Meeres-Spiegel.

Fig. 4.

Das oberbayerische Pechkohlenvorkommen ist nach einem Bericht des ehemaligen technischen Direktors L. Hertle[1]) der Oberbayerischen Aktiengesellschaft für Kohlenbergbau in Miesbach, der sich in seinem geognostischen Teil auf die in den Jahren 1854—1859 von Dr. v. Gümbel ausgeführten Aufnahmen stützt, an Gebirgsschichten gebunden, welche eine Mächtigkeit von 1000 bis 1200 m besitzen und aus kalkigen, tonigen und sandigen Mergeln bestehen, welche der oligozänen Molasse angehören.

Die kohlenführenden Schichten bilden mehrere durch Faltung entstandene Mulden, wodurch eine Wiederholung der Schichten stattfindet, die in ihren oberen, zutage gehenden Teilen umgekippt erscheinen, wie aus dem in der Abbildung Fig. 4 dargestellten Schichtenprofil des Hauptquerschlages in Penzberg ersichtlich ist.

Die muldenförmige Schichtenlagerung ist auf die während der jüngsten Tertiär- und Diluvialzeit erfolgten gewaltsamen Störungen in der Erdkruste zurückzuführen, die mit dem Aufbau der Alpen und dem dabei erzeugten Seitendruck auf die am Nordrand derselben vorgelagerten Massen in innigem Zusammenhang stehen. Die dadurch erzeugten Bewegungen scheinen auch heute noch nicht völlig zur Ruhe gekommen zu sein und hin und wieder durch die in den Ostalpen auftretenden Erderschütterungen ausgelöst zu werden.

In der Penzberger Mulde, welche längs des Nordfußes der bayerischen Alpen in der Ostwestrichtung streicht, kennt man 24 Kohlenflöze, aus welchen schon seit Mitte des 18. Jahrhunderts Kohlen in geringer Menge zum Kalk- und Ziegelbrennen gewonnen wurden. Der lebhaftere Kohlenabbau beginnt jedoch erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts nach dem Ausbau der über Tutzing und Starnberg nach München führenden Eisenbahn und ist jetzt auf über 200 000 Tonnen jährlich gestiegen.

---

[1]) Bericht über den VII. Allgemeinen Deutschen Bergmannstag zu München im Jahre 1898. Herausgegeben von der Redaktion der Zeitschrift „Glückauf“ in Essen.

Die Hauptabbaue werden auf den in der Profilskizze durch Nummerierung ersichtlich gemachten Flözen 3, 12, 17, 19 und 20 geführt. Dieselben besitzen häufig eine Mächtigkeit von 0,7 bis 0,8 m, stellenweise auch eine solche von 3 bis 4 m.

Die durch Kohlengewinnung entstandenen Hohlräume werden zwar durch Bergversatz sorgfältig wieder ausgefüllt, doch ist es nicht zu vermeiden, daß dieser durch den Gebirgsdruck nach und nach zusammengepreßt wird, wodurch bis an die Tagesoberfläche reichende Senkungen der darüber lagernden Gebirgsschichten entstehen.

Der Festpunkt Nr. 894 am Stationsgebäude in Penzberg bildet den Vereinigungspunkt (Knotenpunkt) der 40,5 bzw. 22.6 und 45,1 km langen Netzlinien 44 Holzkirchen — Tölz — Penzberg, 45 Tutzing — Seeshaupt — Penzberg und 56 Mittenwald — Sonnenspitz — Penzberg. Zwischen der Höhenmarke Nr. 894 in Penzberg und den benachbarten Zwischenpunkten der genannten Linien in Tölz, Seeshaupt und an dem Sonnenspitz, deren Höhen als unveränderlich betrachtet worden sind, wurden im Laufe der Zeit mehrfache Nivellierungen ausgeführt, welche die in Tabelle II eingetragenen Höhenunterschiede ergeben haben. Die Werte derselben sind den in der letzten Spalte der Tabelle abgekürzt bezeichneten Veröffentlichungen entnommen. Diese sind die Mitteilungen V und VI von Bauernfeinds (B. M.) über das Bayerische Präzisionsnivellement in den Abhandlungen der Akademie, II. Klasse 1879 und 1883, die Oertelsche Bearbeitung (Oe. B.) desselben Nivellements vom Jahre 1893 und die vom Berichterstatter bearbeiteten Ergänzungsmessungen (E. M.), Heft 1, 1908. Die Höhen der Anschlußpunkte sind auch in dem vom Berichterstatter bearbeiteten neuen Höhenverzeichnis vom Jahre 1910 enthalten. Die Umrechnung der in den B. M. angegebenen, auf den alten bayerischen Generalhorizont bezogenen Höhenkoten auf Höhen über N. N. erfolgt durch Subtraktion dieser Höhenkoten von der Generalhorizonthöhe, welche 861,0798 m über N. N. liegt.

Tabelle II.

Höhen des Festpunktes Nr. ⊙ 894 am Stationsgebäude in Penzberg.

Nr.	Ausgangspunkte	Höhen über N. N.	Zeit der Nivellements	Länge	Höhenunterschied	Höhen Nr. ⊙ 894 über N. N.	Bemerkungen
		m		km	m	m	
1	⊙ 911 Tölz (Betriebsgebäude) .	688,666	1883	18,9	— 83,354	605,312	B. M. VI, p. 59/60
2	⊙ 3258 Tölz (Pfarrkirche) . .	658,803	1904	18,9	— 53,933	604,870	E. M. 1, p. 58/59
3	⊙ 3258 „ „ . .	658,803	1905	18,9	— 53,949	604,854	E. M. 1, p. 58/59
4	⊙ 3420 Seeshaupt (Pfarrkirche)	596,954	1878	8,5	+ 8,352	605,306	B. M. V, p. 54
5	⊙ 3420 „ „	596,954	1908	8,5	+ 7,827	**604,781**	E. M. 2, p. —
6	⊙ 3281 Sonnenspitz	606,913	1878	16,5	— 1,555	605,358	B. M. V, p. 84
7	⊙ 3281 „	606,913	1904	16,5	— 2,021	604,892	E. M. 1, p. 59/68
8	⊙ 3281 „	606,913	1905	16,5	— 2,033	604,880	E. M. 1, p. 59/68

Durch eine einfache Ausgleichung der vorstehenden Beobachtungen unter Annahme einer der Zeit proportionalen Senkung und unter Einführung der im Jahre 1908 durch Nivellement in beiden Richtungen ermittelten Höhe des Festpunktes ⊙ 894 mit doppeltem Gewicht erhält man den wahrscheinlichsten Wert der Höhe dieses Punktes im Monat Mai 1908 zu 604,799, während die Messung den in der Tabelle angeführten Werte 604,781 geliefert hat. Diese Übereinstimmung muß als befriedigend betrachtet werden, da die Annahme einer der Zeit proportional verlaufenden Senkung der Wirklichkeit nicht genau entspricht.

Die erwähnte Ausgleichung hat außer der angegebenen Höhe des Festpunktes ⊙ 894 auch den Betrag der jährlichen Senkung dieses Punktes für die Zeit zwischen 1878 und 1908 zu 18,2 mm ergeben. Hieraus läßt sich nun die Höhenkote desselben für eine beliebige Zwischenzeit mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit ableiten. So erhält man beispielsweise für das Jahr 1901, in welchem die Nivellierung der für den Netzknotenpunkt Penzberg angebrachten Versicherungspunkte erfolgt ist, eine um 127 mm größere Höhe als im Jahre 1908.

Nimmt man für die Zeit des Frühjahres 1908 als zuverlässigste Höhe des Punktes ⊙ 894 den Wert 604,7805 an, welchen das von der Höhenmarke an der Pfarrkirche in Seeshaupt ausgehende und in beiden Richtungen mit einem mittleren Kilometerfehler von ± 1,04 mm ausgeführte Nivellement im genannten Jahre ergeben hat, so findet man für das Frühjahr 1901 eine um 127,4 mm größere Höhe, nämlich 604,9079. Von dieser für das Jahr 1901 berechneten Höhe ausgehend, lassen sich nunmehr auch die Höhenkoten der übrigen im gleichen Jahre neu hergestellten Versicherungspunkte angeben, die in Tabelle III angeführt sind.

Tabelle III.

Höhen der Versicherungspunkte des Knotenpunktes Penzberg.

Nr.	Lage	1901	1908	1913	Senkung 1901—1913
⊙ 894	Stationsgebäude .	604,9079	604,7805	604,6092	— 0,2987
⊙ 3406	Bürogebäude . .	617,0778	617,0553	617,0391	— 0,0387
⊙ 3407	Pfarrkirche . .	599,2290	599,2289	599,2115	— 0,0175
⊙ 3408	Knabenschule . .	601,2537	601,2399	601,2134	— 0,0403
⊙ 3409	Gemeindehaus .	598,2442	598,2464	598,2335	— 0,0107
⊙ 3410	Gasthaus zur schönen Aussicht .	—	620,2673	620,2673	—

Als letzter Versicherungspunkt der Tabelle III ist der oben bereits erwähnte, im Jahre 1908 am Gasthaus zur schönen Aussicht bei Penzberg neu angebrachte Haupthöhenpunkt ⊙ 3410 aufgeführt, welchem infolge seiner Lage auf dem zwischen der Penzberger und Langsee-Mulde vorhandenen Grundgesteinsrücken eine gegen Senkungen besonders gesicherte Lage zuerkannt werden muß. Das von diesem Punkte im Jahre 1913 ausgehende Nivellement der übrigen Versicherungspunkte hat die in der mit 1913 überschriebenen Spalte der Tabelle III aufgeführten Höhen über N. N. ergeben. Unter diesen zeigt die Höhe des Punktes ⊙ 894 am Stationsgebäude einen um 71,3 mm kleineren Wert als im Jahre 1908. Es ist somit in den letzten 5 Jahren abermals eine Senkung des Punktes ⊙ 894 von 14,3 mm im Jahre eingetreten, so daß die Gesamtsenkung desselben gegen seine mittlere Höhe 605,332 im Jahre 1878 0,723 m beträgt. Auch in der Zeit von 1901 bis 1913 ist die Senkung am Stationsgebäude am größten und beträgt rund 0,3 m in 12 Jahren oder 25 mm in jedem Jahr. Die Senkung der übrigen Versicherungspunkte ist eine wesentlich geringere und nimmt gegen die Ränder der Mulde hin rasch ab. Die geringste Senkung zeigt der Punkt ⊙ 3409 am Gemeindehaus, was ganz der örtlichen Lage der Punkte entspricht, da das Stations-

gebäude über dem Tiefsten der Penzberger Mulde, das Gemeindehaus aber am äußersten südlichen Flügel derselben gelegen ist. Dank der sorgfältigen Ausfüllung durch Bergversatz der durch den Kohlenabbau im Berginnern gebildeten Hohlräume sind Spaltenbildungen und Einsenkungen in der Bodenoberfläche in bemerkbarer Größe im Grubenfeld nicht eingetreten; auch von Rißbildung in Gebäudemauern ist außer an einem Nebengebäude des Stationshauses und am Hause des Knappschaftsarztes in Penzberg wenig zu bemerken.

Die Nivellementsergebnisse lassen deutlich erkennen, daß nicht unbeträchtliche Senkungen in den die abgebauten Kohlenflöze überlagernden Gebirgsschichten in Penzberg eingetreten sind und noch andauern. Zu Zerreißungen dieser Schichten und zur Entstehung von Tagebrüchen, in deren Gefolge größere Bergschäden aufzutreten pflegen, ist es indessen bisher nicht gekommen.

Zum Problem des Euripus.

Von **A. Endrös.**

Mit 1 Figurentafel und 1 Kartenskizze im Text.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 13. Juni 1914.

Einleitung.

Die unregelmäßigen Stromvorgänge an der schmalen Meerenge zwischen der Insel Euböa und dem griechischen Festlande (siehe Kartenskizze im Text S. 118) bilden ein über 2000 Jahre altes Problem der Ozeanographie. In der Literatur der Alten finden sich nur kurze und zum Teil scheinbar sich widersprechende Bemerkungen. Ausführlichere Beobachtungen besitzen wir erst aus dem Jahre 1669 vom Jesuitenpater J. P. Babin[1]), der sich 2 Jahre in Chalkis aufgehalten hatte. Auf Grund seines Berichtes hat Prof. F. A. Forel[2]) im Jahre 1879 die rasch wechselnden Strömungen in Zusammenhang mit den Seiches gebracht und das Problem galt im wesentlichen als gelöst. Hiedurch wurde der griechische Seeoffizier Kapitän A. Miaulis[3]) im Jahre 1882 zur Veröffentlichung seiner eingehenden Beobachtungen aus den Jahren 1871 und 72 veranlaßt, auf Grund deren er zu dem Ergebnis kam, daß Forel das Problem nicht gelöst habe, da er dasselbe nicht kannte und daß eine Lösung nur möglich sei, wenn man sich gleichzeitige Beobachtungen an mehreren Punkten des Talantischen und Eretrischen Euripus verschaffe, was aber nur unter Bei-

[1]) J. P. Babin, Phil. Trans. 1671, Vol. I, p. 592.

[2]) F. A. Forel, Comptes rendus, Vol. 39, 1879, p. 859.

[3]) *Ἀντ. Μιαούλης, Περὶ τῆς παλιρροίας τοῦ Εὐρίπου.* Athen 1882. (29 pp. 8⁰, 12 Tab. und eine Karte der Brücke bei Chalkis.)

hilfe der griechischen Regierung möglich sei. Die Ergebnisse von Miaulis unterzog hierauf Prof. O. Krümmel im Jahre 1888 einer sehr eingehenden Diskussion[1]) und fand Forels Vermutung bestätigt, während er Miaulis neue Beobachtungen über den anomalen Gezeitenverlauf nicht für erwiesen hielt und sich nur durch Beobachtungen mit mehreren selbstregistrierenden Apparaten zwischen den Lithaden und Stura genügenden Aufschluß versprach.

Auf Anregung von Prof. Hermann Ebert, der anläßlich einer Griechenlandreise diese merkwürdigen Strömungen an Ort und Stelle beobachten konnte, habe ich im Jahre 1906 die Periodendauern der möglichen Seichesschwingungen berechnet und zugleich auf die Kompliziertheit von Strömungen hingewiesen, welche in einem Verbindungskanal zweier unabhängig voneinander schwingenden Wasserbecken auftreten können[2]), was auch in die neueste Auflage von Krümmels Ozeanographie Aufnahme gefunden hat[3]). Dabei stand mir nur Krümmels Bericht über Miaulis Beobachtungen zur Verfügung. Die Originalarbeit von Miaulis, die im Buchhandel vergriffen ist, konnte ich erst jetzt erhalten[4]). Eine Analyse der wertvollen Beobachtungen, wie sie besonders die Tabellen der Arbeit enthalten, ergibt nun, daß der von Miaulis als eigentliches Problem des Euripus bezeichnete anomale Gezeitenverlauf nicht nur erwiesen ist, sondern sich auch vollständig aus den vorliegenden Beobachtungen begründen läßt. Da nun gerade der Streit in dieser Sache die Ursache ist, daß das

---

[1]) O. Krümmel, Zum Problem des Euripus. Pet. Mitt. 1888, S. 331. Dort findet sich eine Übersetzung der wesentlichsten Teile der Miaulischen Arbeit.

[2]) A. Endrös, Vergleichende Zusammenstellung der Hauptseicheesperioden der bis jetzt untersuchten Seen und Anwendung auf verwandte Probleme. Pet. Mitt. 1908, Heft IV, S. 86 und 87.

[3]) O. Krümmel, Handbuch der Ozeanographie II, 1911, S. 182.

[4]) Von dem gütigen Anerbieten Herrn Prof. C. Rados in Athen, mir die Schrift aus der griechischen Nationalbibliothek zur Verfügung zu stellen, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt sei, brauchte ich nicht mehr Gebrauch zu machen.

Euripusproblem neuerdings in der Literatur als sehr verwickelt bezeichnet wird, obwohl gerade die Seiches- und Gezeitenforschung so große Fortschritte gemacht haben, so möchte ich es nicht unterlassen, die Ergebnisse meiner Untersuchungen der Miaulischen Beobachtungen im folgenden näher auseinanderzusetzen.

Zunächst seien die einzelnen Fragen hier zusammengestellt und zugleich die Lösungen derselben, soweit sie vorliegen, angefügt. J. P. Babin weist vor allem darauf hin, daß im Euripus der Gezeitenstrom nicht wie im Ozean bei steigendem Wasser auf das Land zu und bei fallendem vom Lande weggerichtet sei, sondern daß dort bei Wasserstand über Mittel das Wasser gegen das Ägäische Meer (gegen Süden) und bei Wasserstand unter Mittel gegen Thessalien (gegen Norden) ströme. Hiefür hat Krümmel aus den Beobachtungen von Miaulis die Erklärung gegeben; da nämlich der Gezeitenhub im Talantischen Euripus denjenigen im Eretrischen Euripus bedeutend übertrifft, so müssen sich die Gezeiten des Norderhafens in der angegebenen Weise in Strom umsetzen, so daß nach je 6 Stunden der Strom kentert. Man hätte gerade umgekehrt im Eretrischen Euripus größere Hubhöhen suchen müssen, wie sie auch Forel wirklich angenommen hatte. Das Hauptphänomen des Euripus beruht nach Babin auf einer Störung der Flutwellen und Gezeitenströmungen, welche vom 9. bis 13. und vom 21. bis 26. Tage eines synodischen Monates sich einstelle. In diesen Tagen pflege der Strom in 24 Stunden 11 bis 14- und mehrmal nach Süden zu strömen und ebenso oft wieder zurück nach Norden, während in den übrigen Tagen das Gezeitenphänomen sich ebenso regelmäßig wie im Ozean vollziehe. Zur Erklärung dieser rasch wechselnden Strömungen hat Forel Seichesschwingungen des Talantischen Euripus herangezogen, welche zur Zeit der Nipptiden die Gezeitenwelle an Höhe überragen und so den nämlichen Stromwechsel erzeugen können, nur entsprechend ihrer kürzeren Periodendauer mit viel häufigerem Wechsel. Forel hat dann die uninodale Schwingungsdauer des Talantischen Euripus zu $2^1/_2$ Stunden

berechnet und daraus eine binodale Seichesdauer von $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ Stunden gefolgert, welche den häufigen Flutwechsel vollständig erklären konnte. Krümmel hat hierauf aus den Pegelablesungen des Miaulis im Norderhafen wirklich eine Schwingung von solcher Periodendauer gefunden, dabei haben sich aber auch im Süderhafen Seiches gezeigt, welche gewöhnlich viel größere Amplituden aufweisen, so daß der Stromwechsel mehr durch sie veranlaßt werden muß. Die Forderung Forels, die auch Krümmel beschäftigt hat[1]), es sei noch zu prüfen, ob sich die Stromrichtungen zu den Phasen der Niveauschwankungen umgekehrt verhalten zu Zeiten der normalen Flut wie zu Zeiten der gestörten Flut, ist nur aufgestellt, weil Forel die Strömungen von den Gezeiten des Süderhafens und von Seiches im Norderhafen und nur von diesen verursacht glaubte, während es sich gerade umgekehrt verhält.

Das eigentliche Problem des Euripus sieht nun Kapitän Miaulis nicht in diesen raschen, unregelmäßigen Stromänderungen, die nach seinen Ergebnissen häufig durch die Richtung und Stärke des Windes verursacht würden, sondern darin, daß sich dort das Hochwasser nicht wie im Ozean um 50 Minuten 28 Sekunden täglich verspäte, sondern durchschnittlich nur um die Hälfte, so daß in Zwischenräumen von 24 Stunden 24 Minuten zwei Hochwasser und zwei Niedrigwasser aufträten, ferner daß am 10. und 25. Tage einer Lunation eine Vertauschung der Flutstunden einträte derart, daß auf das Abendhochwasser dieser Tage kein Niedrigwasser, sondern nach Verlauf von 6 Stunden 6 Minuten wieder Hochwasser folge und so die mangelhafte Verspätung genau wieder eingebracht würde. Diese Beobachtungen hält Krümmel für nicht erwiesen, einmal weil die Gezeitenkurven infolge der ständig aufgesetzten Seiches und infolge der Ablesungen nach je einer halben Stunde keine so genaue Bestimmung der einzelnen Wellen zulasse, dann seien auch große Eintagskomponenten zu erwarten, die bei halbtägigen Beobachtungen sich nicht erkennen ließen.

[1]) Pet. Mitt. 1888, p. 336.

In seiner Ansicht wird Krümmel bestärkt durch den Bericht Babins, der sich als gewissenhaft erwiesen habe und durch die Angaben des amtlichen englischen Werkes, des „Mediterranean Pilot", welche beide nichts von dieser anormalen täglichen Verspätung der Flut berichteten.

Wie wir im folgenden sehen werden, ist dieser Flutwechsel von 12 Stunden 12 Minuten und die Vertauschung der Flutstunden in den Beobachtungen von Miaulis wirklich enthalten, aber nicht aus den einzelnen Tageskurven zu messen, wie Krümmel richtig einwendet, sondern nur aus einer graphischen Darstellung der sämtlichen Pegelablesungen auf fortlaufender Zeitabszisse zu ersehen und begründet sich vollständig daraus, daß die halbtägige Mondtide nahezu die gleiche Amplitude hat wie die halbtägige Sonnentide einschließlich der Deklinationstiden. Zugleich lassen sich die Amplituden der Haupttiden angenähert schätzen. Dagegen ist die Bestimmung der Periodendauern der Seiches eine unsichere, weil die Pegelablesungen nur halbstündlich erfolgt sind und die komplizierte Gestalt der in Betracht kommenden Becken die Dauern nicht mit der erforderlichen Annäherung berechnen läßt. Doch gewähren die Beobachtungen von Miaulis in das komplizierte Strömungsproblem einen tieferen Einblick, als man bis jetzt angenommen hat. An der Hand der Niveaudifferenzen nördlich und südlich der Enge nämlich läßt sich die Anzahl, der Zeitpunkt und die Art der Stromwechsel während eines synodischen Monates ersehen, ferner erklärt sich daraus, warum die bekannten Gezeitenstörungen erst mit und nach den Nipptiden auftreten, nicht aber vorher, wie Forels und Krümmels Hypothese annimmt, ebenso warum Miaulis die Flutstundenvertauschung auf den 10. und 25. Mondtag verlegt. Endlich erkennt man die sprichwörtlich gewordene Unregelmäßigkeit der Strömungen zur Zeit der Gezeitenstörung, welche in erster Linie durch den Verlauf der Gezeiten nördlich und südlich der Enge und durch Windstau und in zweiter Linie erst durch Seiches verursacht ist, so daß aus der Anzahl der täglichen Stromwechsel sich keine Seichesperioden ableiten lassen.

Die Gezeiten des Norder- und Süderhafens von Chalkis.

Das wertvollste Beobachtungsmaterial bilden die gleichzeitigen Pegelablesungen, welche Miaulis in der Zeit vom 27. März bis 25. April 1872 halbstündlich von 6 Uhr morgens bis 6 Uhr abends im Norder- und Süderhafen von Chalkis machen ließ und in einer Tabelle (Tabelle III) ausführlich mitteilt. Da die Beobachtungen nur halbtägig gemacht sind und außerdem ein Tag, nämlich der 24. April, ganz fehlt, ist es nicht möglich, die Komponenten der Gezeitenbewegung durch harmonische Analyse zu bestimmen. Doch läßt sich der monatliche Verlauf der Tidenbewegungen und die ungefähre Größe der Haupttiden aus einer graphischen Darstellung der Pegelstände gut ermitteln. Dieselben sind auf fortlaufender Zeitabszisse $1^h = 1$ mm und 1 Zoll engl. $= 1$ mm eingetragen, wovon ich die eine Hälfte vom Norder- und Süderhafen vom 27. März bis 11. April in beiliegender Tafel Fig. 2 und Fig. 3 der Arbeit beigeben möchte, da diese Kurven die vollständige Beantwortung der strittigen Fragen enthalten [1]).

Betrachten wir zunächst die für die ganze Erscheinung weitaus wichtigste Bewegung des Wasserstandes im Norderhafen, so fällt sofort die anormal große halbmonatliche Ungleichheit der halbtägigen Tiden in die Augen. Die Hubhöhe ist am 27. März $38^1/_2$ Zoll $= 96^1/_2$ cm, an welchem Tage Neumond war, und am 4. April beim 1. Viertel des Mondes unter 1 Zoll, also nahe $= 0$, wenn man von den der Kurve aufgesetzten kurzdauernden Seichesbewegungen absieht. Es müssen daher die Hauptkomponenten der Mond- und Sonnentiden nahe gleiche Amplitude haben und die Gezeitenkurve hat das charakteristische Aussehen einer sogenannten Schwebung, wie

[1]) Die Beobachtungen erweisen sich, wie viele Einzelheiten zeigen, als vollständig verlässig. In den Pegelablesungen des Norderhafens nur ist ein Druckfehler enthalten: Am 20. Mondtag ist um $3^h\,30^{min}$ 1.11 und um 4^h 2.1 zu setzen, statt umgekehrt. Vielleicht enthält auch am 14. Mondtag die Tabelle des Süderhafens Druckfehler, da unbegründet große Schwankungen vorkommen.

man sie in der Akustik bei zwei einander nahekommenden Tönen von gleicher Amplitude erhält. Da die Gezeitenkurve unvollständig ist, füge ich eine künstliche Kurve auf gleicher Zeitabszisse darüber an, welche aus 2 Schwingungen mit der Periodendauer von 12,42 Stunden und 12,00 Stunden und gleichen Doppelamplituden von je 20 mm zusammengesetzt ist (siehe Fig. 1 der Tafel).

Ein Vergleich der beobachteten und künstlichen Kurve zeigt sofort den ganz parallelen Gang beider und besonders auch die gleichen Hoch- und Niedrigwasserzeiten. Die wesentlichste Eigenschaft der graphisch dargestellten Schwebung von 2 Schwingungen mit gleicher Amplitude ist das Auftreten einer resultierenden Schwingung, welche als Periodendauer das arithmetische Mittel derjenigen der beiden Komponenten hat, also hier eine Periodendauer von 12,21 Stunden = 12 Stunden 12 Minuten statt 12 Stunden 24 Minuten wie bei normalem Gezeitenverlauf. Eine weitere Eigenschaft einer solchen Interferenzkurve besteht darin, daß in der Mitte des Kurvenbildes, hier nach $14^1/_2$ Schwingungen der Mondtide, das sind 15 Wellen der Sonnentide, eine Zeit von einer halben Schwingungsdauer, hier 6 Stunden, nahezu Stillwasser auftritt und hierauf ein zum ersten Teil der Kurve symmetrischer beginnt. Eigentlich befinden sich in der Mitte der Interferenzkurve zwei ganz schwache Niedrigwasser, wie die künstliche Kurve ersehen läßt. Falls man das Kurvenbild verkehrt nimmt, befinden sich dort zwei ganz schwache Hochwasser. Die letztere Kurve ergeben die Gezeiten dann, wenn die Schwebung mit einem Wellental beginnt, also wenn Mond- und Sonnenanziehung bei Niedrigwasser zusammentreffen. Durch diese verkümmerte Welle in der Mitte der Schwebung wird die resultierende Welle um 6 Stunden verschoben, so daß am 1. Tage nach den Quadraturen die Zeiten für Hoch- und Niedrigwasser vertauscht sind. Von da verspätet sich dann das Hochwasser wieder pro Tag um 24 Minuten, so daß nach $14^1/_2$ Tagen, d. i. nach einem halben synodischen Monat das Hochwasser wieder auf die nämliche Uhrzeit fällt. Wie aus der graphischen Darstellung er-

sichtlich ist, findet sich auch wirklich im Norderhafen am 9. Mondtage um $8^h\,46^{min}$ a. m. Niedrigwasser, während am 7. Mondtag, dem Tag vor dem 1. Viertel, um $7^h\,58^{min}$ a. m. Hochwasser ist, also nach 4 mal 12 Stunden 12 Minuten, das ist 2 Tage 48 Minuten, um $8^h\,46^{min}$ des 9. Mondtages wieder Hochwasser treffen sollte.

Miaulis verlegt, abweichend vom obigen Ergebnis, das Ausfallen eines Niedrigwassers beziehungsweise Hochwassers auf den 9. und 24. Mondtag und die Vertauschung der Flutstunden auf den 10. und 25. Mondtag. Dies erklärt sich jedoch ungezwungen daraus, daß zur Zeit der Quadraturen die Gezeiten fast ganz durch die Seiches und andere Niveauschwankungen verdeckt sind, wie Miaulis selbst auch hervorhebt, und erst am 10. und 25. Mondtage wieder Hubhöhen von 15 Zoll erreichen und diejenigen der Seiches um das Doppelte übertreffen. Diese Vertauschung kann daher erst an den genannten Tagen sicher beobachtet werden, obwohl sie bereits unmittelbar nach den Quadraturen eintritt. Sind aber die Seichesamplituden nur klein, wie das am 19. April, dem 23. Mondtage, der Fall ist, so muß die Vertauschung der Flutstunden schon an diesem Tage zu beobachten sein. Für diesen Tag hat nun wirklich Miaulis die Vertauschung beobachtet, wie aus der Tabelle 8 der Schrift zu ersehen ist, welche nähere Beobachtungen allein für diesen Tag enthält. Dort ist um $6^h\,30^{min}$ a. m. Niedrigwasser und um $2^h\,00^{min}$ p. m. Hochwasser notiert, während nach der Tabelle 2 seiner Schrift die Zeiten noch nicht vertauscht sein sollten, also um $2^h\,28^{min}$ p. m. Niedrigwasser sein sollte. Miaulis rechnete diese Abweichungen eben zu den Störungen in diesen Tagen und richtete sich mehr nach den Strömungen, wie wir später sehen werden.

Betrachten wir nun die graphische Darstellung der Pegelstände im Süderhafen (siehe Fig. 3 der Tafel), so ist nur etwa 3 Tage vor und nach den Syzygien ein Tidenhub zu erkennen, der im Maximum nur etwa 6 Zoll erreicht. Dazu ist die Kurve ganz entstellt durch die ständig vorhandenen Seiches, welche bis 8 Zoll Höhe erreichen und so die Gezeiten übertreffen.

Um die Zeit der Quadraturen ist nur eine ganztägige Gezeitenwelle von rund 3 bis 4 Zoll Hubhöhe vorhanden. Die Gezeitenbewegung vollzieht sich dort ganz unabhängig vom Norderhafen. Während sich für den Norderhafen eine Hafenzeit von $5^h\,15^{min}$ ergibt, dürfte für den Süderhafen eine um $2^1/_2$ bis 3^h frühere anzunehmen sein, soweit der ausgeprägte Eintagstypus eine Bestimmung zuläßt. Die starke Einengung bei Chalkis verhindert demnach eine Fortpflanzung der Gezeitenwelle vom Talantischen Euripus nach dem Chalkidischen.

Die große Verschiedenheit der Gezeitenbewegungen zu beiden Seiten der Enge läßt sich aus einer ungefähren Angabe der Hubhöhen der Hauptkomponenten am besten erkennen, auf welche wir uns aus den schon angeführten Gründen beschränken müssen, so sehr eine exakte Analyse auch im Interesse der zur Zeit im Vordergrund stehenden Frage der Mittelmeergezeiten erwünscht wäre. Zunächst läßt sich aus dem Springtidenhub am 27. März, also der Nähe der Äquinoktien, von 96 cm und dem Nipptidenhub am 4. April von 0 cm die Doppelamplitude der Hauptmondtide, welche mit M_2 bezeichnet wird, und diejenige der Hauptsonnentide mit dem Symbol S_2 zusammen mit der Deklinationstide K_2 angenähert bestimmen. Beim Springtidenhub addieren sich die Komponenten und bei dem darauffolgenden Nipptidenhub subtrahieren sie sich; daher erhält man aus:

$$2\,(M_2 + S_2 + K_2) = 96\text{ cm} \qquad \text{(27. März 1872)}$$
$$2\,(M_2 - (S_2 + K_2)) = 0 \qquad \text{(4. April 1872)}$$

$2\,M_2 = 48$ cm und $2\,(S_2 + K_2) = 48$ cm.

Nicht zu übersehen ist, daß die große elliptische Mondtide N_2 außer acht bleiben mußte, was die Ergebnisse der Schätzung ungenauer macht.

Nun enthält die Arbeit von Miaulis noch weitere für uns wichtige Beobachtungen des Tidenhubes im Talantischen Euripus (Tabelle 10 der Originalarbeit) und zwar von der Zeit des 7. April bis 9. September 1871. Die Angaben beziehen sich jedoch nur zum Teil auf den Norderhafen von

Chalkis, im anderen Teil abwechselnd auch auf den Hafen von Ädipsos, der am Eingange des gleichnamigen Golfes im Nordwesten des Talantischen Euripus gelegen ist. Aus diesen Beobachtungen ist zu ersehen, daß die Tidenbewegung des Norderhafens auch eine große halbjährliche Ungleichheit besitzt. Der Springtidenhub am 20. Juni 1871 betrug in Chalkis nur 27 Zoll und der darauffolgende Nipptidenhub am 27. Juni 9 Zoll. Da die K_2-Komponente hier, zur Zeit der Solstitien, mit der S_2-Tide entgegengesetzte Phase hat, so ergeben sich daraus zwei weitere Beziehungen zur Schätzung unserer Hauptkomponenten:

$$2\,(M_2 + (S_2 - K_2)) = 67 \text{ (cm)} \qquad \text{(20. Juni 1871)}$$
$$2\,(M_2 - (S_2 - K_2)) = 23 \text{ (cm)} \qquad \text{(27. Juni 1871).}$$

Hieraus berechnet sich $2\,M_2$ zu 45 cm, und $2\,(S_2 - K_2)$ zu 22 cm. Da $2\,(S_2 + K_2)$ oben 48 cm betrug, so erhalten wir $2\,S_2 = 35$ cm und $2\,K_2 = 13$ cm. Aus dem Tidenhub am 27. April 1872 und 20. Juni 1871 berechnet sich $2\,K_2$ zu 14,5 cm. Ich möchte daher die Komponenten, wie folgt, schätzungsweise angeben:

$$M_2 = 23 \text{ cm}; \quad S_2 = 17 \text{ cm}; \quad K_2 = 7 \text{ cm}.$$

Jedenfalls ist aus den ungefähren Zahlenangaben ersichtlich, daß im Talantischen Euripus die Hauptsonnenkomponente den theoretischen Wert bedeutend übersteigt, da $S_2 = 0{,}74\,M_2$ ist, während nach der Theorie $S_2 = 0{,}47\,M_2$ sein sollte. Ferner erreicht auch K_2 einen hohen Betrag, da $K_2 = 0{,}272 \cdot S_2$ sein sollte, während $K_2 = 0{,}41\,S_2$ erreicht. Die verhältnismäßig große K_2-Tide muß auch eine Verschiebung des Springtidenhochwassers zur Folge haben, wie die obenerwähnte Tabelle auch wirklich ersehen läßt. Ich füge in nachfolgender Zusammenstellung die Verschiebung des Hochwassers für die Syzygien in den betreffenden Monaten aus Miaulis' Tabelle 10 an, wobei ein + Zeichen eine Verspätung und ein — Zeichen eine Verfrühung bedeutet.

März	April	Mai	Juni	Juli	August	September
0 Tage	— 1	— 1	0	+ 1	+ 2	0 Tage.

Die große Deklinationstide K_2 bewirkt außerdem eine starke halbjährliche Ungleichheit in der Höhe und einen ganz anderen Verlauf der Gezeitenkurve zur Zeit der Solstitien als zur Zeit der Äquinoktien. Die beiden interferierenden Tiden haben nämlich zur Zeit der Äquinoktien ein Amplitudenverhältnis von 1 : 1, zur Zeit der Solstitien aber verhält sich $M_2 : (S_2 - K_2) = 2{,}3 : 1{,}0$. Der Gezeitenverlauf im Norderhafen muß daher zur Zeit der Solstitien dem normalen sich nähern, es muß Hochwasser nahezu alle 12 Stunden 24 Minuten auftreten und es kann keine Vertauschung der Flutstunden auftreten wie zur Zeit der Äquinoktien[1]). In diesem Umstande ist wohl eine Erklärung dafür zu erblicken, daß verschiedene Berichte über die unregelmäßigen Euripusströmungen ausdrücklich von einem normalen Verlauf der Gezeiten zur Zeit der Syzygien sprechen, wie der Bericht des J. P. Babin und die englischen Gezeitentafeln, wodurch O. Krümmel in seinem abweisenden Standpunkte gegenüber Miaulis' neuen Beobachtungen bestärkt wurde.

Miaulis, der keine Erklärung dieser Unregelmäßigkeit der Gezeiten zu geben imstande war, betont besonders, daß in Ädipsos durchaus keine Vertauschung der Flutstunden vorkäme und beruft sich dabei auf seine dort gemachten Beobachtungen. Nun fallen seine dortigen Beobachtungen alle in die Monate Mai, Juni und Juli, also in die Nähe der Solstitien, wo die Gezeiten infolge der großen K_2-Komponente dem normalen Typus sich nähern. Dazu kommt, daß die Seiches in der Mitte des Talantischen Euripus merklich kleinere Amplituden haben müssen als an dem spitzauslaufenden Südende, worauf ich schon an anderer Stelle hingewiesen habe[2]), und dadurch müssen die Gezeiten auch zur Zeit der Nipptiden gut zu beobachten sein.

[1]) Auch hiefür enthält die Arbeit von Miaulis eine Beobachtung. In einer Fußnote Seite 10 zählt Miaulis am 27., 28. und 29. Juni 1871, dem 8., 9. und 10. Mondtage, also zur Zeit der Gezeitenstörung, nur je 2 Hochwasser und 2 Niedrigwasser in 24 Stunden.

[2]) Pet. Mitt. 1908, Heft IV, S. 87.

Krümmel spricht auch an der ebengenannten Stelle von einer zu erwartenden großen täglichen Ungleichheit der Gezeiten des Norderhafens. Um eine ungefähre Schätzung des eintägigen Tidenhubes zu erhalten, habe ich die entsprechende, künstliche halbtägige Gezeitenwelle von dem beobachteten Wellenzug subtrahiert. Es kommt dadurch ein halber Wellenzug der eintägigen Tide zum Vorschein, deren Amplitude immer unter $3^1/_2$ Zoll bleibt (siehe Fig. 4 der Tafel). Die Beobachtungszeit liegt in der Nähe der Äquinoktien, wo die eintägige Deklinationstide P_1 entgegengesetzte Phase zu den beiden Hauptkomponenten K_1 und O hat, so daß $2\,(K_1 + O) = 5$ Zoll sein dürfte. Wir haben demnach im Talantischen Euripus ausgesprochenen Halbtagstypus der Gezeiten; denn

$$(K_1 + O_1) : (M_2 + S_2) = 0{,}15,$$

also kleiner 0,25.

Während sich im Norderhafen bei der deutlichen Gezeitenbewegung die Hubhöhen der Hauptkomponenten noch schätzen lassen, ist es im Süderhafen, wo die Gezeitenbewegung nur klein ist und dazu durch Seichesbewegungen fast ganz verdeckt wird, vollständig unmöglich, aus halbtägigen Beobachtungen die einzelnen Komponenten auch nur angenähert anzugeben. Wie wir oben schon erwähnt haben, ist ein Gezeitenhub von etwa 7 Zoll an den Syzygien zu messen und weiterhin noch ersichtlich, daß die Kurve bei den Quadraturen nur Eintagsgezeiten aufweist, wonach also auch im Süderhafen M_2 nahezu gleich $S_2 + K_2$ sein muß. Bei der Bestimmung der Flutkonstanten des Süderhafens kommt uns der Umstand zugute, daß von der nahen Station Isthmia, am Ende des Saronischen Golfes, in Luftlinie nur 100 km entfernt, eine Bestimmung der harmonischen Konstanten bereits vorliegt, die wir G. Wegemann[1]) verdanken. Obwohl man im Mittelländischen Meere nach den vorliegenden Ergebnissen schon bei geringeren Entfernungen mit einer merklichen Änderung der Konstanten

[1]) G. Wegemann, Beiträge zu den Gezeiten des Mittelländischen Meeres. Ann. d. Hydr. u. Marit. Met., August 1907.

rechnen muß, so dürften doch für hier keine merklichen Änderungen zu erwarten sein. Beide Punkte liegen am Ende zweier Buchten, Isthmia am Ende des Saronischen Golfes, Chalkis-Süd am Ende des Golfes von Petalia, welche an der gleichen Stelle in das Ägäische Meer münden und welche die Gezeitenwellen gemäß der Länge und Tiefe der Buchten in der gleichen Zeit durchlaufen. Die Konstanten für Isthmia sind nach Wegemann:

Harmonische Konstanten von Isthmia nach G. Wegemann.

Halbtagstiden		Eintagstiden	
$M_2 = 16{,}88$ mm	$\varkappa = 69{,}1^0$	$K_1 = 43{,}49$ mm	$\varkappa = 24{,}2^0$
$S_2 = 14{,}40$ „	$\varkappa = 80{,}2^0$	$O_1 = 13{,}79$ „	$\varkappa = 308{,}4^0$
$N_2 = 2{,}80$ „	$\varkappa = 93{,}4$	$P_1 = 14{,}4$ „	$\varkappa = 24{,}2^0$
$K_2 = 3{,}86$ „	$\varkappa = 80{,}2^0$	$S_1 = 24{,}3$ „	$\varkappa = 194{,}4^0$

Der Gezeitenhub kann demnach in Isthmia im Maximum 260 mm betragen. Im Süderhafen haben wir oben 180 mm als größten Hub gemessen und zwar zur Zeit der Äquinoktien, wo die eintägige Deklinationstide, die in Isthmia 30 mm Hubhöhe hat, sich subtrahiert. Berücksichtigt man noch, daß die meteorologische Komponente S_1 sich in den Mittelmeeren nicht als Konstante erwiesen hat, so stimmen die gesamten Hubhöhen befriedigend überein. Auch der Umstand, daß M_2 nahezu gleich $S_2 + K_2$ ist wie in Chalkis-Süd, spricht für keine merkliche Verschiedenheit der Gezeiten an beiden Küstenpunkten.

Vergleichen wir nun die einzelnen Komponenten der Gezeiten, wie sie nördlich und südlich der Enge bei Chalkis sich ungefähr angeben lassen, so erhalten wir folgende Tabelle:

Tiden	Norderhafen	Süderhafen	Verhältnis
M_2	230	16,88	13,5 : 1
S_2	170	14,44	11,8 : 1
K_2	70	(3,9)	(18 : 1)
N_2	(?)	2,8	—
$K_1 + O_1$	60	57	1 : 1

Hieraus ist die große Verschiedenheit der Gezeitenbewegung an 2 so nahe nebeneinanderliegenden Punkten, wie es der Norder- und Süderhafen von Chalkis sind, deutlich zu ersehen. Die Hubhöhen der Halbtagstiden sind nördlich rund 13 mal so groß wie südlich, während die Eintagtiden nahezu gleiche Amplituden haben. Daraus ergibt sich für den Norderhafen ausgesprochener Halbtagstypus, da $(K_1 + O) : (S_2 + M_2)$ kleiner 0,25, nämlich 0,15 ist, und für den Süderhafen ausgesprochener Eintagstypus mit $(K_1 + O) : (S_2 + M_2)$ größer 1,25, nämlich $= 1{,}87$. An beiden Punkten haben wir dagegen eine große halbmonatliche Ungleichheit der Halbtagstiden, weil $S_2 + K_2 = M_2$ ist. Ferner ist beidesmal die S_2-Komponente groß gegen die M_2-Tide und zwar $S_2 = 0{,}74\, M_2$, während die Theorie $S_2 = 0{,}47\, M_2$ voraussetzt. Die Abweichung des Verhältnisses von K_2 nördlich und südlich, nach obiger Tabelle 18 : 1, dürfte nicht vorhanden sein, weil K_2 in Isthmia nicht durch Analyse gefunden ist, sondern für dieselbe der theoretische Wert $K_2 = 0{,}272\, S_2$ angenommen ist. Ich glaube sogar, daß wir umgekehrt aus dem Ergebnis für die übrigen Halbtagstiden von Isthmia und Chalkis-Nord auf einen merklich größeren Wert dafür auch in Isthmia schließen dürfen und zwar etwa 6 mm gegen 3,8, wie ihn die Rechnung ergibt. In gleicher Weise müssen wir dann schließen, daß auch N_2 im Norderhafen mit etwa 60 mm Hubhöhe auftritt und zum Teil in M_2 enthalten ist, das etwas zu groß sein dürfte.

Die Seiches im Norder- und Süderhafen von Chalkis.

Die Pegelablesungen an beiden Punkten nördlich und südlich der Meerenge bei Chalkis weisen, wie ein Blick auf die graphische Darstellung zeigt, ständig Schwankungen kürzerer Dauer auf, in denen Seiches der in Betracht kommenden Buchten gesucht werden müssen, die Krümmel schon eingehend diskutiert hat. Es ist das Verdienst Forels, das Euripusproblem mit den Seiches in Zusammenhang gebracht und damit einen wesentlichen Teil der Frage gelöst zu haben. Miaulis' voll-

ständig ablehnender Standpunkt gegenüber dieser Lösung Forels erklärt sich einmal daraus, daß Forel die Gezeiten in den Süderhafen verlegte und das Hauptproblem der anormalen Gezeiten nicht kannte. Dazu kommt, daß Miaulis nicht die regelmäßigen Flutwechsel und Strömungen von kurzer Periodendauer beobachten konnte, wie sie die Forelsche Hypothese annahm, sondern daß sich diese sehr unregelmäßig und weniger zahlreich erwiesen. Endlich konnte Miaulis die vermuteten Seiches in Ädipsos, im Nordosten des Talantischen Euripus, gar nicht auffinden. Wie wir später sehen werden, treffen die Beobachtungen von Miaulis alle wirklich zu, sprechen aber nicht gegen das Vorkommen von Seiches, sondern lassen nur erkennen, daß die Erscheinungen viel komplizierterer Art sind, als man zuerst vermutete.

Will man nun aus den vorliegenden Pegelablesungen die Periodendauern der Seiches bestimmen, so stößt das auf große Schwierigkeiten. Da nämlich die Kurven nicht durch Registrierapparate, sondern durch halbstündliche Ablesungen gewonnen sind, so können Schwingungen kürzerer Dauer ganz unbeachtet geblieben sein, dann müssen durch die Ablesungen selbst periodische Schwankungen entstanden sein, die von Seiches kürzerer Dauer herrühren, in Wirklichkeit also gar nicht vorhanden waren. Alle Schwingungen nämlich, deren Periodendauern t in dem Intervall von 30 Minuten ohne Rest enthalten sind, bleiben ganz verborgen. Für andere Periodendauern t unter 2×30 Minuten $= 60$ Minuten trifft die halbstündliche Ablesung immer wieder eine andere Stelle der Schwingung und zwar schreitet für jede Ablesung der Punkt auf dem Wellenzug um den Betrag $(30 - n \cdot t)$ voraus, wobei $30 - nt < \frac{t}{2}$ sein muß, oder bleibt um $(n \cdot t - 30)$ zurück, wobei ebenfalls $(n \cdot t - 30) < \frac{t}{2}$. Die Ablesung trifft den Wellenzug wieder an der nämlichen Stelle nach so vielen Ablesungen als die genannte Differenz in t enthalten ist. Diese falsche Periodendauer T bestimmt sich sonach aus folgenden 3 Gleichungen:

Ist

$t < 60$ Minuten, so ist $T = \frac{t \cdot 30}{t - 30}$ Minuten
> 30 -

$t < 30$ und $(30 - n\,t) < \frac{t}{2}$, so ist $T = \frac{t \cdot 30}{30 - n\,t}$ Minuten

$t < 30$ und $(n\,t - 30) < \frac{t}{2}$, so ist $T = \frac{t \cdot 30}{n \cdot t - 30}$ Minuten.

Aus diesen 3 Gleichungen ist leicht zu ersehen, daß irgend eine gemessene Periodendauer T, die auch selbst wirklich in der Natur vorhanden sein kann, zugleich durch 5 andere Schwingungen zwischen 60 und 10 Minuten Periodendauer infolge der Ablesung des Wasserstandes in Intervallen von 30 Minuten im Limnogramme auftreten kann. Dabei bleiben alle Schwingungen unter 10 Minuten unberücksichtigt. Die Funktion T durchläuft alle Werte von 60 bis ∞, wenn t abnimmt von 60 bis 30, und wieder umgekehrt alle Werte von ∞ bis 60, wenn t abnimmt von 30 bis 20. Dies wiederholt sich, wenn t die Werte von 20 bis 15 und dann von 15 bis 12 annimmt usw.

Speziell müssen bei den folgenden unter T angegebenen Periodendauern, wenn sie im Limnogramme gefunden werden, die unter t_1, t_2, t_3 bis t_6 angegebenen Periodendauern als in der Natur vorhanden in Betracht gezogen werden.

T	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
60	60	60	20	20	12	12
75	75	50	21,4	18,75	12,5	11,5
90	90	45	22,5	18	12,8	11,2
120	120	40	24	17,1	13,3	11,0
150	150	37,5	25	16,7	13,6	10,8
180	180	36	25,7	16,4	13,8	10,6
240	240	34,3	26,7	16	14,1	10,4
480	480	32	28,2	15,5	14,5	10,2
∞	∞	30	30	15	15	10

Berücksichtigt man noch, daß die Ablesungen nicht genau alle 30 Minuten gemacht worden sind, sondern das eine Mal einige Minuten früher, das andere Mal später, so muß man mit Störungen im Limnogramme rechnen, die dasselbe zur Messung ganz unbrauchbar machen, besonders wenn die gerade auftretende Schwingung t eine größere Amplitude hatte. Da nun noch die Seichesforschung in den Seen und den Buchten der Meere ergeben hat, daß selten eine Schwingung allein auftritt, sondern sich gewöhnlich mehrere Schwingungen von verschiedener Periodendauer überlagern, so kann man die große Unregelmäßigkeit der Limnogramme begreifen, wie sie die Miaulischen Beobachtungen ergeben und auf die Krümmel schon aufmerksam gemacht hat. Unter diesen Umständen ist eine exakte Analyse der Kurven durch Chrystals Restmethode ganz unmöglich[1]), es lassen sich nur die einzelnen Schwingungen, die innerhalb einer bestimmten Zeit ununterbrochen auftreten, zählen und dann eine ungefähre Dauer auf etwa 5 Minuten angeben. Da die Gezeitenbewegung des Norderhafens die Seiches gewöhnlich ganz verdeckt, so konnten die Kurven nur vermessen werden, nachdem die Gezeitenbewegung durch Subtraktion der künstlichen Kurve eliminiert worden war. 2 Tagesdiagramme dieser Restkurven teile ich in Fig. 5 und 6 der Tafel mit. Die auf diese Weise erhaltenen Periodendauern sind im folgenden zusammengestellt, wobei unter „T“ die gemessene Dauer in Minuten, unter „n“ die Gesamtzahl der gezählten Schwingungen, unter „ν“ die größte Anzahl Wellen einer Reihe und unter „m“ die Anzahl der gemessenen Reihen steht. Daneben füge ich die Schwingungen an, wie sie Krümmel gefunden hat.

[1]) G. Chrystal, An Investigation of the Seiches of Loch Earn. Trans. R. Soc. Edinburgh 1908, Bd. 46, III, Nr. 20, p. 382.

Periodendauern der Diagramme des Norderhafens.

a) Meine Messungen				b) Krümmels Messungen			
T in Minuten	n	r	m	T in Minuten	n	r	m
65	28	6	7	80	27	—	3 (+ 1)
95	37	7	8	90	32	—	8 (+ 2)
110	3	3	1	103	7	—	1 (+ 2)
180	6	3	3	120	12	—	2 (+ 1)
200	14	3	5	142	1	—	0 (+ 3)
480	3	1	3	180	20	—	5 (+ 1)

Periodendauern der Diagramme des Süderhafens.

60	6	4	2	72	10	—	0 (+ 1)
75	11	6	2	—	—	—	—
80	5	3	2	80	27	—	3 (+ 1)
90	20	5	5	90	72	—	9 (+ 4)
96	5	3	2	—	—	—	—
105	15	5	4	103	49	—	7 (+ 3)
115	8	4	2	—	—	—	—
120	28	5	9	120	18	—	3 (+ 2)
175	3	3	1	142	5	—	0 (+ 2)
210	4	2	2	—	—	—	—
240	2	2	1	—	—	—	—
300	7	2	4	—	—	—	—
480	2	1	2	—	—	—	—

Wenn die vorliegenden Diagramme durch Registrierapparate erhalten worden wären, so dürften auch die selten und in kürzeren Reihen auftretenden Schwingungen als wirkliche Seiches angesehen werden. Bei der im vorausgehenden besprochenen Unsicherheit, welche halbstündliche Ablesungen verursachen, können wir aber nur die häufiger auftretenden Periodendauern in Betracht ziehen. Die im Norderhafen häufiger gefundenen Periodendauern sind demnach:

480 Min., 200 Min., 95 Min., 65 Min.

Die im Süderhafen häufig auftretenden Schwankungen haben folgende Periodendauern:

300 Min., 120 Min., 105 Min., 90 Min., 75 Min.

Ein Vergleich mit den von Krümmel gefundenen Dauern zeigt eine weniger gute Übereinstimmung im Norderhafen als im Süderhafen. Während im Süderhafen Krümmel ebenfalls Schwingungen von 120 Minuten, 103 Minuten und 90 Minuten am häufigsten findet, kommen im Norderhafen nur diejenigen von 90 Minuten und 180 Minuten den oben gefundenen nahe. Ein Grund hiefür dürfte darin zu suchen sein, daß Krümmel die Schwingungen im Norderhafen aus den Kurven selbst bestimmt hat, während ich die die Schwingungen gewöhnlich ganz verdeckenden Gezeitenbewegungen durch Subtraktion eliminiert habe, wodurch die Schwingungen selbst genauer gemessen werden konnten und außerdem auch solche Kurven herangezogen werden konnten, in denen die Seiches ganz verdeckt waren. Ferner zählte Krümmel die Schwingungen innerhalb 12 Stunden, während ich nur die Schwingungen gemessen habe, soweit sie sich deutlich zeigten. Volle 12 Stunden hindurch konnte ich keine der Schwingungen herausfinden. Krümmel bezeichnete auch selbst mehrere Messungen als unsichere, die ich unter „*m*“ in Klammern angefügt habe. Der Unterschied der häufigsten Wellenperiode des Norderhafens von 90 Minuten bei Krümmel und 95 in unserer Angabe erklärt sich befriedigend daraus, daß Krümmel 8 ganze Wellen in 12 Stunden zählte, während ich nur die sicheren Wellen gemessen habe. In gleicher Weise dürfte sich auch die Abweichung der Perioden von 200 Minuten und 180 Minuten ergeben.

Mit Sicherheit kann man wohl aus den obigen Ergebnissen angeben, daß die von Krümmel als Mittel aus der Periodendauer von 90 Minuten und 103 Minuten abgeleitete häufigste Schwingung des Süderhafens von 96 Minuten nicht vorkommt, ebenso die aus den Schwingungen von 80 Minuten, die ich überhaupt nicht finden konnte, und von 90 Minuten im Norderhafen durch Mittelbildung abgeleitete von 85 Mi-

nuten. Es kommen daher auch die auf Grund dieser angenommenen Schwingungen möglichen Strömungserscheinungen nicht mehr in Betracht, wie ich sie zur Erläuterung der komplizierten Stromvorgänge an der mehrerwähnten Stelle auseinandergesetzt habe und die auch Aufnahme in Krümmels Ozeanographie gefunden haben[1]).

Um nun eine Entscheidung treffen zu können, welche der gefundenen Periodendauern wirklich vorhandenen Seiches zukommen, wäre eine genaue Berechnung der Periodendauern aus den Beckendimensionen notwendig. Die in Betracht kommenden Becken sind aber von komplizierter Gestalt, so daß die sogenannte Normalkurve, welche ich für beide Becken konstruiert habe, eine Anwendung der exakten Chrystalschen Theorie[2]) unmöglich macht. Wir sind daher nur auf Annäherungsformeln angewiesen, und diese geben gerade für konvexe Becken, das sind solche, welche am Knoten eine Einengung besitzen, nur unsichere Werte.

Beginnen wir mit den im Talantischen Euripus möglichen Schwingungen, so kann nach den in der Literatur vorliegenden anderweitigen Beobachtungen der Talantische Euripus als Ganzes mit einem Knoten am Eingange des Oreoskanales schwingen. Für solche Buchten, welche durch einen engen Verbindungskanal mit dem offenen Meere in Verbindung stehen, gibt eine von den Japanern aufgestellte Formel brauchbare Werte für die Schwingungsdauer[3]):

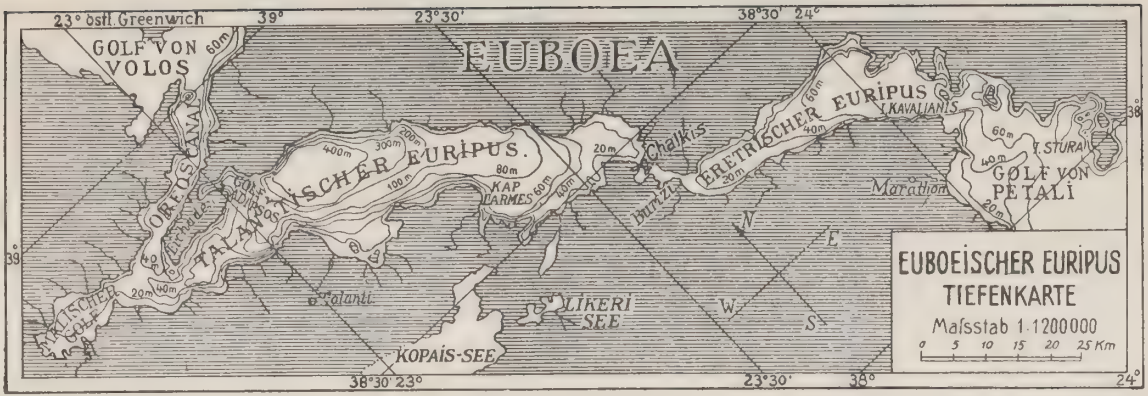
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{A \cdot l}{g \cdot b \cdot h}} \left\{1 + \frac{2b}{\pi \cdot l}\left(0{,}9228 + \log \text{nat} \frac{4L}{\pi b}\right)\right\} \cdots.$$

Hiebei bedeutet A die Fläche der Bucht, hier $= 1265$ qkm, l, b, h die Dimensionen des Verbindungskanales, hier des Oreos-

[1]) Krümmel, Ozeanographie II, 1911, p. 182.

[2]) G. Chrystal, On the hydrodynamical theorie of seiches. Trans. R. Soc. Edinburgh 1905, Bd. 41, III, Nr. 25, p. 599.

[3]) K. Honda, T. Terada, Y. Yoschida and D. Isitani, An investigation of the secondary undulations of oceanic tides. Journ. Coll. Sc., Bd. 24, Tokyo 1908, p. 66 und Krümmel, Ozeanographie, p. 163.



Die Kartenskizze ist entnommen: E. von Cholnoky, Limnologie des Plattensees. Wien 1897, S. 91.

Der Süderhafen von Chalkis — bei dem Maßstab der Karte zu sehr verkleinert — ist ein fast kreisrundes Becken von 1,8 km Durchmesser und ziemlich gleichmäßiger Tiefe von 10—11 m. Sein südlicher Ausgang hat eine Breite von nur 210 m. Der sich anschließende Chalkidische Euripus hat eine mittlere Tiefe von nur 7 m und bei Burtzi, wo er in den Eretrischen Euripus mündet, eine Breite von 570 m.

kanales mit $l = 31.4$ km, $b_m = 4{,}4$ km, $h_m = 50$ m und L die Länge der Bucht, hier $= 100$ km. Es berechnet sich hieraus:

$$T = 9{,}2 \text{ Stunden.}$$

Wenden wir zur Berechnung die Du Boyssche Formel[1]) an, so ergibt diese 5,1 Stunden. Berücksichtigt man noch, daß der Knoten an eine stark konvexe Stelle fällt, so ist entsprechend den Ergebnissen an ähnlich geformten Becken[2]) dieser Wert mit 1,75 zu multiplizieren und ergibt 8,9 Stunden. Bei der Elimination der Gezeitenkurve kommt wiederholt eine Welle von dieser Periodendauer zum Vorschein, wofür ich ein Beispiel vom 29. März in Fig. 5 der Tafel beigebe. Wenn auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, daß diese Schwingung von solchen kürzerer Dauer infolge der halbstündlichen Ablesungen herrührt, so ist es doch unwahrscheinlich, da nur ein sehr regelmäßiges Auftreten dieser Schwingung mit gleichbleibenden Amplituden und ohne Phasenänderung einen so deutlichen Wellenzug von 8 Stunden Dauer erzeugen könnte.

Als weitere Schwingung ist die uninodale Seiche des Talantischen Euripus samt Malischen Golfes sehr wahrscheinlich. Die Periodendauer hat Forel[3]) nach der Du Boysschen Formel zu 149 Minuten berechnet und bei der Gestalt des Beckens muß die Formel eine gute Annäherung geben. Es ist jedoch keine Periodendauer von dieser Größe in den Beobachtungen zu finden; auch Krümmel, der die Schwingung ausdrücklich gesucht hat, konnte nur 3 Einzelwellen finden, die er aber als unsicher zählte. Als zweitgrößte Dauer wurde eine solche von 180 Minuten, häufiger von 200 Minuten beobachtet, in welcher man die uninodale Seiche suchen muß (siehe Fig. 6 der Tafel). Es ist nach den Ergebnissen an Seen sehr wahrscheinlich, daß die starke Einengung bei den Lithaden die Knotenlinie, die nach Du Boys' Formel weiter östlich davon fallen sollte, so verschiebt, daß sie an diese Einengung zu liegen

[1]) Arch. Gen. 1891, Bd. 25, p. 628.
[2]) Pet. Mitt. 1908, Heft II, p. 43.
[3]) Forel, Le Léman II, p. 167.

kommt und dadurch die Dauer so stark verlängert wird. Das verhältnismäßig seltene Auftreten dieser Seiche ist jedenfalls durch die unsymmetrische Lage dieser Knotenlinie verschuldet. Dabei kann jedoch diese Periodendauer auch von Seiches kürzerer Dauer herrühren, wie aus der Tabelle S. 114 zu ersehen ist.

Die nächste Schwingung von 95 Minuten Periodendauer, die im Norderhafen die größten Amplituden erreicht und am häufigsten auftritt [1]), kann vom theoretischen Standpunkte gut als binodale Seiche zu der obigen aufgefaßt werden oder, was dasselbe ist, als uninodale des Talantischen Euripus bis zum Golf von Ädipsos, da das Verhältnis der Periodendauer von $95 : 200 = 0{,}48$, also kleiner als 0,50 ist, wie es der konvexen Gestalt des ganzen Beckens entspricht. Die großen Amplituden sprechen ebenfalls für diese Annahme, da die Knotenlinie etwas nördlich von Kap Larmes zu liegen kommt und der südlich gelegene Teil der schwingenden Fläche kleiner ist und spitz ausläuft, während der nördliche große Tiefen enthält.

Die Periodendauern weiterer jedenfalls noch auftretender Seiches des Norderhafens, wie die gemessene Dauer von 65 Minuten schließen läßt, lassen sich bei der komplizierten Gestalt und besonders bei der unsymmetrischen Lage der Knotenlinie auch nicht angenähert angeben.

Der südlich von Chalkis befindliche Meeresteil ist fast von noch komplizierterer Beckengestalt, da er durch 3 starke Einschnürungen in drei Teile zerfällt, den fast kreisrunden Süderhafen, den Chalkidischen Euripus nördlich der Enge bei Burtzi und den Eretrischen südlich Burtzi, der selbst wieder durch die Einengung bei der Insel Kavalianis vom Golf von Petali abgeschnürt ist (s. Kartenskizze auf S. 119). Schwingungen mit größerer Amplitude sind nur möglich, wenn der Knoten an eine der Einschnürungen fällt. Beginnen wir bei den kürzer dauernden Schwingungen, so dürfte zunächst die Querseiche des Süderhafens auftreten. Die Periodendauer derselben berechnet sich mittels der parabolischen Annäherung [2])

[1]) Siehe Fig. 46, S. 181 in Krümmels Ozeanographie II, 1911.

[2]) Pet. Mitt. 1908, Heft II, p. 44.

$$T = \frac{\pi l}{\sqrt{2gh}}, \ldots$$

wobei l die größte Breite des kreisrunden Hafens = 2,88 km und h die größte Tiefe = 11 m bedeuten, zu $T = 10{,}2$ Minuten. Bei der geringen Breite dürfte diese Schwingung wohl selten eine Amplitude von 1 Zoll erreichen.

Als weitere Schwingung kommt die einknotige Buchtenschwingung dieses kreisrunden Beckens mit einem Knoten an der starken Einschnürung in Betracht, wofür die Du Boyssche Formel als Periodendauer 20,5 Minuten ergibt. Infolge der starken Einschnürung am Knoten wird die Dauer stark verlängert und darf auf 20,5 Minuten × 1,75 = 36 Minuten ungefähr geschätzt werden. Andere Annäherungsformeln passen hier nicht, da die Bucht nicht mit dem offenen Meere, sondern mit einem zweiten Becken in Verbindung steht, das aber selbst wieder mit einem weiteren Becken kommuniziert. Die Schwingung kann aber nur dann in größeren Reihen auftreten, wenn auch gleichzeitig ein Knoten an die Einengung von Burtzi fällt, wodurch aber die Dauer durch das schwingende Hauptbecken beeinflußt werden dürfte; in welchem Sinne ist aber nicht anzugeben. Diese Schwingung kann bei ihrer Dauer unter 60 Minuten nicht direkt beobachtet werden, sie muß vielmehr, falls sie mit größeren Amplituden und in regelmäßigen, langen Reihen auftritt, in einer der in Tabelle S. 114 angeführten Periodendauern sich zeigen. Da aber eine Änderung ihrer Dauer von nur wenigen Minuten bedeutende Änderungen der falschen Periodendauer verursacht (vgl. Tabelle S. 114), so ist diese letztere auch aus den beobachteten Dauern nicht herauszufinden.

Eine weitere Buchtenschwingung muß ihren Knoten an der Einengung bei Burtzi haben. Die Periodendauer berechnet sich nach Du Boys zu 65 Minuten und wird durch die Einschnürung am Knoten, wenn auch nicht so stark, wie die vorausbesprochene Seichesdauer, so doch etwa auf 90 Minuten verlängert werden, also ungefähr um $^1/_3$ der Dauer nach

Du Boys. In ihr darf wohl die häufig auftretende Schwingung des Süderhafens von 90 Minuten Dauer gesucht werden. Der vielmal größere Flächeninhalt des außerhalb Burtzi gelegenen Teiles läßt auch eine bedeutend größere Amplitude im Chalkidischen Euripus erwarten und diese Schwingung erreicht auch im Süderhafen große Amplituden. Für die nächst größere Periodendauer kann der Knoten nur bei der Insel Kavalianis gesucht werden. Nach Du Boys' Formel erhält man hiefür eine Schwingungsdauer von 165 Minuten. Wie die Chrystalsche Theorie ergeben hat, sollte für eine nicht zu starke Einengung am Knoten, wie wir sie hier haben, sich eine solche Verlängerung der Periodendauer ergeben, daß diese der sonst nach Du Boys zu großen Dauer nahekommt. In den Beobachtungen findet sich aber keine Schwingung von der erwähnten Dauer. Es scheint vielmehr die am häufigsten beobachtete Periodendauer von 120 Minuten dieser Schwingung zuzukommen. Die schwingende Bucht hat nämlich an ihrem Ende den schmalen und seichten Chalkidischen Euripus und auf diesen Teil treffen allein 65 Minuten nach Du Boys, während nach Chrystal[1]) solche Buchten am Ende eines Schwingungsbauches die Dauer wenig beeinflussen. Hiemit erklärte sich auch die merkwürdige Verkürzung der uninodalen Seichesdauer des Mondsees[2]), der an seinem nordöstlichen Ende sehr spitz ausläuft. Ich halte es daher für wahrscheinlich, daß die Schwingung von 120 Minuten ihren Knoten bei Kavalianis hat. Für die nächst kleinere Periodendauer von 105 Minuten kann keine Schwingungsform des südlichen Beckens angegeben werden; sie kann durch die Ablesungen entstanden sein (vgl. Tabelle S. 114) oder es kann auch bei gleichzeitigem Auftreten der Seiches von 90 Minuten und 120 Minuten oder abwechselndem Vorherrschen der einen oder anderen Amplitude der beiden fälschlich das Mittel beider als neue Seiche gezählt sein. Die Schwingungen von größerer Dauer sind wahrscheinlich alle solche, deren Knoten außerhalb

[1]) Trans. R. Soc. Edinb. 1905, 25, p. 599.
[2]) Pet. Mitt. 1911, p. 205.

des Golfes von Petali liegt und haben als Schelfseiches zu gelten im Sinne von R. A. Harris[1]), wie sie auch in dem Mareogramme von Isthmia sich finden[2]).

Die Möglichkeit, daß auch Schwingungen zwischen dem nördlich und südlich Chalkis sich befindlichen Becken mit einem Knoten an der Enge selbst auftreten können, hat Krümmel schon in Betracht gezogen und für unwahrscheinlich erklärt, weil die Gezeiten sich nicht einmal dorthin fortsetzten. Seine Berechnungen, welche er an der Hand der damals noch einzigen Formel von Merian[3]) anstellte, ließen eine solche Schwingung wohl zu. Aus der obenerwähnten Formel der Japaner (S. 118) läßt sich für eine angenommene Buchtenschwingung des Chalkidischen Euripus mit einem Knoten an der Brücke bei Chalkis eine Dauer von rund 11 Stunden berechnen und wenn man den ganzen Eretrischen Euripus mit einem Knoten an der Enge bei Chalkis als schwingende Bucht in Rechnung zieht, eine solche von mehr als 60 Stunden. Berücksichtigt man noch, daß diese Buchten nach Süden nicht abgesperrt sind, sondern durch viel weitere Mündungen, als es der schmale Sund ist, mit dem offenen Meere in Verbindung stehen, so daß eine entstehende Niveaudifferenz in kurzer Zeit sich nach dorthin ausgleichen muß, so darf man eine solche Schwingung als unmöglich bezeichnen.

Die Strömungen des Euripus bei Chalkis.

Im vorausgehenden haben wir gesehen, daß die beiden Meeresteile nördlich und südlich Chalkis ständig Niveauschwankungen unterworfen sind, welche Hubhöhen von mehr als 1 m erreichen können. Beide Becken verbindet nun ein schmaler Sund von nur 60 m Breite und ebensolcher

[1]) R. A. Harris, Manual of tides V (U. S. Coast Survey Rep. 1907). Washington 1908, S. 472.

[2]) Diese Sitzungsberichte. München 1913, p. 572.

[3]) Merian, Über die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefäßen. Basel 1828, p. 31.

Länge. Derselbe ist an der schmalsten Stelle (bereits seit dem Jahre 411 v. Chr.) überbrückt und zwar führt von der Mitte aus, wo sich noch eine alte venetianische Feste befindet, eine 18 m lange Drehbrücke nach der Insel und eine ebenso lange feste Brücke nach dem Festlande. Unter der Drehbrücke ist die Wassertiefe 5,5 bis 6 m, unter der festen nicht ganz 1 m. Hier am seichten Teile liegen die bekannten Mühlen, welche durch die Strömung betrieben werden[1]). Durch diesen Verbindungskanal suchen sich die bestehenden Niveaudifferenzen auszugleichen und erzeugen jene von alters her so bekannten Euripusströmungen, die wegen ihrer Unregelmäßigkeit in Stärke und Richtung sprichwörtlich geworden sind. Schon wenn nur die stets in größerer Zahl vorhandenen Schwankungen eines Beckens die Strömungen erzeugen würden, wären unregelmäßige Änderungen in Stärke und Richtung der Strömung zu erwarten. Nun kommen aber auch ebenso die Schwankungen des zweiten Beckens in Betracht und ändern den beiderseitigen Niveauunterschied, so daß die Unregelmäßigkeit der Strömung darin hinlänglich begründet ist.

Wir können uns aber einen tieferen Einblick in das Strömungsproblem verschaffen, indem wir die Differenzen der halbstündlichen Pegelablesungen nördlich und südlich der Enge bilden, worin wir dann direkt die sich in Strom umsetzende Wasserhöhe erhalten. In folgender Tabelle sind die Differenzen (in Zoll) für den ganzen synodischen Monat vom 27. März bis 25. April 1872 zusammengestellt, wobei die fetten Zahlen eine Erhebung des südlichen Niveaus über das nördliche bedeuten, also einen Strom von Süd nach Nord andeuten, die übrigen Zahlen eine Erhebung des nördlichen Niveaus und einen Strom von Nord nach Süd anzeigen. Letzterer wird gewöhnlich auch Flutstrom genannt. Aus der Tabelle ersieht man vor allem die Zeit des Stromwechsels an jedem Tage. Miaulis hat nun an 5 Tagen auch Beobachtungen der Zeit des Stromwechsels angestellt und wir können diese benützen, um sie mit den Ergebnissen unserer Tabelle zu vergleichen.

[1]) Zur Zeit wird ein 30 m breiter und 8 m tiefer Kanal hergestellt.

Tabelle der Niveaudifferenzen nördlich und südlich Chalkis.

Tag	6h		7h		8h		9h		10h		11h		12h		1h		2h		3h		4h		5h		6h	Stromwechsel in 12h	Wellen in 12h	Größte Differenz nördlich	Größte Differenz südlich	h Dauer des südl. Stromes	Wind Vormittag	Wind Nachmittag
	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·	30	·							
0	12	13	17′	8′	3	2	0	·	6	8	9′	10	10	5	5	4	3	4	8	14	20	18	16′	20	20	2	2	20	10	4½	NNW 16	NNW 15
1	15	16	15	14	12	6	1	2′	6′	9′	11	14′	11	14	8	8	8	7	3	5	5	8	10	13	15	2	1	16	14	6	E 1	SSW 2
2	21′	16′	15	11	7′	6	5′	5	5	5	9	15	15′	16′	17	12	5	0	4	4	8	10	11	·	18	2	1	21	17′	4½	S 4	S 6
3	15	16	13	12	17	7	1	6	2	6	10	9	9	12	9	2′	1	0	0′	5	4	4	10	·	14	4	6½	16	12′	4	NNE 7	SSW 16
4	6′	9	9	14	18	14	14′	15′	6′	6	2	0	2′	1	2	4	4	0	2	2	8	5	6	·	16	4	5	18	4	2½	N 2	NNE 16
5	16′	17	14′	11	12	17	12	8	5	3	3	2	3	2	0	2	2	4	6	1	5	6	7	8	7	2	4	17	6	2½	NNE 16	N 4
6	2	6	10	12	11	11	15	11	8	5	2	3	2	0	1	1	1	2′	1	1	2	2′	4	5′	7	4	4½	12	1	2	NNW 4	N 1
7	11	7	6	6	6	6	5	4′	3′	1′	2′	0	1	0′	0	1	2	3	3	3	4	3	3	5	6	(4)	4	11	2	1	E 1	S 2
8	9	8	9	9	4	6	6	7	5	4	4	4	5	5	6	6	6	7	8′	5	5	6	7	5	4	0	4	9	0′	0	NNE 16	N 11
9	9	9	4	2	1	0	1	0	2	0′	5	6	6′	6	6	4′	5	5′	4	6	4	3	2	2	0	(2)	5	9	2′	½	E 1	S 2
10	4	1	3	5	3	3	1′	2	5′	3	5	2	5	8	11	11	11	11	7	11	12	9	8	6	5	1	4½	12	5′	6	S 2	WSW 16
11	2	1	0	0′	5	9	6	4	8	7	4	2	1	0	5	8	8	10	13	14	15	13	7	7	5	2	4	15	9	4	O	S 2
12	3	1	0′	5	4	6	7	7′	9	7′	6	6	2′	2	1	6′	8	9′	12	12	12	13′	13	12	11′	4	3	13	9	5½	O	S 2
13	9	4	0	3	4	6	7	7′	10	7′	9	9	8	0	1′	4	4	6	9	10	11′	14	13′	10	10	2	2	14′	10	5½	S 7	SSW 2
14	27	19	0	3	6	3	0′	2	6′	11	8′	—	7′	9′	9	2	5′	8	13	14	17	18	20	16	15	4	4	(27′)	11	6	SSE 2	W 11
15	14	11	6	5	7	2	1	6	6	8′	7′	6	7	6	5′	2	3	7	5	13	17	18′	19	17	15′	2	3	19	8	5	NNW 7	NW 1
16	18	17′	19	14	9	5′	2	0	3	11	10	11	11′	11′	9	6	5	0	2	8	10	11′	14	16	17′	2	1	19	11	4½	N 1	S 2
17	15	17′	16′	11′	7	8	7	8	1	4	8	11′	13′	13′	10′	7	0′	0′	1′	5	6′	9	11	14	15′	2	1	17	13′	4	N 1	S 4
18	15	18	18	14	15	11′	10	5	1	2′	3	5	6	8	8′	8′	6	4′	1	1	5	6	9	10	11	2	1	18	8′	5	NE 1	S 2

19	14	12′	12′	10′	10	10′	8	4′	1	**3**	5′	**4**	**3**	3′	**3**	3′	2′	2′	1′	**3**	**1**	3	7′	15	16	2	4	16	5′	6	E 1	S 4
20	1	1	4	6	8	8	12	12	10	6	6′	6	2	**5**	3′	2′	**3**	**2**	**2**	**1**	0	1	·	3	3′	2	$2^1/_2$	12	5′	$3^1/_2$	NNE 4	S 7
21	2	3′	4	6	2	9′	7′	6′	5	2′	3	2′	3	0	2′	0	**4**	2	**1**	2′	2	5	4	4	8	4	7	9	4	$1^1/_2$	NNE 1,2	S 1
22	2	2	1′	**3**	1	4′	2	1′	2	7	4′	2	2′	4′	1′	5′	4	2′	0	3′	**1**	3	9	4	0	8	7	9′	4	$2^1/_2$	NNW 4	N 2
23	6	**1**	**4**	**5**	**1**	0	**1**	0	2	3	0′	5	2	10	13′	12	12	15	9	10′	9	7	1	1	5	4	7	10	5′	$2^1/_2$	NNE 11	NNE 7
24	5	1	3	**2**	5′	**1**	0′	1′	**4**	0	3	5	6	7	8	5	10	9	10	6	10	8′	8	5	1	**4**	$5^1/_2$	10′	5	$2^1/_2$	NNE 11	NNW 16
25	3	2	2	5	3	**2**	**4**	**2**	**1**	**4**	**2**	**3**′	**2**′	4	11	10′	14	14	12′	15	15	15′	18	14	5′	2	6	18	4	4	NNW 7	NNW 4
26	6	0	**1**	**2**	5′	8	**9**′	8′	**5**	**2**	1	**1**	1′	—	7	9	11	9′	10	11	13	14′	12	11	15	2	$3^1/_2$	14	9	$4^1/_2$	NNW 4	NNW 2
27	7	4′	0′	**4**	**6**	8′	**9**	**10**	**9**	**11**	8′	**6**	**5**	**4**	3′	3	7	8	12′	·	10′	17	12	9	—	2	3	17′	11′	$6^1/_2$	O	S 1
28	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	SSW 1	S 4
29	14	11	6	4	7	0	**1**	7	**7**	8′	8′	**7**	**7**	8	6′	**4**	0′	**0**′	6′	12′	15	16	17′	16	14	2	2	17	8	$5^1/_2$	E 1	S 2

Anmerkungen. 1. Die Niveaudifferenz ist in engl. Zoll angegeben. Halbe Zoll sind durch einen Strich rechts oben von der Zahl angedeutet.

2. Die fetten Zahlen bedeuten eine südliche Niveauerhebung und daher eine Umkehrung der Stromrichtung.

3. Die Zahl neben der Windrichtung gibt die Sekundengeschwindigkeit des Windes in Metern an.

3. Die größte Niveaudifferenz am 14. Mondtag um 6^h und $6^h\ 30^{min}$ a. m. von 27 und 19 Zoll ist durch nichts begründet, weshalb hier ein Druckfehler vermutet werden kann.

Kentern der Strömung.

Mondtag	Datum	Gegen Norden nach Miaulis	Gegen Norden nach Tabelle	Gegen Süden nach Miaulis	Gegen Süden nach Tabelle
0.	27. III. 72	$9^h\ 10^{min}$	$9^h\ 10^{min}$	$2^h\ 10^{min}$	$1^h\ 50^{min}$
8.	4. IV. 72	—	—	—	—
15.	11. IV. 72	$8^h\ 42^{min}$	$8^h\ 45^{min}$	$2^h\ 23^{min}$	$1^h\ 50^{min}$
23.	19. IV. 72	$6^h\ 45^{min}$	$6^h\ 30^{min}$	$8^h\ 0^{min}$	$8^h\ 0^{min}$
		$8^h\ 30^{min}$	$8^h\ 20^{min}$	$9^h\ 10^{min}$	$9^h\ 0^{min}$
				$(11^h\ 55^{min})$	—
		$5^h\ 10^{min}$	—	$5^h\ 30^{min}$	—
29.	25. IV. 72	$8^h\ 15^{min}$	$8^h\ 30^{min}$	$2^h\ 30^{min}$	$2^h\ 45^{min}$

Die Beobachtungszeiten stimmen also sämtliche bis auf 20 Minuten überein, nur sind 2 Wechsel am 23. Mondtage aus unserer Tabelle gar nicht zu finden und zwar um $5^h\ 10^{min}$ und $5^h\ 30^{min}$, was sich jedoch vollkommen daraus erklärt, daß die Pegelablesungen halbstündlich gemacht wurden und dadurch die Erhebung des südlichen Niveaus um $5^h\ 10^{min}$ unbeobachtet bleiben konnte. Aus der Übereinstimmung in obiger Zusammenstellung dürfen wir einmal folgern, daß die Pegel selbst einnivelliert waren, ferner daß keine Schwingungen zwischen dem Talantischen und Eretrischen Euripus stattgefunden haben, da die Stromphasen zeitweise entgegengesetzt denjenigen durch die Niveaudifferenz erzeugten hätten sein müssen.

Miaulis hat eine eigens für den nautischen Gebrauch bestimmte Stromtafel aufgestellt (Tab. I der Originalarbeit), welche die Zeiten des Stromkenterns für einen ganzen synodischen Monat enthält, wonach ein Kentern nach je 6 Stunden 6 Minuten stattfinden sollte, was auch Krümmel aus den überwiegenden Gezeiten des Norderhafens gemäß der Wellentheorie gefolgert hat. Unsere Tabelle läßt aber deutlich ersehen, daß die Dauer des Stromes in nördlicher Richtung (angedeutet durch die fetten Zahlen) an 27 von den 29 Tagen immer unter 6 Stunden bleibt; dieselbe erreicht überhaupt nur

3,7 Stunden im Mittel. Auch Miaulis sind die zum Teil bedeutenden Abweichungen an den obenerwähnten 5 Tagen von der Stromregel seiner Tafel nicht entgangen, er sieht aber die die Ursache ausschließlich in den beobachteten Wind- und Luftdruckverhältnissen. Es treten aber auch bedeutende Abweichungen an ganz ruhigen Tagen auf, wie ein Vergleich der in der Tabelle S. 127 angefügten meteorologischen Beobachtungen mit der Dauer des Südstromes zeigt. So blieb am 4., 6., 7., 16., 17., 20. und 26. Mondtage, obwohl fast Windstille herrschte, die Dauer des Südstromes unter $4^1/_2$ Stunden. Während zur Zeit der Syzygien die Richtung und Stärke der Strömung noch deutlich überwiegend durch die Gezeiten des Norderhafens veranlaßt wird und die Maxima der Stromstärke in der einen und anderen Richtung mit Hoch- und Niedrigwasser des Norderhafens zusammenfallen, nimmt die Dauer des südnördlich gerichteten Stromes den Quadraturen zu immer mehr ab und nimmt dann wieder zu und zwar wiederholt sich diese Abnahme und Zunahme des ersten halben Monats ebenso im zweiten, obwohl ganz verschiedene meteorologische Beobachtungen vorliegen. Im Zusammenhang damit steht das weitere, nicht unwichtige Ergebnis aus unserer Tabelle, daß die nördliche Erhebung des Niveaus über das südliche im Durchschnitt doppelt so groß ist wie die südliche Niveauerhebung. Es kann hiefür nur im Gange der Gezeitenkurve des Süderhafens die Ursache gesucht werden. Wie aus den Gezeitenkurven aus Fig. 2 u. 3 und aus denjenigen des zweiten halben Mondmonates zu ersehen ist, liegt zur Zeit des Hochwassers im Norderhafen der Wasserstand des Süderhafens nahe dem Mittelniveau, so daß als Druckhöhe die halbe Hubhöhe der Gezeiten sich ergibt; wenn aber dann nach 6 Stunden nördlich Niedrigwasser ist, steht das südliche Niveau unter Mittelwasser, verkleinert so die südliche Druckhöhe und verkürzt gleichzeitig die Dauer einer südlichen Erhebung. Nimmt dann die Hubhöhe der nördlichen Gezeitenbewegung stärker ab, wie vom 5. und 20. Mondtage an, wo sie nur mehr die Hälfte beträgt, während die südlichen Tiden infolge des Eintagstypus sich

nicht im gleichen Sinne ändern, so erhebt sich das südliche Niveau nur mehr wenige Stunden über das nördliche und nur um wenige Zoll.

Am 8. und 22. Mondtag ist keine eigentliche Zeit, wo südnördlicher Strom herrscht, mehr zu erkennen und deshalb beginnen an denselben die bekannten Störungen der Gezeitenströme. Dadurch nämlich, daß die Hubhöhen der Gezeiten im Norderhafen selbst so klein sind, werden auch die nördlichen Niveauerhebungen so verkleinert, daß die Seiches auch ohne exzessive Amplituden eine Stromumkehr im einen oder anderen Sinne während des ganzen Tages bewirken können. Es zeigen sich zwar solche Stromwechsel schon am 4. bis 7. Mondtage und am 19. bis 21., wie aus der Tabelle zu ersehen ist, doch nur zu derjenigen Zeit, wo der schwache südnördliche Strom vorhanden sein sollte. Ebenso finden sich nach den Quadraturen nur zu den Zeiten des südnördlichen Stromes solche kurzdauernde Stromwechsel. Da nun in allen Berichten über das Euripusproblem übereinstimmend die Störungen erst mit und nach den Quadraturen auftreten sollen, so kann nur die Vertauschung der Flutstunden die Ursache davon sein, die am 7. und 23. eintritt. Wir müssen daher Miaulis zustimmen, wenn er diese Vertauschung gegenüber Forel als einen wesentlichen Teil der Euripusfrage bezeichnet. Denn nach Forels Hypothese sollten sich die Gezeitenstörungen ebensoviele Tage vor als nach den Nipptiden zeigen, da die Hubhöhen der Gezeiten in gleichem Abstande von den Quadraturen gleich groß sind.

Unsere Tabelle läßt nun deutlich erkennen, warum Miaulis die Vertauschung der Flutstunden erst auf den 10. und 25. Mondtag verlegte. Erst an diesen Tagen sind die südlichen Niveauerhebungen wieder so groß, daß die Seiches und andere denivellierende Ursachen keine Stromumkehr mehr verursachen können, so daß von da an deutlich zu beobachten ist, daß die südnördliche Strömung vormittags auftritt, während sie vor den Gezeitenstörungen am Nachmittage anzutreffen ist.

Eine Unklarheit bestand auch von jeher über die Anzahl der Stromwechsel innerhalb 24 Stunden, wofür auch die Tabelle

der Niveaudifferenzen Aufklärung bringt. Aus dieser Anzahl Stromwechsel innerhalb 12 Stunden, wie ich sie in der Tabelle angefügt habe, sieht man, daß ein einziges Mal 8 solche gezählt werden konnten; sonst findet sich nur bis 4maliger Wechsel. Dabei kann allerdings der eine oder andere kurzdauernde Wechsel durch die halbstündlichen Ablesungen verborgen geblieben sein. Doch sind diese Stellen an den kleinen Druckhöhen gewöhnlich zu erkennen, wie die schon erwähnte Stromumkehr am 23. Mondtag um $5^h\ 10^{min}$, wo die Druckhöhe sich auf 1 Zoll verringerte und nach einer halben Stunde noch 1 Zoll betrug. Wenn Babin berichtet, es pflege in 24 Stunden der Strom 11- bis 14- und mehrmal nach Süden zu strömen und wieder zurück nach Norden, so dürfte er dies aus dem beobachteten 3maligen Stromwechsel in $1^1/_2$ Stunden gefolgert haben. Es könnten sich ja im äußersten Falle alle Seichesschwingungen im Stromwechsel zeigen, wenn sich die Niveaudifferenz unter den Seichesamplituden halten würde; aber zu den Niveauänderungen durch die Gezeiten kommen noch, wie wir unten sehen, solche durch meteorologische Faktoren und gerade dann, wenn größere Seichesschwingungen sich zeigen, so daß ein so häufiger Stromwechsel ganz selten einmal sich zeigen dürfte. Die aufgetretenen Seiches sind auch aus unserer Tabelle zu erkennen, nämlich aus den wellenförmigen Schwankungen der Niveaudifferenzen. Die Anzahl derselben in zwölf Stunden habe ich ebenfalls in unserer Tabelle S. 127 angefügt, wonach im Maximum 7 Wellen aufgetreten sind. Im günstigsten Falle hätten wir demnach 14maligen Stromwechsel in 12 Stunden erhalten können, dabei hätte die Niveaudifferenz infolge der Gezeitenbewegungen, der meteorologischen Schwankungen und der Seiches von größerer Periodendauer den ganzen Tag soweit unter den Amplituden dieser Schwankungen bleiben müssen, daß dieser Wechsel so oft hätte auftreten können. Auch Miaulis kennt keinen so häufigen Stromwechsel, weshalb er sich gegen Forels Annahme von Seiches mit $1^1/_2$stündiger Periodendauer wendet. Die Ergebnisse der Beobachtungen an diesem einen Mondmonat können die Annahme der Alten

stützen, welche einen 7 maligen Wechsel bei Tag und 7 maligen bei Nacht beobachtet haben wollen[1]).

Diese Stelle in den Klassikern ist häufig mißverstanden worden, indem man statt der Stromwechsel eine 7 malige Ebbe und Flut an einem Tage angenommen hat und diese sich ebenso regelmäßig dachte wie die Gezeiten. Einen Anlaß dazu gibt allerdings auch die Bezeichnung des nordsüdlichen Stromes als Flutstrom, welche Bezeichnung ja für den größten Teil eines Mondmonates richtig ist. An den Tagen der Störung jedoch kann ein nordsüdlicher Strom nicht nur durch einen Wellenberg der Seiches im Norderhafen entstehen, sondern ebenso durch eine Senkung des südlichen Niveaus. Auch Forel hat ursprünglich Babins Bericht über 11- bis 14- und mehrmaligen Wechsel der Strömung mißverstanden und daraus eine Periodendauer für die Seiches abgeleitet[2]). Wie wenig angängig es ist, aus dem Stromwechsel eine bestimmte Periodendauer herauszulesen, zeigen die Intervalle zwischen den einzelnen Stromänderungen am 22. Mondtage, dem Tage mit 8 solchen Wechseln: $^1/_2{}^h$; $4^1/_2{}^h$; $1^1/_4{}^h$; $1^1/_4{}^h$; $^1/_2{}^h$; 1^h; $^3/_4{}^h$. Nach unseren Ergebnissen kommt daher die Schilderung der Euripusströmungen, wie sie sich bei Livius findet, der Wahrheit am nächsten, weshalb ich dieselbe wohl nicht übergehen darf: . . . .fretum ipsum Euripi non septiens die, sicut fama fert, temporibus statis reciprocat, sed temere in modum venti nunc huc nunc illuc verso mari velut monte praecipiti devolutus torrens rapitur". (Tit. Livius Lib. XXVIII, Cap. 6, 10.)

Die Beobachtung Babins, daß in $1^1/_2$ Stunden der Strom 3 mal wechselte, finden auch wir in unserer Tabelle, nämlich am 21. und am 22. Mondtage. Hier wird der Wechsel von den Seiches von nahe $1^1/_2$ Stunden Periodendauer veranlaßt; da aber die Niveaudifferenz sich wieder vergrößert, kommt der Wechsel nur 3 mal nacheinander vor und nicht öfter.

[1]) Pomp. Mela II, 7 und Plinius II, 100.
[2]) Forel, Le Léman II, p. 166.

Weit unregelmäßiger als die Stromrichtungsänderungen sind noch die Änderungen in der Geschwindigkeit der Strömung. Wir finden aus der Tabelle, daß die den Strom erzeugende Wasserhöhe sich in 30 Minuten um 10 Zoll und mehr ändern kann, dann mehrere Stunden konstant bleibt, um dann ebenso sprungweise sich plötzlich wieder zu ändern. 3 Tage vor und 3 Tage nach den Syzygien nur findet die Strömungsänderung in Richtung und Stärke ebenso regelmäßig wie im Ozean statt (s. Fig. 8 der Tafel) und wenn sich in der Literatur neben Bemerkungen über die sprichwörtliche Unregelmäßigkeit auch solche über die große Regelmäßigkeit der Strömungen finden[1]), so kann man das daraus erklären, daß die letztere Beobachtung zur Zeit der Syzygien gemacht wurde.

Die wellenförmigen Schwankungen der Stromstärke sind viel deutlicher aus einer graphischen Darstellung der Niveaudifferenzen zu ersehen. Hiebei zeigt sich, daß der Gang dieser Kurven nicht komplizierter als der Gang der Pegeldiagramme selbst sich erweist, wie man hätte glauben sollen, sondern häufig einfacher als dieser. Die Erscheinung rührt davon her, daß die häufig vorhandenen Seiches im Norder- und Süderhafen an Dauer einander nahekommen und durch Interferenz in der neuen Kurve sich zu einem Wellenzug vereinigen und bei gleicher Phase sich sogar ganz aufheben können. Ein Beispiel hiefür ist die Kurve vom 22. Mondtag (vgl. Fig. 7 der Tafel) welche viel ruhiger verläuft als die einzelnen Diagramme des Norder- und Süderhafens für diesen Tag, die Krümmel in seiner Ozeanographie mitgeteilt hat[2]).

Zu den früher besprochenen Niveauänderungen periodischer Art kommen noch unperiodische Schwankungen, welche durch Wind und Luftdruckschwankungen verursacht werden. Dieselben hat Miaulis ausführlich besprochen. In unserer Tabelle S. 127 sind auch diese deutlich zu erkennen, besonders wenn

[1]) Cic. N. D. 3, 10. 24.

[2]) Siehe Fig. 46, S. 181 in Krümmels Ozeanographie II, 1911.

man Tage mit entsprechendem Gezeitengang miteinander vergleicht. So findet sich am 1. und 15. Mondtag eine merklich kleinere Niveauerhebung südlich der Enge als an den darauffolgenden Tagen. Die in der letzten Kolumne unserer Tabelle eingetragenen Windbeobachtungen von Miaulis bringen dafür die Erklärung. Der starke NNW staut das Wasser im Norderhafen an und drückt es gleichzeitig im Süderhafen hinunter. Das gleiche zeigt sich am 5., 8., 24. und 25. Mondtag, wobei am 8. Mondtag ständig im Norderhafen durch die besprochene Stauwirkung eine Erhebung des nördlichen Niveaus, also in 12 Stunden kein einziger Stromwechsel auftrat. Umgekehrt sehen wir auch im Süden größere Druckhöhen als an anderen Tagen, wie am 2., 13., und 17. Mondtag, wo südliche Winde ein Anstauen im Süderhafen und ein Ebben im Norderhafen bewirkten. Gleichzeitig traten an allen Tagen mit größerer Windstärke auch Seiches von größerer Amplitude auf, wie aus den Pegeldiagrammen am deutlichsten zu ersehen ist, und ebenso die größere Anzahl von Wellen in unserer Tabelle S. 127 pro 12^h erkennen läßt, nämlich am 3., 4., 5., 10., 23., 24. und 25. Mondtage. Daß die Amplituden der Seiches gleichzeitig viel größer sind im Süderhafen als im Norderhafen, begründet sich daraus, daß die Seiches erzeugenden Wellen vom offenen Meere kommen und in dem engen und seichten Chalkidischen Euripus an Amplitude zunehmen müssen. Die Seiches nördlich und südlich der Enge werden also, soweit die vorhandenen Beobachtungen hinreichen, von den gleichen Ursachen erzeugt wie die Seiches in den Seen und Meeren, die, seit Forel und Krümmel hierüber geschrieben haben, eingehend erforscht worden sind. Am Euripus dürfte nur zufolge der lokalen Verhältnisse eine neue Ursache dazu kommen. Ebenso wie in den Seen durch periodisches Öffnen und Schließen des Zu- und Abflusses künstlich Seiches sich erzeugen lassen[1]), so müssen auch die stark in Rich-

[1]) A. Endrös, Die Vibrationen der Seen. Programm d. hum. Gymn. Freising 1911, p. 24.

tung und Geschwindigkeit wechselnden Strömungen periodische Schwankungen speziell im kleineren Süderhafen auslösen, welche besonders dann, wenn die Periodendauern der Strömung einer Eigenschwingungsdauer der Bucht nahe kommen, wie das nach dem vorausgehenden der Fall ist, merkliche Amplituden erreichen können.

Miaulis kennt auch eine Meeresströmung, welche durch den Oreoskanal nach dem Talantischen Euripus fließt und von da durch den engen Kanal bei Chalkis nach Süden sich fortsetzen soll. Eine solche Strömung war besonders bei der Enge des Sundes bei Chalkis nicht recht verständlich. Nun haben wir aus der Tabelle der Niveauunterschiede gesehen, daß der nordsüdlich gerichtete Strom im Durchschnitt mehr als nochmal so lange während des Tages vorherrscht und daß die nördliche Erhebung dazu im Mittel nochmal so groß ist; es muß daher mehr als 4 mal soviel Wasser nach Süden strömen, als wieder zurück nach Norden fließt und der Wasserverlust muß durch den Oreoskanal wieder zuströmen. Da Strömungen bis $8^1/_2$ Knoten von Norden nach Süden durch die Enge führen, so kann dadurch auch eine meßbare Strömung durch den Oreoskanal entstehen.

Schlussbetrachtung.

Die Ergebnisse der vorstehenden Untersuchungen seien, wie folgt, zusammengestellt:

1. Der von Miaulis beobachtete anomale Flutwechsel von $12^h\ 12^{min}$ ist wirklich aus den Pegeldiagrammen des Norderhafens entgegen der Annahme Krümmels als vorhanden nachzuweisen und begründet sich vollständig daraus, daß die halbtägige Mondtide einerseits und die halbtägige Sonnentide einschließlich der Deklinationstide andererseits nahezu gleiche Amplituden haben. Eine solche Gezeitenkurve bildet eine sogenannte Schwebung als Interferenzkurve, deren Wellenperiode das Mittel derjenigen der Komponenten ist, und enthält eine große halbmonatliche Ungleichheit, da zur Zeit der Quadra-

turen die Gezeiten sich vollständig aufheben. Von da ab geht der Wellenzug mit einer Phasenverschiebung von 6 Stunden weiter und verursacht so die merkwürdige Vertauschung der Flutstunden nach den Quadraturen.

2. Die Amplituden der halbtägigen Gezeitenkomponenten lassen sich aus Miaulis Tabellen schätzen und zwar $M_2 =$ 230 mm, $S_2 = 170$ mm, $K_2 = 70$ mm für den Norderhafen, während diejenigen des Süderhafens sehr nahe denjenigen von G. Wegemann für Isthmia durch harmonischen Analyse gefundenen gleichkommen dürften und zwar $M_2 = 17$ mm, $S_2 =$ 14 mm, $N_2 = 2{,}8$ mm, $K_2 = 3{,}9$ mm. Die Eintagstiden dagegen haben nördlich und südlich ungefähr gleiche Hubhöhen von 75 bis 100 mm. Im Norderhafen haben wir also ausgesprochenen Halbtagstypus, im Süderhafen aber überwiegenden Eintagstypus; ferner erreichen die Gezeiten nördlich eine Hubhöhe von 1 m im Maximum, die südlichen dagegen nur etwa 0,15 m.

3. In den Pegeldiagrammen nördlich und südlich der Enge finden sich der Theorie Forels entsprechend ständig Seiches, wie sie Krümmel schon gefunden hat. Da aber die Ablesungen in Intervallen von 30 Minuten vorgenommen sind, bleiben nicht nur Seiches kürzerer Dauer verborgen, sondern können periodische Schwankungen entstanden sein, die in Wirklichkeit gar nicht vorhanden waren. Auch die Berechnung der Periodendauern liefert bei der komplizierten konvexen Gestalt der in Betracht kommenden Becken nur rohe Annäherungen. Wahrscheinlich sind gemäß Berechnung und Vermessung der Diagramme im Norderhafen: a) Eine Seiche von 480 Minuten, die Buchtenschwingung des ganzen Talantischen Euripus mit einem Knoten im Oreoskanal. b) Eine Seiche von rund 200 Minuten, die uninodale Seiche des Talantischen Euripus samt Malischen Golfes mit dem Knoten bei den Lichaden. c) Eine Seiche von 95 Minuten, die uninodale Schwingung des Talantischen Euripus.

Im Süderhafen treten sehr wahrscheinlich folgende Seiches auf: a) Die Querseiche des kreisrunden Beckens von 10 Minuten Dauer. b) Die Buchtenschwingung dieses Hafens mit dem

Knoten an der südlichen Mündung und einer Dauer von rund 36 Minuten. c) Die Schwingung des ganzen Chalkidischen Euripus mit dem Knoten bei Burtzi und einer Dauer von 90 Minuten; sie ist zugleich die häufigste Schwingung. d) Die Seiche des ganzen Eretrischen samt Chalkidischen Euripus von 120 Minuten Periodendauer und dem Knoten bei der Insel Kavalianis. e) Schwingungen größerer Dauer, welche ihren Knoten außerhalb des Golfes von Petali haben müssen.

Eine Schwingung mit einem Knoten bei Chalkis ist bei dem kleinen Querschnitt der Straße unmöglich.

4. Die tabellarische Zusammenstellung der Niveauunterschiede nördlich und südlich der Straße bei Chalkis gewährt einen tieferen Einblick in das komplizierte Strömungsproblem des Euripus. Zur Zeit der Syzygien sind die Strömungen durch die überwiegenden Gezeiten des Norderhafens bedingt und kentern der Theorie entsprechend nach etwa 6 Stunden. Doch ist die südliche Niveauerhebung nur halb so groß wie die nördliche und auch die Dauer des südnördlichen Stromes eher unter 6 Stunden. Dieselbe nimmt dann bis zu den Quadraturen immer mehr ab und dann wieder zu, so daß im Durchschnitt nur ein Drittel des Tages südnördliche Stromrichtung und dazu von merklich geringerer Geschwindigkeit anzutreffen ist. Ursache hiefür ist der Gang der Gezeiten im Süderhafen, welcher die Niveaudifferenz in dieser Weise beeinflußt.

5. Die bekannte Gezeitenstörung ist nur zum Teil durch Seiches verursacht, nicht ausschließlich, wie Forel annahm. Während an den Tagen der tauben Flut die kurzdauernden Schwingungen nördlich und südlich der Enge die Stromwechsel noch verursachen können, ist die Unregelmäßigkeit in den 3 Tagen nach den Quadraturen hauptsächlich durch die Vertauschung der Flutstunden bedingt, welche zur Folge hat, daß Vormittag südnördlicher Strom und Nachmittag nordsüdlicher sich einstellt, während vor den Quadraturen das Umgekehrte der Fall ist. Infolge der kleinen Niveaudifferenzen zeigt sich diese Vertauschung aber erst am 11. und 25. Mondtage deutlich, wodurch sich erklärt, warum Miaulis die Vertauschung

auf diese Tage verlegt. Die Seiches bringen nicht nur nach den Quadraturen sondern auch vorher einzelne kurzdauernde Stromwechsel hervor, aber nur zur Zeit des schwachen süd-nördlichen Stromes oder des Stromkenterns.

6. Die Stromwechsel erweisen sich nicht so häufig, wie Babin berichtet, einmal nur zählt man 8 solche in 12 Stunden, sonst nie mehr als 4. Sie treten aber in so unregelmäßigen Zwischenzeiten auf, daß daraus keine Periodendauer der Seiches abgeleitet werden kann. In den Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit jedoch sind immer periodische Schwankungen zu finden, die von Seiches herrühren und deren größte Anzahl innerhalb 12 Stunden 7 ist, und nur wenn zufällig einmal 12 Stunden lang keine anderen Niveaudifferenzen bestünden, hätte man 14 maligen Stromwechsel. Einen bedeutenden Einfluß auf die Strömungen übt aber noch die Stauwirkung der Winde aus, welche südlich und nördlich gewöhnlich in gleichem Sinne wirken und das Kentern der Strömung verschieben und die Richtung des Stromes auch umkehren können.

Die Seiches werden, wie auch anderswo, hauptsächlich von meteorologischen Ursachen erzeugt, wozu hier noch die an Stärke und Richtung wechselnde Strömung kommt. Die Seiches im Süderhafen haben im Mittel doppelt so große Amplituden wie die nördlichen, da die sie erregenden Wogen vom offenen Meere kommen können und in die enge und seichte Bucht einlaufen.

Die Meeresströmung durch den Oreoskanal über Chalkis nach Süden wird zum Teile wenigstens durch die Euripusströmungen selbst verursacht, die in der Beobachtungszeit mehr als 4 mal so viel Wasser nach Süden führten als wieder zurück nach Norden.

Überblicken wir noch einmal die Ergebnisse, so finden wir vor allem ein ganz merkwürdiges Zusammentreffen von großen Anomalien der Gezeiten, wie die großen Hubhöhen im binnenseeartigen Talantischen Euripus und die ungewöhnlich kleinen südlich, den ausgesprochenen Halbtagstypus im Norderhafen

und den vorwiegenden Eintagstypus im Süderhafen, die ungewöhnlich große Sonnentide und Deklinationstide nördlich und im Zusammenhang damit der anormale Flutwechsel von 12^h 12^{min} und die Vertauschung der Flutstunden nach den Quadraturen, wie auch die große halbmonatliche und halbjährliche Ungleichheit. Dazu kommen die stets wechselnden Stauwirkungen der Winde und die häufigen Seiches mit großen Amplituden. Beide Meeresteile stehen nun durch einen so engen Kanal in Verbindung, daß durch denselben sich die Wellenbewegungen nicht fortsetzen, aber die kleinsten Niveauunterschiede in Strom umsetzen können und so die Wassermassen bald wie in einem reißenden Strome nach Süden und wieder zurück nach Norden sich drängen, bald wieder stillstehen können. Diese Stromvorgänge mußten seit alters einem jeden Beobachter auffallen, der auf der Brücke stand, die über den Sund führt, ebenso wie den Schiffern, die im Hafen auf das Kentern des Stromes warten mußten, um die Enge durchfahren zu können und den Leuten, die die von der wechselnden Strömung betriebenen Mühlen bedienten. Man versteht daraus die große Berühmtheit des Euripusproblems, mit welchem sich jeder Ozeanograph seit dem Altertum beschäftigte, und begreift zugleich die Unmöglichkeit, die durch das Zusammenwirken von so vielen Umständen verursachte Regellosigkeit der Euripusströmungen vor der modernen Entwicklung der Gezeiten- und Seicheskunde zu ergründen, wie auch das Entstehen der bekannten Fabel, daß einem Aristoteles darob der Sinn so verwirrt wurde, daß er in der Verzweiflung in den Fluten des Euripus den Tod gesucht hat.

Es ist das Verdienst des Kapitän A. Miaulis, durch seine eingehenden Beobachtungen uns einen tieferen Einblick in das Problem verschafft zu haben; dabei bleibt es der Zukunft vorbehalten, an der Hand von Beobachtungen mit Registrierapparaten nördlich und südlich der Straße von Chalkis die in Betracht kommenden Faktoren, die sich zum Teil nur schätzen ließen, durch exakte Analyse zu bestimmen.

Fig. 1. Künstliche Gezeitenkurve $M_2 - S_2$ 20 mm; 1^h 1 mm

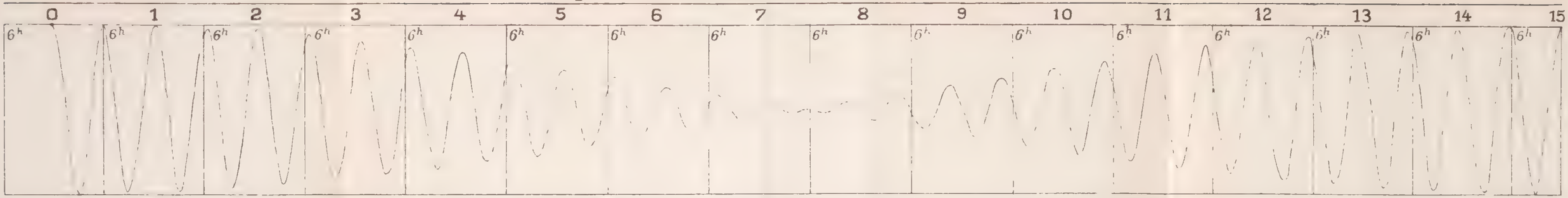


Fig. 2 Pegeldiagramme des Norderhafens von Chalkis vom 27. März bis 11. April 1872.

1^h 1 mm und 1 Zoll = 1 mm

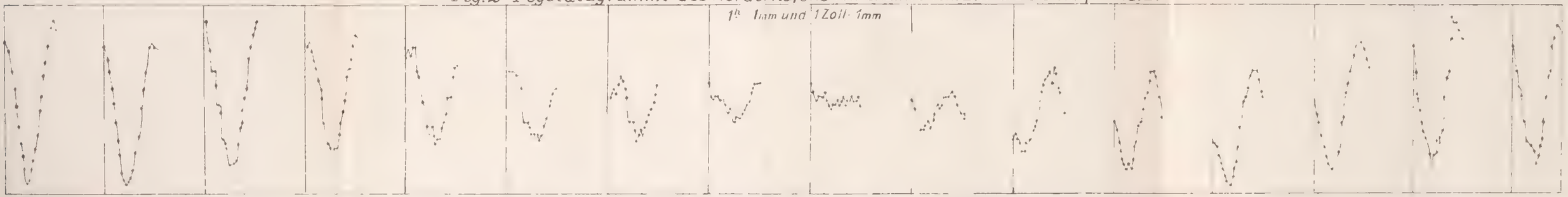
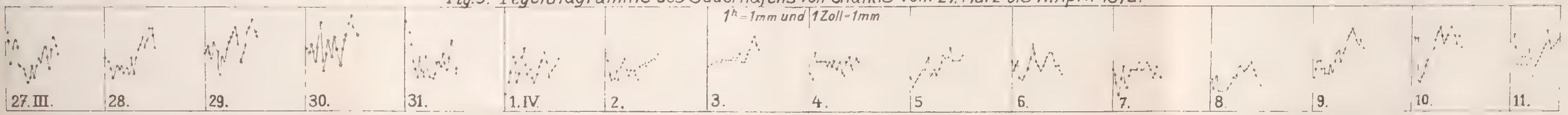


Fig. 3. Pegeldiagramme des Süderhafens von Chalkis vom 27. März bis 11. April 1872.

1^h = 1 mm und 1 Zoll = 1 mm



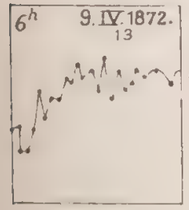


Fig. 4.
Restkurve des Norderhafens mit eintägiger Tide.

Maßstab 1^h = 2 mm.
1 Zoll = 2 mm

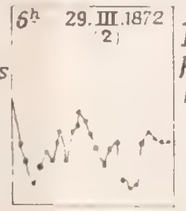


Fig. 5.
Restkurve des Norderhafens mit 8 Stunden-Seiche

Maßstab 1^h = 2 mm
1 Zoll = 2 mm

Fig. 6.
Restkurve des Norderhafens mit 200 Min.-Seiche.

Maßstab 1^h = 2 mm
1 Zoll = 2 mm

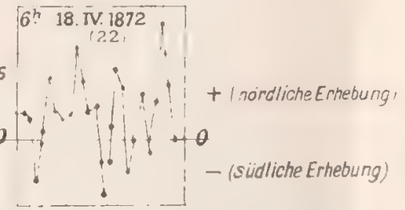


Fig. 7. Diagramm der Niveaudifferenzen nördlich und südlich Chalkis.

Maßstab 1^h = 2 mm
1 Zoll = 2 mm

Fig. 8.
Diagramm der Niveaudifferenzen nördlich und südlich Chalkis.

Maßstab 1^h = 2 mm
1 Zoll = 2 mm

+ (nördliche Erhebung)

— (südliche Erhebung)

Über die Erscheinung bei der Beobachtung der Speichen eines hinter parallelen Stäben bewegten Rades, genannt das Staketphänomen.

Von **Ludwig Burmester.**

Mit 2 Tafeln.

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Juni 1914.

1. Wenn ein Wagen hinter einem Staket schnell vorüberfährt, erscheint für den Beobachter an dem Rade ein strauchartiges Gebilde von krummen Streifen, das gleichsam aus der Nabe des Rades herauswächst und sich in unveränderter Stellung mit dem Wagen fortbewegt. Über diese Erscheinung, die Staketphänomen genannt wird, wurde im Jahre 1820 von einem Unbenannten kurz berichtet und die in Abb. 1 gegebene Skizze dieses Gebildes mitgeteilt[1]). Hierauf hinweisend hat Roget[2]) im Jahre 1824 diese Erscheinung behandelt und die in Abb. 2 gegebene Skizze gezeichnet. Er hat die Kurven, die den krummen Streifen entsprechen, konstruiert und die Gleichung dieser Kurven angegeben. Die Entstehung der krummen Streifen hat er durch die Nachdauer der auf das Auge wirkenden Lichteindrücke insofern unrichtig erklärt, daß er fälschlich annimmt: diese Lichteindrücke kämen

[1]) Quarterly Journal of Science, London 1821, Vol. X, p. 282 in einem Brief von 1. Dezember 1820 an den Verleger.

[2]) Philosophical Transaction, London 1825, p. 141, vorgelesen am 9. Dezember 1824. Auch gleichlautend in Annals of Philosophy, London 1825, p. 107. Deutsch in Poggendorffs Annalen 1825, Bd. 5, S. 93.

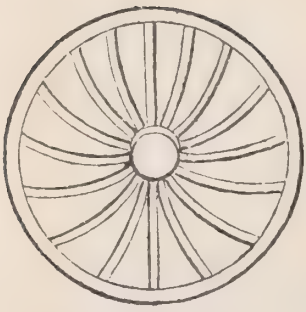


Abb. 1.

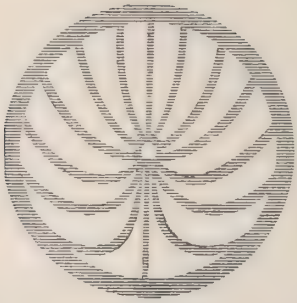


Abb. 2.

von den Teilen der Speichen des Rades, die sich zwischen den Stäben des Stakets befinden. Denn diese krummen Streifen sind in Bezug auf den Wagen die Bahnen, in denen sich die von den Stäben und den Speichen gebildeten Kreuzungsstellen als Deckflächen bewegen; und diese schnell bewegten Deckflächen erzeugen infolge der Nachdauer ihrer Lichteindrücke die als krumme Streifen wahrnehmbaren Bahnen. Ferner ist es ein verwirrender Irrtum, daß Roget diese Bahnen der Deckflächen für Truggebilde der Speichen hält. Sonach befindet sich in seiner Abhandlung manches Unrichtige, das traditionell geworden ist, weil es bisher keine Berichtigung erfahren hat. Deshalb ist es der Zweck der folgenden Darlegungen: das Verständnis des Staketphänomens durch theoretische Untersuchung und experimentelle Beobachtung zu fördern.

2. Behufs der theoretischen Betrachtung werden die Stäbe sowie die Speichen durch gerade Linien ersetzt und somit jene Deckflächen durch Deckpunkte vertreten, die sich zeichnerisch als Schnittpunkte dieser Linien ergeben. Die Bahnen dieser Schnittpunkte sind dann die Kurven, die den Streifen des strauchartigen Gebildes entsprechen. Die Entstehung dieser Kurven wird vermittels eines gedachten, in Fig. 1, Taf. I schematisch gezeichneten fünfgliedrigen Mechanismus kinematisch veranschaulicht, dessen Bewegung infolge der konstruktiven Anordnung der Glieder zwar begrenzt ist, aber theoretisch beliebig weiter fortgesetzt werden kann.

Das Staket wird als Glied durch die Schiene S vertreten, die zunächst nur einen auf ihr senkrechten Stab s und außerdem eine Hülse h trägt. Das Wagengestell wird als Glied durch die Stange W ersetzt, die in der Hülse h parallel zu S verschiebbar ist und eine Achse A trägt. Um diese Achse dreht sich als Glied das hinter dem Staket befindliche Rad R des Wagens, das vorerst nur zwei in einer Speichengeraden g liegende Speichen σ, σ' enthält und mit seinem Felgenreif als Rollkreis $\varkappa$ auf der Schiene S rollt. Damit bei dem Rollen kein Rutschen eintritt, können wir uns das Rad sowie die Schiene mit ineinandergreifenden Zähnen versehen denken. Um den Deckpunkt D des Stabes s und der Speiche σ kinematisch zu verwirklichen, sind auf dem Stab und auf der Speiche die Hülsen h_s, h_σ als Glieder angebracht, die zwischen sich in D durch eine Achse drehbar verbunden sind. Die Hülse h_σ trägt hinten einen konachsialen Schreibstift, der die Bahn des Deckpunktes D auf einem an dem Gliede W befestigten Kartonblatt beschreibt. Diese Bahn vertritt den Streifen, den die Deckfläche als Bahn erzeugt.

Bei diesem fünfgliedrigen Mechanismus betrachten wir zunächst das Glied S, also das Staket, als festgestellt. Wird nun das Glied W, das Wagengestell, in der Richtung des Pfeiles f_w bewegt, dann dreht sich das rollende Rad R im Sinne des Pfeiles f_r. Bei dieser Bewegung gleitet der Deckpunkt D längs des ruhenden Stabes s und längs der bewegten Speiche σ, und der Schreibstift zeichnet auf dem mit dem Wagen bewegten Kartonblatt die Kurve δ_a als Bahn dieses Deckpunktes.

Wenn wir dagegen annehmen: das Glied W, also das Wagengestell mit dem Kartonblatt, sei festgestellt und es werde in der Richtung des Pfeiles f_s das Glied S mit der Hülse h, also das Staket, verschoben; dann bewegt sich auch der Stab s in dieser zu ihm senkrechten Richtung und das Rad mit der Speiche σ dreht sich um die feste Achse A wie vorhin im Sinne des Pfeiles f_r. Demnach zeichnet der Schreibstift die Kurve δ_a auf dem nun ruhenden Kartonblatt. Der Fußpunkt des Stabes s auf der Schiene S ist mit F und die Endpunkte

der Speichen σ, σ' auf dem Rollkreis $\varkappa$ sind mit Φ, Φ' bezeichnet. Wir nehmen an, daß im Beginn des Verschiebens der Schiene S der Fußpunkt F in dem mit F_0 und auch mit Φ_0 bezeichneten Berührpunkt der Schiene und des Rollkreises liegt, also der Stab in seiner Anfangslage $F_0 s_0$ durch den Achsenpunkt A geht, und daß ferner die Speichen σ, σ' sich in den Anfanglagen $\Phi_\alpha \sigma_\alpha$, $\Phi'_\alpha \sigma'_\alpha$ auf der Speichengeraden g_α befinden, die mit $A F_0$ den Winkel α bildet. Wird nun durch das Verschieben der Schiene S der Stab von $F_0 s_0$ in eine Lage $F s$ gebracht, dann dreht sich mit dem Rade die Speichengerade von g_α in die entsprechende Lage g, die infolge der Rollung durch den Bogen $\Phi_\alpha \Phi$ gleich der Strecke $F_0 F$ bestimmt ist. Demnach erzeugt der Deckpunkt D die Kurve δ_α. Diese erstreckt sich einerseits ins Unendliche, wenn die Speiche σ in die auf S senkrechte Lage $A \Phi_\mu$ und der Stab s in die entsprechende Lage $F_i s_i$ gelangt; die durch die Strecke $F_0 F_i$ gleich dem Bogen $\Phi_\alpha \varkappa \Phi_\mu$ bestimmt wird. Bei entgegengesetzter Verschiebung der Schiene S und Bewegung des Deckpunktes D längs der Speiche σ' erstreckt sich anderseits die Kurve δ_α ins Unendliche, wenn die Speiche σ' in die auf S senkrechte Lage $A \Phi_\mu$ und der Stab in die entsprechende Lage $F'_i s'_i$ gelangt, bei welcher die Strecke $F_0 F'_i$ gleich dem Bogen $\Phi'_\alpha \Phi_\mu$ ist. Die beiden parallelen Geraden $F_i s_i$, $F'_i s'_i$, deren Abstand gleich dem halben Umfang des Rollkreises $\varkappa$ ist, sind Asymptoten der Kurven δ_α, deren in der Figur auf Taf. II gezeichneten Nebenzweige $\delta_{\alpha 1}$, $\delta'_{\alpha 1}$ an diese Asymptoten anschließend aus dem Unendlichen kommen. Bei weiterer Rollung entstehen periodisch immer neue Nebenzweige. Infolge der Bewegung des Deckpunktes D längs der Speichengeraden g berührt ihre Anfangslage g_α die Kurve δ_α in dem Achsenpunkt A.

Nach einer halben Umdrehung des Rollkreises gelangt die Speichengerade g wieder in die Lage g_α, und wenn von dem Stabe F im Abstande gleich dem halben Umfang des Rollkreises sich ein nachfolgender Stab $F_p s_p$ befindet, so wird durch den Deckpunkt, den dieser Stab mit der Speichengeraden g

bildet, dieselbe Bahn δ_a während einer halben Umdrehung des Rades erzeugt; und der gleiche Vorgang erfolgt, wenn mehrere Stäbe in diesen gleichen Abständen voneinander stehen. Bewegt sich der Deckpunkt D so schnell, daß er das innerhalb des Rollkreises befindliche Bahnstück in einer kleineren Zeit erzeugt als die Zeit der Nachdauer der Lichteindrücke im Auge; dann entspricht diesem Bahnstück die als matt schimmernden krummen Streifen wahrnehmbare Bahn der Deckfläche.

Wenn nun das Rad eine gerade Anzahl Speichen enthält, die gleichen Teilbogen auf dem Rollkreis entsprechen, und die Stäbe in gleichen Abständen voneinander stehen, die den Längen dieser Teilbogen gleich sind; dann wird durch die Deckpunkte jeder nach der Speiche σ folgenden Speiche und jedes nach dem Stab s folgenden, entsprechenden Stabes dieselbe Bahn δ_a erzeugt.

Von den bei dieser speziellen Anordnung sehr schnell nacheinanderfolgenden, in gleicher Bahn bewegten Deckflächen, die den Deckpunkten entsprechen, empfängt das Auge Lichteindrücke, die durch ihre physiologische Nachwirkung verschmelzen und die als krumme Streifen wahrnehmbare Bahn erzeugen, die wegen der dichteren Folge der Deckflächen besonders deutlich erscheint. Infolge dieser Darlegungen ist das Staketphänomen physiologisch erklärt, und der seit 90 Jahren traditionelle Irrtum berichtigt, daß die Bahnen der Deckflächen Truggebilde der Speichen seien[1]).

[1]) Ebenso ist es auch ein Irrtum, wenn bei dem Plateauschen Anorthoskop, z. B. eine auf der transparenten Scheibe befindliche, nicht radiale Gerade durch einen der feinen Spalten der opaken Scheibe betrachtet wird, daß die Gerade gekrümmt als Truggebilde erscheine; denn auch hier wird durch das Anorthoskop bei entgegengesetzter Drehung der Scheiben die hyperbelartig gekrümmte Bahn richtig gesehen, die durch die Kreuzung des feinen Spaltes und der Geraden entsteht. Dagegen erscheinen Figuren, die auf der transparenten Scheibe gemalt sind, anorthoskopisch beobachtet schmäler oder breiter, je nachdem die Scheiben sich in ungleichem oder gleichem Sinn drehen.

Das in dieser Weise entstehende Staketphänomen hat P. Linke[1]) und nach ihm auch H. Lehmann[2]) als ein beweisendes Beispiel der Identitätstäuschung betrachtet, bei der jede Bahn durch eine neu entstehende Bahn ersetzt werde; hiergegen kann aber eingewendet werden, daß fortdauernd neue Deckflächen die Bahn erzeugen.

3. Bezeichnet r den Radius des Rollkreises $\varkappa$ und p die Länge seines halben Umfanges, so ist $p = r\pi$. Diese Länge p wird konstruktiv bestimmt, indem wir die Gerade AG ziehen, die mit dem auf der Tangente S senkrechten Durchmesser $\Phi_0\Phi_n$ den Winkel von 30° bildet und S in dem Punkt G trifft, ferner auf S die Strecke $GH = 3r$ machen; dann ist die Strecke $H\Phi_n = p$.

Behufs der Konstruktion der Kurve δ_a machen wir auf S die Strecke $F_0F_n = H\Phi_n$, teilen diese Strecke und den halben Rollkreis $\Phi_a\varkappa\Phi'_a$ in eine Anzahl n gleiche Teile; dann bestimmen, indem wir die Schiene S aus ihrer Anfangslage in der einen und der anderen Richtung um diese gleichen Strecken verschieben, die Schnittpunkte der in den Teilpunkten auf S senkrechten Lagen des Stabes und der durch die entsprechenden Teilpunkte des Rollkreises gehenden Geraden der Lagen der Speichen die Kurve δ_a. Wenn es für die Konstruktion dieser Kurve erforderlich ist, so können noch mehrere Schnittpunkte vermittels der in den Halbierpunkten der Teilstrecken auf S senkrechten Geraden und der durch die entsprechenden Halbierpunkte der Teilbogen gehenden Geraden konstruiert werden. Bei dieser Konstruktion wurde beispielsweise die Zahl $n = 6$ und der Winkel $\alpha = 30^0$ angenommen. Die Kurve δ_a ist hiernach durch den Radius r des Rollkreises oder dessen Umfang $2p$ und den Winkel α, den die Anfangslage σ_a der Speiche σ mit $A\Phi_0$ bildet, bestimmt.

Betrachten wir allgemein unabhängig von dem Rade nur die Speichengerade g, bezeichnen wir ihre Drehgeschwindigkeit

[1]) Physiologische Studien. Leipzig 1897, Bd. III, S. 393.
[2]) Die Kinematographie. Leipzig 1911.

mit ω und die Geschwindigkeit der Schiene S mit v, dann ist für den kinematischen Rollkreis der Radius $r = \frac{v}{\omega}$ und der halbe Umfang $p = \frac{v}{\omega}\pi$. Vermittels dieser Geschwindigkeiten kann dann an der Kurve δ_α die Normale DN im Punkt D konstruiert werden. Nehmen wir an, es sei $\omega = 1$, so ist $v = r$, ferner DA gleich der lotrechten Geschwindigkeit von D als Punkt der Speiche σ und die auf den Stab s abgetragene Strecke $DV = r$ die lotrechte Geschwindigkeit von D als Punkt dieses Stabes. Demnach ergibt sich durch den Schnittpunkt N der in A auf σ und der in V auf s Senkrechten die Normale DN der Kurve δ_α[1]).

Ziehen wir zu der Normalen ND die Parallele AQ, welche die Gerade S in dem Punkt Q trifft, dann ist $AQ = ND$ wegen der rechtwinkeligen kongruenten Dreiecke AF_0Q, DVN; folglich ist auch das Dreieck ADQ dem bei A rechtwinkeligen Dreieck DAN kongruent, und die Gerade DQ ist senkrecht auf der Speichengeraden g. Demnach ergibt sich auch, indem wir auf g die Senkrechte DQ bis an S ziehen, die Normale ND als Parallele zu AQ, und es ist AQ ein Durchmesser des durch die Punkte A, F_0, D gehenden Kreises q.

Die durch ihre Erzeugung definierte Kurve δ_α hat die Eigenschaft, daß die Länge eines zwischen zwei radialen Geraden befindlichen Bogens des Rollkreises gleich ist der auf S senkrechten Projektion des von diesen Geraden begrenzten Kurvenstückes, und umgekehrt; demzufolge wird dieser Bogen vermittels dieser Kurve durch die entsprechende Projektionsstrecke gemessen. Deshalb nennen wir die Kurve δ_α eine Metroide und den Winkel α ihren Phasenwinkel.

4. Um die Gleichung der Metroide δ_α, deren Phasenwinkel α dem Bogen $\Phi_0\Phi_\alpha = \alpha$ entspricht, in rechtwinkeligen Koordinaten abzuleiten, betrachten wir die zu S Parallele AX als die positive x-Achse und die auf S Senkrechte AY als die

[1]) Siehe L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 52. Leipzig 1888.

positive y-Achse. Der Winkel $\Phi_a A \Phi$, welchen die durch einen beliebigen Punkt D der Metroide gehende Speichengerade g mit ihrer Anfangslage g_a bildet, ist mit φ bezeichnet. Die Koordinaten des Punktes D sind $x = AP$, $y = PD$, und x ist gleich dem Bogen $\Phi_a \Phi$.

Hiernach ist

$$-y = x \cot(a + \varphi), \tag{1}$$

ferner

$$\frac{a}{\pi} = \frac{a}{p}, \qquad \frac{\varphi}{\pi} = \frac{x}{p},$$

und folglich

$$y = -x \cot\left[(a + x)\frac{\pi}{p}\right], \tag{2}$$

die Gleichung der Metroide.

Denken wir uns die Koordinaten mit einem Faktor multipliziert, dann folgt aus dieser Gleichung der Satz:

Die Metroiden mit gleichem Phasenwinkel sind ähnlich.

Wenn $180 - \alpha$ anstatt des Phasenwinkels α in die Gleichung (1) gesetzt wird, ergibt sich die Gleichung

$$y = x \cot(a - \varphi)$$

und ferner die Gleichung

$$y = x \cot\left[(a - x)\frac{\pi}{p}\right], \tag{3}$$

die eine bezüglich der y-Achse zu δ_a symmetrische Metroide darstellt. Die Gesamtheit der Metroiden eines Staketphänomens nennen wir einen Metroidenstrauch, und die Gesamtheit der Phasenwinkeln sein Phasenwinkelsystem, sonach folgt der Satz:

Der Metroidenstrauch wird von der durch den Achsenpunkt gehenden zu den Stäben parallelen Gerade symmetrisch geteilt, und die Metroidensträuche mit gleichem Phasenwinkelsystem sind ähnlich.

Die Gleichung (3) ergibt sich hiernach auch, wenn der Phasenwinkel α negativ angenommen wird.

Aus der Gleichung (2) ergeben sich die Gleichungen zweier ausgezeichneter spezieller Metroiden, für welche die y-Achse eine Symmetralgerade ist.

Erstens, wenn der Phasenwinkel $\alpha = 0$, mithin $a = 0$ ist, folgt die Gleichung

$$y = -x \cot \frac{x\pi}{p} \tag{4}$$

der Quadratrix des Dinostratus als eine spezielle Metroide.

Zweitens, wenn der Phasenwinkel $\alpha = 90$, mithin $a = \frac{1}{2}p$ ist, folgt die Gleichung

$$y = x \tan \frac{x\pi}{p} \tag{5}$$

der speziellen Metroide, welche die x-Achse in dem Achsenpunkt A berührt.

5. In der Figur auf Taf. II sind für ein Rad mit 12 Speichen zwei mustergültige Metroidensträuche gezeichnet; der erste ist ausgezogen, der zweite strichpunktiert, wobei also $\alpha = 30^0$ der Speichenwinkel ist. Für den ersten Metroidenstrauch ist das Phasenwinkelsystem 0, α, 2α, 3α, 4α, 5α angenommen. Behufs seiner Konstruktion teilen wir auf der Geraden S die Strecke $F_6'F_6$, deren Länge gleich dem Umfang des Rollkreises $\varkappa$ und deren Mitte der Punkt F_0 ist, in 12 gleiche Teile, so daß in den Teilpunkten und den Punkten F_6', F_6 13 Stäbe stehen, die auf der Strecke $F_6'F_6$ das Staket bilden; und hierzu sind in der Zeichnung beiderseits noch die beiden begrenzenden Stäbe gefügt. Damit bei der Zählung die Anzahl der Stäbe auf der Strecke $F_6'F_6$ mit der Anzahl der Speichen übereinstimmt, betrachten wir die beiden Stäbe in den Punkten F_6', F_6 als einen Stab; denn wenn wir uns die Strecke F_6', F_6 kreisförmig geschlossen denken, dann fallen diese beiden Stäbe in einen Stab zusammen. Durch die Schnittpunkte der Speichen mit den entsprechenden Stäben werden die ausgezogenen Metroiden des ersten Metroidenstrauches bestimmt. Wegen der

größeren Genauigkeit der Konstruktion dieser Metroiden sind noch die Zwischenpunkte verwendet, die sich als Schnittpunkte der gestrichelten parallelen Mittelgeraden zwischen den Stäben und der entsprechenden gestrichelten radialen Mittelgeraden zwischen den Speichen ergeben.

In diesem Metroidenstrauch entspricht dem Phasenwinkel 0^0 die Quadratrix δ_0, zu der die Symmetralgerade $\Phi_0\Phi_6$ als doppelzählige Gerade gehört, weil in ihr zwei Speichen und der in F_0 stehende Stab zusammenfallen. Demnach wachsen aus dem Achsenpunkt 12 Metroidenteile heraus, von denen die beiderseits zu $\Phi_0\Phi_6$ liegenden Metroidenteile die entsprechenden Speichen in dem Achsenpunkt berühren. Dem Phasenwinkel $\alpha = 30^0$ entspricht die Metroide δ_α mit den Nebenzweigen $\delta_{\alpha 1}$, $\delta'_{\alpha 1}$, die sich an die Geraden der in den Punkten F_1, F'_1 stehenden Stäbe asymptotisch anschließen; und zu dem Phasenwinkel $-\alpha$ oder 5α gehört die zu δ_α symmetrische Metroide $\delta_{-\alpha}$ mit den Nebenzweigen $\delta_{-\alpha 1}$, $\delta'_{-\alpha 1}$. Ferner entspricht dem Phasenwinkel $3\alpha = 90^0$ die Metroide δ_{90} mit den Nebenzweigen $\delta_{90,1}$, $\delta'_{90,1}$; und diese Metroide berührt die zur Geraden S parallele Gerade W in dem Achsenpunkte.

Für den zweiten Metroidenstrauch ist das Phasenwinkelsystem $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{3}{2}\alpha$, $\frac{5}{2}\alpha$, $\frac{7}{2}\alpha$, $\frac{9}{2}\alpha$, $\frac{11}{2}\alpha$. Demnach sind die gestrichelten Geraden, welche die Speichenwinkel halbieren, die Speichen. Durch die Schnittpunkte dieser Speichen mit den entsprechenden Stäben werden die strichpunktierten Metroiden bestimmt, bei denen die Schnittpunkte der ausgezogenen Speichen mit den gestrichelten Mittelgeraden zwischen den Stäben die Zwischenpunkte für die genauere Konstruktion sind. Zu diesem strichpunktierten Metroidenstrauch gehört die Quadratrix δ_0 und die Symmetralgerade $\Phi_0\Phi_6$ nicht als Metroide. In diesem gestrichelten Metroidenstrauch wachsen beiderseits von $\Phi_0\Phi_6$ je 6 Metroidenteile aus dem Achsenpunkt heraus.

Wenn wir bei den 12 ausgezogenen Speichen des Rades die gestrichelten parallelen Mittelgeraden auch als Stäbe des Stakets betrachten, so daß 24 Stäbe auf der Strecke F'_6F_6 stehen, oder wenn wir bei den 12 ausgezogenen Stäben auch

die gestrichelten radialen Mittelgeraden als Speichen des Rades betrachten, so daß es 24 Speichen enthält, dann erscheint in diesen beiden Fällen ein Metroidenstrauch, der aus jenen beiden Metroidensträuchern zusammengesetzt gebildet wird. Ferner erscheint dieser zusammengesetzte Metroidenstrauch bei 24 Speichen und 24 Stäben, bei dem die Metroiden durch die doppelte Anzahl und somit dichter aufeinanderfolgenden Deckpunkte erzeugt werden.

Aus der in Art. 3 abgeleiteten und in Fig. 1 ausgeführten Konstruktion der Normale DN an der Metroide δ_a folgt, daß die Normalen der auf der Taf. II gezeichneten Metroiden in ihren Schnittpunkten mit der Geraden W durch den Endpunkt Φ_6 des auf der Geraden S senkrechten Durchmessers des Rollkreises gehen, daß ferner die Normalen der Nebenzweige in ihren Schnittpunkten mit der Geraden S durch den Achsenpunkt gehen; folglich sind diese Schnittpunkte die Wendepunkte der geschweiften Nebenzweige. Weil dort bewiesen ist, daß der Durchmesser AQ des durch die Punkte A, F_0, D gehenden Kreises q zu der Normalen ND parallel ist, so ergibt sich, daß jeder Kreis, der durch den Achsenpunkt und den Punkt F_0 geht, die Metroiden in Punkten schneidet, in denen die Normalen an den Metroiden parallel sind. Von diesen Kreisen schneidet insbesondere der auf Taf. II punktiert eingezeichnete Kreis, dessen Mittelpunkt in der Symmetralgeraden liegt, die Metroiden in ihren Maximalpunkten, an denen die Tangenten parallel zur Geraden S sind. Es ist nicht der Zweck dieser Darlegungen, noch auf weitere Eigenschaften und auf die Beziehungen der Krümmungsradien der Metroiden des Metroidenstrauches einzugehen.

Nehmen wir noch allgemeiner an, daß die auf der Strecke $F_6'F_6$ in den Teilpunkten stehenden Stäbe gegen die Geraden S geneigt sind, wie es bei vertikalen Stäben eines Stakets an einer steilen Fahrstraße vorkommt, dann verkleinern sich die Abstände dieser Stäbe und es entstehen unter den gleichen Phasenwinkelsystemen wie vorhin Metroidensträucher, die in demselben Verhältnis wie die Abstände verkleinert, ähnlich

sind zu den betreffenden vorigen Metroidensträuchern, und wobei die Symmetrallinie parallel zu den geneigten Stäben ist.

6. Bei den experimentellen Beobachtungen des Staketphänomens wurde die Fig. 2, Taf. I abgebildete Vorrichtung verwendet. Auf einer mit einem Einschnitt versehenen, hölzernen Leiste von 1.5 m Länge ist in diesem Einschnitt ein aus schwarzem Karton geschnittenes Staket mit 24 Stäben auf der Strecke gleich dem Umfang des Rollkreises befestigt, und zu Auswechselung dient ein zweites derartiges Staket mit 12 Stäben auf dieser Strecke. Die Länge der Stäbe ist 220 mm, die Breite 6 mm. Das Rad wird durch eine mit schwarzem Karton belegte, hölzerne Scheibe von 190 mm Durchmesser ersetzt, auf der ein aus weißem Karton geschnittenes, bei allen Beobachtungen verwendetes Rad mit 12 Speichen von 6 mm Breite konachsial festgeschraubt ist. An dem Rade befindet sich hinten ein konachsialer Ansatz von 90 mm Durchmesser mit einer Rille zum Einlegen einer Schnur, die zur Erzeugung des Freilaufens des Rades verwendet wird. In einer Nute der Leiste ist ein hölzernes Gleitstück verschiebbar, das eine Säule trägt. Diese Säule ist mit einem kurzen Längsschlitz versehen, in dem als Lager für die Achse des Rades eine Hülse verstellbar ist und an der Säule festgeschraubt werden kann, so daß die Scheibe beim Verschieben des Gleitstückes in der Nute auf der Leiste rollt, die auf einem Tisch befestigt ist. An den Enden der Leiste stehen zwei auf ihr senkrechte Achsen mit Rollen, und an den Enden des Gleitstückes ist je eine Schnur befestigt, die über je einer der Rollen gelegt ist und von dem Beobachter behufs der Hin- und Herbewegung des Gleitstückes gezogen wird.

Wenn nun das Gleitstück mit dem rollenden Rade hinter dem Staket schnell bewegt wird, dann erscheint das Staketphänomen. Nach vielen Versuchen mit verschiedenen Kombinationen hat sich ergeben, daß bei schwarzen Stäben und weißen Speichen auf dunkler Unterlage die Erscheinung am deutlichsten ist. Wird die Scheibe frei von dem Staket um ihre Achse schnell

gedreht, dann erzeugen die weißen Speichen eine grauschimmernde, nach der Achse hin heller werdende Kreisfläche, auf der bei der Bewegung des Rades hinter dem Staket die Bahnen der Deckflächen als schwarze Streifen wahrgenommen werden. Zum Erscheinen des Streifengebildes ist eine schnelle Bewegung des Gleitstückes erforderlich. Dieses Streifengebilde verändert sich nicht, ob alsdann die Bewegung des Gleitstückes schneller oder langsamer, ob sie in der einen oder der anderen Richtung erfolgt, weil infolge der Rollung des Rades der Berührpunkt desselben an der Leiste sich mit dieser in gleichem Sinn bewegt, und das Verhältnis der Geschwindigkeit des Gleitstückes zu der Drehgeschwindigkeit des Rades konstant ist.

Wenn das Gleitstück mit zwei Schraubzwingen auf einem Tisch festgeschraubt und die Leiste mit dem Staket schnell verschoben wird, dann erscheint das Streifengebilde in ruhender Stellung, und es kann besser beobachtet werden als in seiner fortschreitenden Bewegung. In dieser ruhenden Stellung wurden die photographischen Momentaufnahmen des Streifengebildes in $^1/_{30}$ Sekunde ermöglicht, Bei dem Staket mit 12 Stäben hat sich das Bild mit 12 Streifen in Fig. 3, Taf. I ergeben, das dem ähnlich vergrößerten, ausgezogenen Metroidenstrauch in der Figur auf Taf. II entspricht. In diesem Bilde liegt der obere gerade Streifen genau zusammen mit der Symmetralgeraden, während der untere Streifen verschwommen verbreitert von ihr abweicht. Um diese Abweichung zu erklären, ist zu beachten, daß in dem unteren Teil des Rades die Drehung der Speichen und die Bewegung der Stäbe im gleichen Sinn, in dem oberen Teil aber im entgegengesetzten Sinn erfolgt, und daß hier anorthoskopische Einflüsse mitwirken. Denn wir können die Vorrichtung auch als ein besonderes, jedoch unvollkommeneres Anorthoskop betrachten, in dem die verhältnismäßig weiten Zwischenräume der Stäbe die schmalen radialen Spalten des Plateauschen Anorthoskops vertreten. Demzufolge erscheint nach der Anmerkung [1]) S. 145 in dem unteren Teil wegen jener gleichsinnigen Bewegung eine Breiterung, dagegen im oberen Teil wegen jener gegen-

sinnigen Bewegung eine Schmälerung der Deckflächen, die die Streifen erzeugen. Bei dem Staket mit 24 Stäben hat sich durch gleiche Momentaufnahme das Bild mit 24 Streifen in Fig. 4 ergeben, das dem in Fig. 7 zum Vergleich gezeichneten Metroidenstrauch entspricht, in dem keine Streifen mit der Symmetrallinie zusammenliegen.

Wird nun die Achse der Scheibe in dem Schlitz der Säule höher gelegen festgeschraubt, und vermittels einer in der Rille aufgewickelten Schnur durch einen schnellen Zug mit der Hand die Scheibe in schnellen Freilauf versetzt, dann erscheint, je nachdem die Verschiebung des Stakets in gleichem Sinn mit der Bewegung der unteren oder der oberen Speichen erfolgt, das Streckengebilde mit seinen Streifen nach oben oder nach unten gewendet. Bei dem Freilauf ist für den kinematischen Rollkreis der Radius $r = \frac{v}{\omega}$; und je größer die Drehgeschwindigkeit ω des Rades im Verhältnis zu der Verschiebgeschwindigkeit v des Stakets ist, desto kleiner ist dieser Radius und das Bild des Streifengebildes, so daß innerhalb des Felgenkreises des Rades auch geschweifte Nebenstreifen erscheinen. Bei einem Freilauf hinter dem Staket mit 12 Stäben hat sich das verkleinerte Bild in Fig. 5 ergeben, in dem die Quadratrix nebst der Symmetriegeraden nicht vorkommt und das dem strichpunktierten Metroidenstrauch entspricht. Ferner hat sich bei schnellerem Freilauf das verkleinerte Bild in Fig. 6 ergeben, das die Quadratrix nebst der Symmetralgeraden enthält und dem ausgezogenen Metroidenstrauch entspricht. Während eines Freilaufs muß das Staket versuchsweise sehr oft hin- und hergeschoben werden bis die günstige Zeit eintritt, in der einer dieser Metroidensträuche für die Momentaufnahme erscheint.

In der Wirklichkeit ist bei dem Erscheinen der Staketphänome die Anzahl der Stäbe des Stakets auf der Strecke gleich dem Radumfang zu der Anzahl der Speichen des Rades nicht in so einfachen Verhältnissen wie bei den gezeichneten Metroidensträuchern. Zum Zwecke der Beobachtungen der

Staketphänome, wie sie zuweilen gesehen werden, wurden an einem Fußweg verschiedene Stakete hergestellt, bei denen diese Verhältnisse weniger einfach waren, und hinter diesen Staketen wurde ein Karren mit zwölfspeichigen Rädern möglichst schnell vorüber geschoben. Es erschienen dann Staketphänome mit zahlreichen undeutlichen und nicht unterschiedbaren Bahnen der Deckflächen. Das ist theoretisch auch begründet. Denn, wenn die Bahnen nur durch je eine Deckfläche erzeugt werden, wie es solchen Verhältnissen entspricht, so sind die Bahnen sehr zahlreich, schwach sichtbar und dicht nebeneinander. Dagegen erschienen die Staketphänome bei den Anordnungen der Stakete gemäß jenen einfachen Verhältnissen in deutlicher Sichtbarkeit, die also nur dann vorkommt, wenn zufällige derartige Verhältnisse stattfinden.

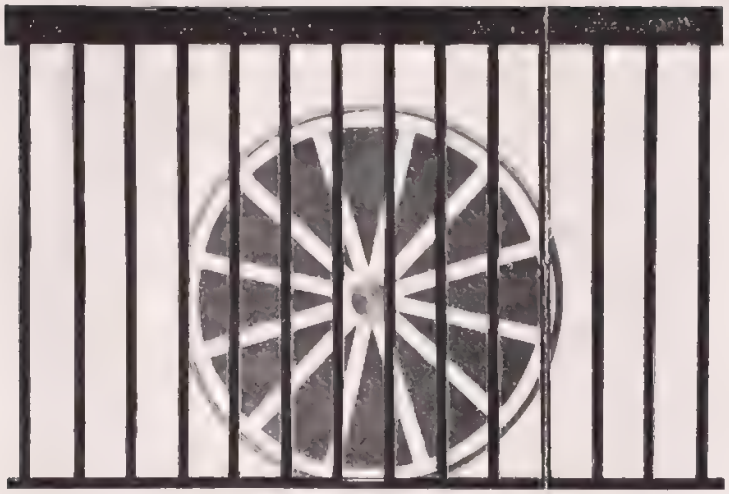


Fig. 2.

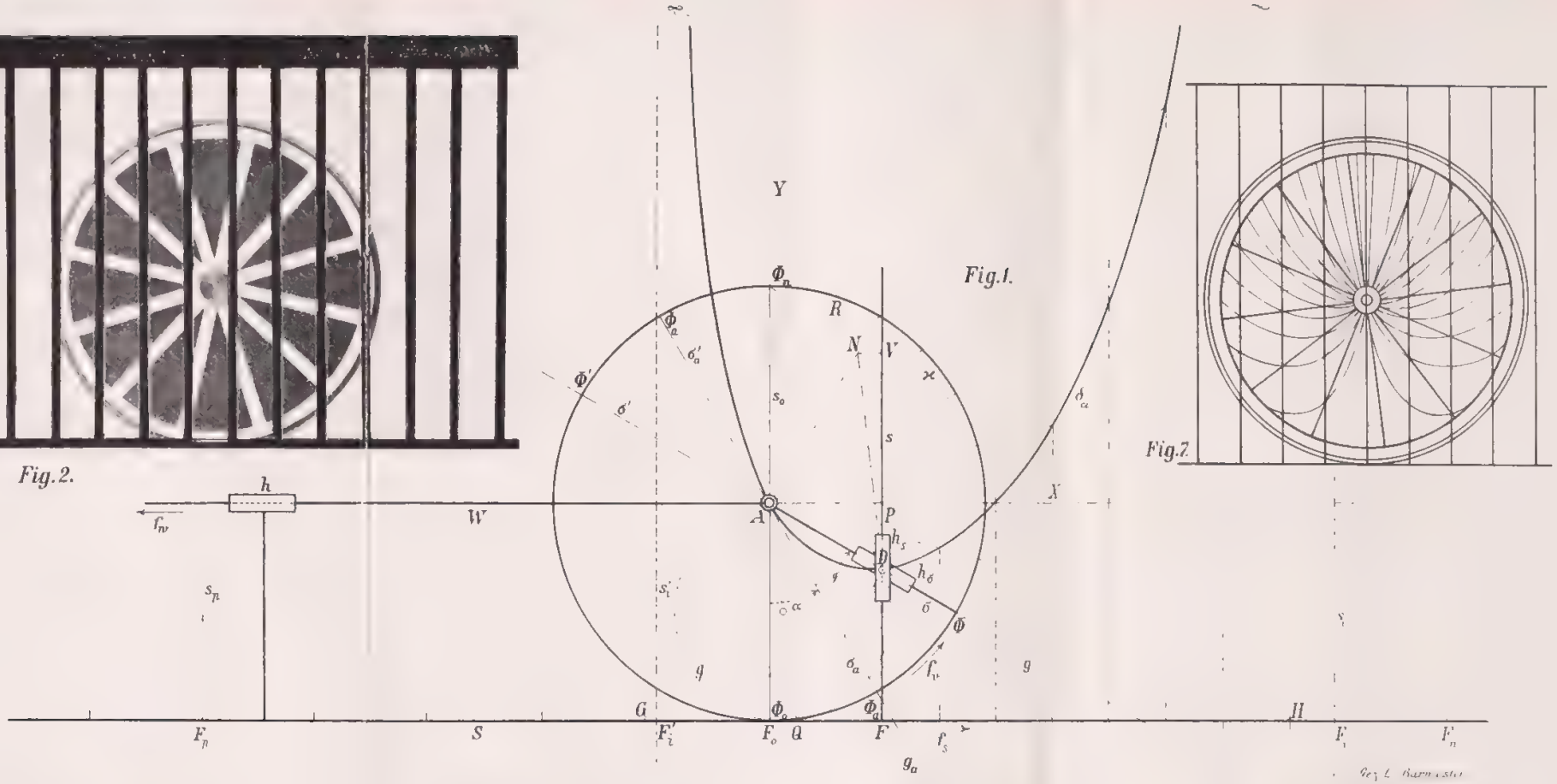


Fig. 1.

Fig. 7.

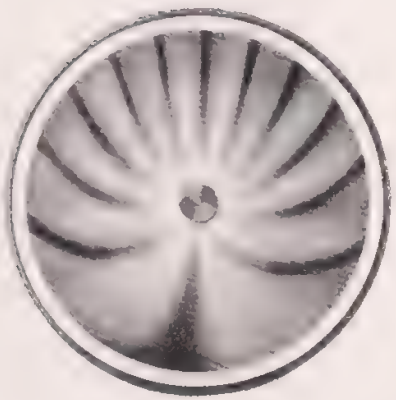


Fig. 3.

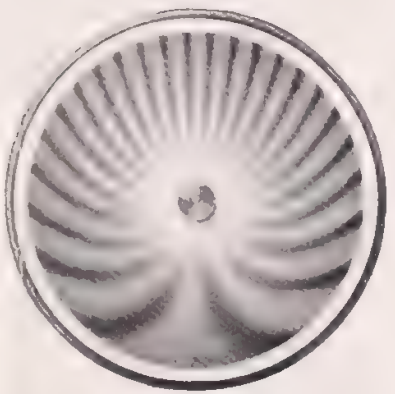


Fig. 4.

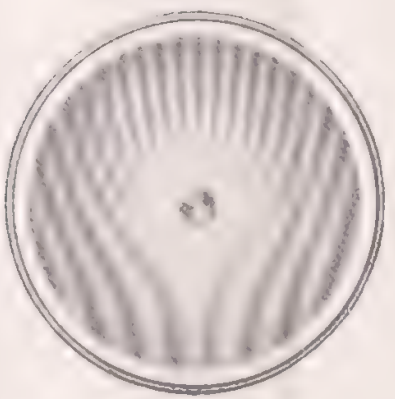


Fig. 5.

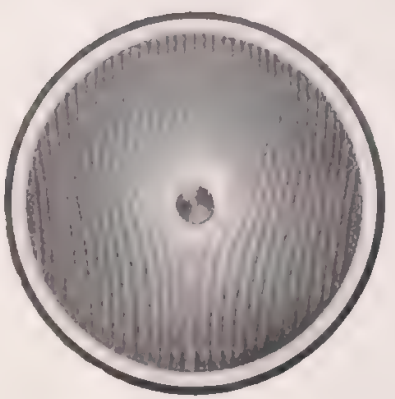


Fig. 6.

Lith. Anst. v. Hubert Köhler, München

Systeme von Potentialflächen und Stromflächen.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 13. Juni 1914.

Einleitung.

Die Stromlinien einer räumlichen Potentialströmung lassen sich unter Einführung einer willkürlichen Funktion zweier Veränderlicher zu ∞^1 Stromflächen zusammenfassen, die auf den Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials senkrecht stehen. Greift man zwei solche Scharen von Stromflächen $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ heraus, so können sie mit den Potentialflächen $u = \text{const.}$ zusammen als räumliches Koordinatensystem aufgefaßt werden, in dem die Flächen v und w im allgemeinen wechselnde und von 90^0 verschiedene Winkel miteinander bilden, während die Flächen u und v ebenso wie die Flächen u und w aufeinander senkrecht stehen. Anderseits genügt u bei richtiger Verteilung des Parameters auf den Potentialflächen der Laplaceschen Gleichung

$$\triangle_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

v und w dagegen lassen sich als zwei zunächst voneinander unabhängige „Stromfunktionen“ betrachten, ähnlich wie Stokes[1])

[1]) Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids. Transactions of the Cambridge Philosophical society, Vol. VIII, 1842, p. 439. Stokes, Mathematical and Physical Papers, Vol. I, p. 1.

bei der ebenen Strömung und bei der rotationssymmetrischen Meridionalströmung eine Stromfunktion eingeführt hat, die eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung erfüllt. Jede Stromfunktion des allgemeinen räumlichen Problems genügt nun einer ähnlichen Differentialgleichung von höherer als zweiter Ordnung, die sich durch Einführung eines partikulären Integrals auf eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung reduziert, welche die von Stokes angegebenen Differentialgleichungen als spezielle Fälle in sich enthält. Eine besondere Vereinfachung läßt sich durch geeignete Auswahl der Funktionen v und w erzielen: nimmt man die eine der beiden Scharen von Stromflächen v willkürlich an, so kann man die zweite w immer so wählen, daß

$$\operatorname{curl}\left[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w\right] = 0$$

ist. Zwei solche Scharen von Stromflächen nenne ich ein normiertes System. Die geometrische Bedeutung der normierten Systeme liegt darin, daß die beiden Scharen von Stromflächen zusammen mit den Potentialflächen den von Flüssigkeit erfüllten Raum in ∞^3 Zellen teilen, deren Querschnitt der Länge proportional ist[1]). Dieser Satz gibt eine Verallgemeinerung der bekannten Einteilung der Ebene durch Potential- und Stromkurven in „unendlich kleine Quadrate". Das Potential selbst hängt dann mit den beiden Scharen von Stromflächen durch die Gleichung

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w$$

zusammen, die die in der Ebene geltenden Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ebenso wie ähnliche für die Meridionalströmung geltende Gleichungen als spezielle Fälle umfaßt.

[1]) Eine geometrische Ableitung dieses Satzes und seine Anwendung auf die Dynamik der Strömungen gebe ich in einer Abhandlung über „Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung", die demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Bd. 63, Heft 4) erscheinen wird.

Betrachtet man die 3 Flächenscharen u, v, w als räumliches Koordinatensystem, so ergibt sich durch Transformation der Gleichung zwischen dem Potential und den beiden normierten Stromfunktionen die neue Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial w},$$

wo

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i}x(u, v, w) + \mathfrak{j}y(u, v, w) + \mathfrak{k}z(u, v, w)$$

der Ortsvektor ist. Diese Gleichung enthält ebenfalls einige bekannte Formeln für einfache Strömungen als spezielle Fälle. Da sie in drei skalare Gleichungen zerfällt, müssen die Bedingungen der gemeinsamen Integrabilität untersucht werden. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{x}$ einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen muß, die in dem Fall, daß auch die Stromflächen aufeinander senkrecht stehen, als die von Jacobi aufgestellte Transformierte der Laplaceschen Gleichung erkannt wird. Die Vermutung, daß auch in dem allgemeinen Fall die Integrabilitätsbedingung die gleiche Bedeutung hat, wird durch die Ausführung der Transformation der Laplaceschen Gleichung auf ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem bestätigt. Die transformierte Gleichung erscheint dabei in einfacher und übersichtlicher Gestalt als Determinante 4. Ordnung.

In der Darstellung tritt neben den gewöhnlichen Vektoroperationen auch die unbestimmte Produktbildung auf; insbesonders kommt das unbestimmte Quadrat des symbolischen Vektors

$$\triangle = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

als symbolische Dyade in ausgedehntem Maß zur Verwendung. Wenn ich mich von dem in Deutschland herrschenden Gebrauch abweichend für die Gibbssche Beziehungsweise[1]) entschlossen habe, so liegt der Grund in der Schwierigkeit, eine andere Be-

[1]) Vector Analysis, Founded upon the lectures of J. W. Gibbs by E. B. Wilson, New York, London 1901. Im folgenden als „Gibbs" zitiert.

zeichnungsweise für Dyaden- und Triadensummen, insbesondere mit symbolischen Operatoren, konsequent, kurz und eindeutig durchzubilden. Um die Verwendbarkeit der angewandten Methoden an einem weiteren Beispiel zu zeigen, habe ich anhangsweise damit eine kurze Ableitung der Cayley-Darbouxschen Gleichung gegeben. Diese Gleichung, die Bedingung dafür, daß eine Flächenschar einem dreifachen Orthogonalsystem angehört, hängt mit den vorausgegangenen Untersuchungen nur insofern zusammen, als darin die Frage nach den dreifachen Orthogonalsystemen von Potentialflächen aufgeworfen und mit gewissen Einschränkungen auch beantwortet wurde.

1. Bedingung für die Existenz einer zu zwei gegebenen Flächenscharen orthogonalen Flächenschar.

Wenn zwei Flächenscharen

$$v(xyz) = \text{const} \quad \text{und} \quad w(xyz) = \text{const.}$$

eine gemeinsame Schar von Orthogonalflächen $u(xyz) = \text{const.}$ haben, bestehen gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0 = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w = 0.$$

Aus ihnen lassen sich die partiellen Differentialquotienten von u durch die von v und w ausdrücken:

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Führt man Vektoren ein und bezeichnet mit $\varrho(xyz)$ einen skalaren Proportionalitätsfaktor, so ist

$$\mathfrak{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \varrho(xyz) \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

oder

$$1) \qquad \operatorname{grad} u = \varrho(xyz)\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

Die Identität

$$\operatorname{curl}\operatorname{grad} u \equiv 0$$

liefert die Integrabilitätsbedingung der Gleichung (1) in der Form

$$2) \qquad \operatorname{curl}\{\varrho \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w\} = 0.$$

Das Bestehen dieser Gleichung (2) ist die Bedingung dafür, daß die beiden Flächenscharen $v = \text{const.}$ und $w = \text{const.}$ eine gemeinsame Schar von Orthogonalflächen besitzen.

Zur weiteren Umformung der Gleichung (2) ist es von Vorteil, ∇, $\nabla\cdot$ und $\nabla\times$ an Stelle von grad, div und curl einzuführen, wobei ∇ den symbolischen Vektor

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

der Punkt die skalare und das Andreas-Kreuz die vektorielle Produktbildung bedeutet. Dann wird (2)

$$2\,a) \qquad \nabla \times [\varrho \nabla v \times \nabla w] = 0$$

und durch Ausrechnen ergibt sich

$$2\,b) \qquad \nabla\varrho \times [\nabla v \times \nabla w] + \varrho \nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = 0^{1})$$

oder

$$\operatorname{grad}\varrho \times [\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] + \varrho \operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0.$$

Die beiden dreifachen Vektorprodukte lassen sich noch umformen, und zwar ist

$$\nabla\varrho \times [\nabla v \times \nabla w] = (\nabla\varrho \cdot \nabla w)\nabla v - (\nabla\varrho \cdot \nabla v)\nabla w$$

oder

$$\operatorname{grad}\varrho \times [\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w]$$
$$= (\operatorname{grad}\varrho \cdot \operatorname{grad} w)\operatorname{grad} v - (\operatorname{grad}\varrho \cdot \operatorname{grad} v)\operatorname{grad} w,$$

---

[1]) Gibbs, S. 157.

ferner das symbolische dreifache Produkt

$$\nabla \times [\nabla v \times \nabla w]$$
$$= \nabla\nabla v \cdot \nabla w - \nabla\nabla w \cdot \nabla v + \nabla \cdot \nabla w \nabla v - \nabla \cdot \nabla v \nabla w^{1}).$$

Dabei ist

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle_2$$

der Laplacesche Operator, dagegen

$$\nabla\nabla = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathfrak{i}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$+ \mathfrak{j}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$$

eine symbolische Dyadensumme[2]), also

$$\nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = \nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v + \triangle_2 w \nabla v - \triangle_2 v \nabla w$$

oder

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w]$$
$$= \nabla^2 v \cdot \operatorname{grad} w - \nabla^2 w \cdot \operatorname{grad} v + \triangle_2 w \operatorname{grad} v - \triangle_2 v \operatorname{grad} w.$$

Somit läßt sich die Existenzbedingung einer Schar von gemeinsamen Orthogonalflächen in die folgende Form bringen:

2c)
$$(\nabla \varrho \cdot \nabla w)\nabla v - (\nabla \varrho \cdot \nabla v)\nabla w$$
$$+ \varrho\{\nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v + \triangle_2 w \nabla v - \triangle_2 v \nabla w\} = 0.$$

Bei der Untersuchung zweier gegebenen Flächenscharen v und w auf die Existenz einer gemeinsamen Schar von Orthogonalflächen ist über den Faktor ϱ von vornherein nichts bekannt; es empfiehlt sich daher, aus den drei skalaren Glei-

[1]) Gibbs S. 407.

[2]) Eine symbolische Triadensumme

$$\nabla^3 = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\mathfrak{i}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \mathfrak{i}\mathfrak{i}\mathfrak{j}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \mathfrak{i}\mathfrak{i}\mathfrak{k}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} + \cdots$$

kommt später zur Verwendung.

chungen, in welche die Vektorgleichung (2) zerfällt, ϱ samt seinen Differentialquotienten zu eliminieren. Dies gelingt am einfachsten durch skalare Multiplikation von (2 b) mit $[\nabla v \times \nabla w]$; hiebei verschwindet der erste Summand identisch und es bleibt nur

$$3) \qquad [\nabla v \times \nabla w] \cdot \nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = 0$$

oder

$$[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] \cdot \operatorname{curl} [\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0.$$

Multipliziert man (2 c) mit dem gleichen Faktor $[\nabla v \times \nabla w]$, so verschwinden die beiden Produkte

$$\nabla v \cdot [\nabla v \times \nabla w] \quad \text{und} \quad \nabla w \cdot [\nabla v \times \nabla w]$$

identisch und es ergibt sich

$$3\,a) \qquad \{\nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v\} \cdot [\nabla v \times \nabla w] = 0.$$

Diese Gleichung ist die einfachste Form der Bedingung für das Vorhandensein einer gemeinsamen Schar von Orthogonalflächen.

2. Implizite Darstellung der Potential- und Stromflächen.

Sollen die Orthogonalflächen u Potentialflächen, die Flächen v und w also Stromflächen und ihre Schnittkurven Stromlinien sein, so muß u der Gleichung

$$\triangle_2 u = 0$$

oder

$$\nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$$

genügen.

Aus (1) folgt dann die Gleichung

$$(4) \qquad \operatorname{div} \{\varrho \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w\} = 0$$

oder

$$\nabla \cdot \{\varrho \nabla v \times \nabla w\} = 0,$$

die neben (2) noch bestehen muß. Durch Ausrechnen des symbolischen Produktes ergibt sich

$$\nabla\varrho\cdot\nabla v\times\nabla w+\varrho\nabla\cdot[\nabla v\times\nabla w]=0^{1}).$$

Nun ist

$$\nabla\cdot[\nabla v\times\nabla w]=\nabla w\cdot\nabla\times\nabla v-\nabla v\cdot\nabla\times\nabla w\equiv 0^{1}),$$

weil

$$\nabla\times\nabla v\equiv 0\quad\text{und}\quad\nabla\times\nabla w\equiv 0$$

ist; also geht (4) über in

4 a) $$\nabla\varrho\cdot\nabla v\times\nabla w=0$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial\varrho}{\partial x} & \frac{\partial\varrho}{\partial y} & \frac{\partial\varrho}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=0.$$

Das Verschwinden dieser Funktionaldeterminante sagt aus, daß ϱ als Funktion $\varrho(v,w)$ von v und w allein zu betrachten ist.

Besteht also eine Gleichung

$$\operatorname{grad}u=\varrho\operatorname{grad}v\times\operatorname{grad}w,$$

so ist u ein Potential, wenn ϱ eine Funktion von v und w allein ist. Umgekehrt kann der Gradient eines jeden Potentials in dieser Weise ausgedrückt werden.

5) $$\nabla u=\varrho(v,w)\nabla v\times\nabla w$$
$$\operatorname{grad}u=\varrho(v,w)\operatorname{grad}v\times\operatorname{grad}w.$$

Es sei für den Augenblick mit w' eine Funktion von v und w bezeichnet. Dann ist

$$\operatorname{grad}w'=\frac{\partial w'}{\partial v}\operatorname{grad}v+\frac{\partial w'}{\partial w}\operatorname{grad}w$$
$$\operatorname{grad}v\times\operatorname{grad}w'=\frac{\partial w'}{\partial w}\operatorname{grad}v\times\operatorname{grad}w.$$

1) Gibbs, S. 157.

Durch Einführung von w' läßt sich also $\operatorname{grad} u$ in folgende Form bringen:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\varrho(v, w)}{\dfrac{\partial w'}{\partial w}} \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w'.$$

Durch geeignete Wahl der Funktion w' kann man dem Faktor $\dfrac{\varrho}{\dfrac{\partial w'}{\partial w}}$ den Wert 1 geben; hiezu hat man nur

$$w' = \int \varrho \, dw + \Phi(v)$$

zu setzen, wo $\Phi(v)$ eine willkürliche Funktion von v bedeutet. Läßt man nun den Strich (') wieder weg, so gilt die Gleichung

$$\begin{gathered} \nabla u = \nabla v \times \nabla w \\ \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w, \end{gathered} \tag{5}$$

ausführlich geschrieben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

In diese einfache Form (5) läßt sich der Gradient eines jeden Potentials u bringen. v und w sind zwei Scharen von Stromflächen, von denen die eine vollständig willkürlich gewählt werden kann; die andere ist dann durch eine Quadratur bestimmt, aber immerhin noch von der Mannigfaltigkeit einer Funktion einer Veränderlichen. Die Integrabilitätsbedingung nimmt folgende Gestalt an:

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0; \quad \nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = 0 \tag{6}$$

oder

$$\nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v + \Delta_2 w \nabla v - \Delta_2 v \nabla w = 0.$$

Zwei Scharen von Stromflächen, die der Gleichung (6) genügen, sollen als normierte Scharen bezeichnet werden. Es

ist zu bemerken, daß durch diese Normierung keine der Scharen selbst, sondern nur die Zusammenstellung zweier Scharen einer Beschränkung unterworfen ist.

Da in (6) drei Gleichungen enthalten sind, in denen die partiellen Differentialquotienten von v und w bis zur 2. Ordnung vorkommen, muß es möglich sein, eine dieser beiden Größen, etwa w, zu eliminieren. Der sich ergebenden partiellen Differentialgleichung von höherer als 2. Ordnung für v müßten sämtliche Systeme von Stromflächen genügen, die dem allgemeinsten System von Potentialflächen zugehören.

3. Spezialisierung auf ebene und rotationssymmetrische Strömungen.

Wenn auch die rechnerischen Schwierigkeiten bei der Aufstellung der allgemeinen Stromflächengleichung offenbar sehr beträchtlich sind, so läßt sich doch wenigstens in einzelnen Fällen, in denen die Potentialflächen einem einfachen Typus angehören und folglich unter den Stromflächen ebenfalls Scharen von besonders einfacher Art enthalten und bereits bekannt sind, die Differentialgleichung allgemeinerer Scharen angeben. Derartige Gleichungen sind als partikuläre Zwischenintegrale der allgemeinen Stromflächengleichung aufzufassen.

Als einfachstes Beispiel sei angenommen, daß die Potentialflächen Zylinderflächen mit zur z-Achse parallelen Erzeugenden seien, für welche sich die Potentialgleichung wegen $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ auf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

reduziert. Unter den Stromflächen befinden sich dann die Ebenen, die zur xy-Ebene parallel sind. Folglich ist

$$w = z$$

ein Integral der Stromflächengleichung. Die Gleichungen (5) reduzieren sich dann auf die bekannten Gleichungen zwischen dem Potential u und der „Stromfunktion“ v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

als deren räumliche Verallgemeinerung sie aufzufassen sind. Die Gleichung der Stromflächen v, welche mit $w = z$ zusammen ein normiertes System bilden, ist nach (6)

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} z] = 0$$

oder

$$\operatorname{curl}\left[\left(\mathfrak{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \times \mathfrak{k}\right] = 0$$

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{i} v_y - \mathfrak{j} v_x) = 0$$

$$\mathfrak{i} v_{xz} + \mathfrak{j} v_{yz} - \mathfrak{k}(v_{xx} + v_{yy}) = 0.$$

v muß also 3 skalaren Differentialgleichungen genügen, deren allgemeinstes reelles Integral in die Form

$$v = i(F(x + iy) - F(x - iy)) + g(z)$$

gebracht werden kann, wo F bzw. F und g willkürliche Funktionen bedeuten. Für $g(z) = 0$ erhält man die bekannten zylindrischen Stromflächen, welche mit den Potentialflächen zusammen die ebenen Stromflächen in ∞ kleine Quadrate teilen: trifft man jedoch diese Vereinfachung nicht, so ergeben sich doppelt gekrümmte Stromflächen, auf deren jeder ∞^1 ebene Stromlinien liegen.

Durch Einsetzen des eben erhaltenen Wertes für v in (6) läßt sich die Differentialgleichung derjenigen Stromflächen w erhalten, die mit v zusammen ein normiertes System bilden.

An Stelle der Differentialgleichung kann auch die endliche Gleichung der Stromflächen direkt gefunden werden. Setzt man das Potential u und die eine Stromflächenschar w als bekannt voraus, so geben die Gleichungen (5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}$$

durch Auflösen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial w}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial w}{\partial z}}.$$

$\frac{\partial v}{\partial z}$ bleibt zunäscht unbestimmt, da die dritte der Gleichungen (5) unter der Annahme, daß die Flächen v und w auf den Flächen u senkrecht stehen, eine Folge der beiden ersten ist.

Wendet man diese Formeln auf die ebene Strömung an und setzt

$$u = F(x + iy) + F(x - iy); \qquad w = z,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i\,(F' - F')$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = F' + F'.$$

Durch Integration ergibt sich

$$v = -i(F(x + iy) - F(x - iy)) + g(z).$$

Damit ist die Gleichung der Stromflächen, die mit den Ebenen zusammen ein normiertes System bilden, in derselben Form wie oben durch Integration ihrer Differentialgleichung gefunden.

Führt man in die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Zylinderkoordinaten ein mittelst der Formeln

$$x = r\cos\vartheta \qquad z = z,$$
$$y = r\sin\vartheta$$

so nimmt sie die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0$$

an. Wenn man verlangt, daß die Potentialflächen Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse sind, ist u von ϑ unabhängig und genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 .$$

Unter den Stromflächen sind die Meridianebenen; wir setzen

$$w = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

und erzielen so eine gleichmäßige Verteilung der Stromflächen w.

Dann ist

$$\operatorname{grad} w = \frac{-\mathfrak{i}y + \mathfrak{j}x}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w = \frac{1}{x^2 + y^2}[-\mathfrak{i}xv_z - \mathfrak{j}yv_z + \mathfrak{k}(xv_x + yv_y)],$$

wenn mit v wie bisher die Stromflächen bezeichnet werden, die mit den Meridianebenen zusammen ein normiertes System bilden. Geht man mittelst der Formeln

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

zu Zylinderkoordinaten über, so ergibt sich

$$\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial z}(\mathfrak{i}\cos\vartheta + \mathfrak{j}\sin\vartheta) + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial v}\mathfrak{k}$$

und da

$$\operatorname{grad} u = \mathfrak{i}\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial r} + \mathfrak{j}\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial r} + \mathfrak{k}\frac{\partial u}{\partial z}$$

ist, erhält man nach (5) die Stokesschen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

zwischen Potential und Stromfunktion.

Die Gleichung (6)

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0$$

liefert die Bedingungen, denen die Stromflächen v genügen müssen, die mit den Meridianflächen zusammen ein normiertes System bilden:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} & -\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\cos\vartheta}{r} \\ \mathfrak{j} & \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} & -\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sin\vartheta}{r} \\ \mathfrak{k} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathfrak{i}\left[\frac{\sin\vartheta}{r}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\cos\vartheta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\vartheta}\right]$$

$$+\mathfrak{j}\left[-\frac{\cos\vartheta}{r}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\sin\vartheta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\vartheta}\right]$$

$$+\mathfrak{k}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\vartheta} = 0.$$

Die Stromfunktion v muß also den 3 Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\vartheta} = 0,$$

von denen die erste, von Stokes angegebene[1]), die Systeme von Stromkurven in den Meridianebenen charakterisiert. Um zu den Stromflächen v zu gelangen, hat man dem Integral dieser Gleichung noch eine willkürliche Funktion von ϑ additiv hinzuzufügen.

[1]) Vgl. Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften IV, 16. S. 101.

4. Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung.

Die Bedingung (6)

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0$$

führt auf eine bemerkenswerte Umformung der Gleichung (5)

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

Bildet man $\operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w]$, so erhält man, weil

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} v \equiv 0$$

ist:

$$\operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w] = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

An Stelle von (5) und (6) ergibt sich

5') $$\operatorname{grad} u = \operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w]$$

6') $$\operatorname{curl} \operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w] = 0.$$

Der Gradient eines Potentials läßt sich nach (5') als curl eines Vektorfeldes darstellen, das man erhält, wenn man den Gradient einer beliebigen Stromflächenschar w mit dem Parameter v einer zweiten Stromflächenschar multipliziert, die mit w zusammen ein normiertes System bildet.

Setzt man

$$v \operatorname{grad} w = \mathfrak{A} = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k},$$

so wird

5'') $$\operatorname{grad} u = \operatorname{curl} \mathfrak{A}.$$

Dabei muß $\mathfrak{A}$ der Bedingung

6'') $$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0$$

genügen.

Gleichung (5'') gibt ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}.$$

Jetzt sind 2 von den Größen a durch die dritte ausdrückbar, etwa

$$a_2 = \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx$$

$$a_3 = \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx.$$

Die erste der Gleichungen (5″) sowie (6″) besteht dann zufolge $\Delta_2 u = 0$ identisch. Dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathrm{i}\, a_1 + \mathrm{j} \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx + \mathrm{t} \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx$$

$$= \int \left(\operatorname{grad} a_1 + \mathrm{i} \frac{\partial u}{\partial z} - \mathrm{t} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx.$$

Da

$$\int \operatorname{grad} a_1 \, dx = \operatorname{grad} \int a_1 \, dx = \operatorname{grad} b$$

gesetzt werden kann, wo b ein neuer Skalar ist, ist

$$v \operatorname{grad} w = \mathfrak{A} = \operatorname{grad} b + \mathrm{i} \frac{\partial}{\partial z} \int u \, dx - \mathrm{t} \frac{\partial}{\partial y} \int u \, dx$$

oder 7)

$$v \operatorname{grad} w = \operatorname{grad} b + \operatorname{curl} \mathrm{i} \int u \, dx.$$

In diese Form läßt sich also jedes normierte Stromflächensystem bringen: dabei ist b eine skalare Funktion des Ortes. Der Gradient des Potentials selbst erscheint nach (5″) in der Gestalt

8) $$\operatorname{grad} u = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathrm{i} \int u \, dx.$$

Die scheinbare Unsymmetrie des Ausdrucks auf der rechten Seite rührt davon her, daß zu dem unter dem curl stehenden Vektor stets ein beliebiger Gradient hinzugefügt werden und dadurch eine Komponente zum Verschwinden gebracht werden kann.

Die Gleichung (5) gibt ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man

$$\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Bezeichnet man den Abstand zweier Flächen u und $u + du$ mit ds_u, so ist nach einer bekannten geometrischen Überlegung

$$\frac{du}{ds_u} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Ebenso

$$\frac{dv}{ds_v} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}; \qquad \frac{dw}{ds_w} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel der Flächen v und w mit ϑ, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\Sigma \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}};$$

also

$$\Sigma \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \cos\vartheta \cdot \frac{dv}{ds_v} \frac{dw}{ds_w}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\left(\frac{du}{ds_u}\right)^2 = \left(\frac{dv}{ds_v}\right)^2 \left(\frac{dw}{ds_w}\right)^2 - \left(\cos\vartheta \frac{dv}{ds_v} \frac{dw}{ds_u}\right)^2 = \left(\frac{dv}{ds_v}\right)^2 \left(\frac{dw}{ds_u}\right)^2 \sin^2\vartheta$$

$$ds_u = \left(\frac{du}{dv\,dw}\right) \frac{ds_v\, ds_u}{\sin\vartheta}.$$

Zwei Paare von Stromflächen, $v, v + dv$ und $w, w + dw$ bestimmen eine Stromröhre, deren Querschnitt an jeder Stelle ein Parallelogramm vom Inhalt

$$dq = \frac{ds_v\, ds_w}{\sin\vartheta}$$

ist. Verteilt man nun die Potentialflächen so, daß der Potentialunterschied zwischen je zwei aufeinanderfolgenden konstant $= du$ ist, so ist $\dfrac{du}{dv\,dw} = c$ längs der ganzen Stromröhre eine Konstante. Die Gleichung

9) $$ds_u = c\,dq$$

sagt dann aus, daß die Stromröhre durch die Potentialflächen in Zellen eingeteilt wird, deren Länge zum Querschnitt in konstantem Verhältnis c steht. Verteilt man auch die Stromflächen so, daß sich die Parameter je zweier benachbarter um den gleichen Betrag dv bzw. dw unterscheiden, so ist c im ganzen stromdurchflossenen Raum konstant. Die ganze Strömung wird somit durch die Potentialflächen und zwei normierte Scharen von Stromflächen in ∞^3 Zellen geteilt, deren Länge zum Querschnitt im konstanten Verhältnis c steht.

Damit ist auch die geometrische Eigentümlichkeit der normierten Stromflächensysteme aufgeklärt.

Wenn insbesondere die Strömung Rotationssymmetrie besitzt und unter den Stromflächen ein Büschel von Meridianebenen w enthalten ist, ist

$$ds_w = r \cdot d\varphi,$$

wenn $d\varphi$ der Winkel zweier benachbarter Meridianebenen ist. Dann ist

$$ds_u = c \cdot r\,d\varphi\,ds_v$$
$$\frac{ds_u}{ds_v} = c\,d\varphi \cdot r.$$

In den Rechtecken, in welche jede Meridianebene durch die Potential- und Stromlinien zerlegt wird, ist der Quotient aus der von einer Stromlinie gebildeten Seite und der durchströmten Seite proportional der Entfernung von der Rotationsachse. Der Proportionalitätsfaktor ist längs jeder Stromröhre konstant,

also nur vom Parameter der Stromlinien abhängig, und kann bei geeigneter Verteilung der Stromlinien konstant im ganzen Raum angenommen werden [1]).

Die eben besprochene geometrische Eigenschaft der normierten Scharen von Stromflächen ermöglicht es, alle dreifach orthogonalen Systeme von Potentialflächen aufzusuchen, welche Rotationssymmetrie besitzen, d. h. ein Ebenenbüschel enthalten. Dann werden die beiden anderen Flächensysteme in den Meridianebenen zwei orthogonale Kurvenscharen ausschneiden, deren jede sowohl der Potentialgleichung der Meridionalströmung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

als auch, in anderer Verteilung, der Stokesschen Differentialgleichung der Stromlinien

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

genügen muß: dabei ist v eine noch unbekannte Funktion von u. Die zweite Gleichung wird also, wenn $\frac{dv}{du} = v'$ und $\frac{d^2 v}{du^2} = v''$ gesetzt wird,

$$v'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + v''\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right) - \frac{v'}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{\partial u}{\partial r}$ mittels der ersten Gleichung folgt

$$2v'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + v''\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann als Transformierte der ebenen Potentialgleichung aufgefaßt werden: denn setzt man $\int \sqrt{v'(u)}\,du = f$, so nimmt sie die Gestalt

[1]) Vgl. R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 57. Bd., 1909, S. 1 f. Weitere Literatur in der S. 158 zitierten Abhandlung.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0$$

an. Es gibt also eine dritte Verteilung der orthogonalen Kurvenscharen, bei welcher sie die Meridianebenen in unendlich kleine Quadrate teilen. Nennt man p und q die zugehörigen Parameter, so kann man

$$r + iz = F(p + iq)$$

ansetzen: die Funktion F ist noch zu bestimmen.

Wenn man nun für das Potential auf den Kurven p und q die Werte α und β einführt, so wird p eine Funktion von α, q eine solche von β sein, also

$$r + iz = F(p(\alpha) + iq(\beta)).$$

Die Potentialkurven α und β zerlegen die Meridianebenen in Rechtecke mit den Seitenlängen ds_α und ds_β. Da die Kurven β gleichzeitig Stromlinien sind, ist $\frac{ds_\alpha}{ds_\beta}$ von r nur um einen Faktor verschieden, der eine Funktion von β allein ist:

$$\frac{ds_\alpha}{ds_\beta} = \frac{r}{k^2(\beta)}.$$

Ebenso ist aber

$$\frac{ds_\beta}{ds_\alpha} = \frac{r}{h^2(\alpha)}.$$

Also

$$r = h(\alpha)k(\beta).$$

Die Entfernung von der Rotationsachse ist ein Produkt aus zwei Funktionen je eines der beiden Potentiale. An Stelle der Funktionen von α und β lassen sich auch solche von p und q einführen; dann ist

$$r = H(p)K(q).$$

Nun ist noch z zu berechnen. Aus der Quadrateinteilung der Ebene durch die Kurven p und q folgt

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\partial r}{\partial q}$$
$$\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial r}{\partial p}.$$

Diese Gleichungen lassen z aus r berechnen, anderseits geben sie für r die Gleichung

$$\frac{\partial^2 r}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial q^2} = 0.$$

Damit ist $H(p)$ und $K(q)$ an die Bedingung

$$H''(p)K(q) + H(p)K''(q) = 0$$

geknüpft. Die Integrale dieser Gleichung sind

$$H(p) = Ae^{ap} + Be^{-ap}$$
$$K(q) = C\sin aq + D\cos aq,$$

wo A, B, C, D, a willkürliche Konstante sind. Dann erhält man

$$r = (Ae^{ap} + Be^{-ap})(C\sin aq + D\cos aq)$$
$$z = (Ae^{ap} - Be^{-ap})(D\sin aq - C\cos aq).$$

Diese Gleichungen stellen ein System konfokaler Kegelschnitte dar; die Ellipsen $p = \text{const.}$ sind

$$\left(\frac{r}{Ae^{ap} + Be^{-ap}}\right)^2 + \left(\frac{z}{Ae^{ap} - Be^{-ap}}\right)^2 = C^2 + D^2.$$

Die Hyperbeln $q = \text{const.}$ sind

$$\left(C\sin aq + \frac{r}{D\cos aq}\right)^2 - \left(D\sin aq - \frac{z}{C\cos aq}\right)^2 = 4AB.$$

Die gemeinsame Brennweite ist durch

$$e^2 = 4AB(C^2 + D^2)$$

gegeben. Je nachdem A und B gleiches oder ungleiches Zeichen haben, entstehen außer den Rotationsellipsoiden einschalige oder zweischalige Rotationshyperboloide. $a = 0$ führt

auf die konfokalen Rotationsparaboloide; die Ausartungen ergeben sich durch Spezialisieren der übrigen Konstanten.

Die konfokalen Systeme von Rotationsflächen 2. Ordnung und ihre Ausartungen sind die einzigen dreifachen Orthogonalsysteme mit Rotationssymmetrie, die aus lauter Potentialflächen bestehen.

5. Parameterdarstellung der Potentialströmung.

Wenn man die Koordinaten x, y, z eines Punktes als Funktionen dreier Parameter, nämlich des Parameters u der Potentialflächen und der Parameter v und w zweier Systeme von Stromflächen darstellt, geht die für die Potentialströmung charakteristische Gleichung

$$5) \qquad \nabla u = \varrho(v, w) \nabla v \times \nabla w$$

in eine Gleichung mit u, v, w als abhängigen und x, y, z als unabhängigen Veränderlichen über, die aufgestellt werden soll. Hiezu sind in den Operator

$$\nabla = \mathfrak{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

u, v, w als unabhängige Veränderliche einzuführen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} \cdot \nabla = \mathfrak{x}_u \cdot \nabla,$$

wenn

$$\mathfrak{i} x + \mathfrak{j} y + \mathfrak{k} z = \mathfrak{x}$$

gesetzt wird. Ebenso

$$\frac{\partial}{\partial v} = \mathfrak{x}_v \cdot \nabla$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \mathfrak{x}_w \cdot \nabla.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{i} \frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j} \frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k} \frac{\partial}{\partial w} = (\mathfrak{i} \mathfrak{x}_u + \mathfrak{j} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{k} \mathfrak{x}_w) \cdot \nabla.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein skalares Produkt aus einer Dyadensumme und einem symbolischen Vektor. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung von links mit der reziproken Dyadensumme, so folgt

$$(\mathfrak{i}\mathfrak{X}_u + \mathfrak{j}\mathfrak{X}_v + \mathfrak{k}\mathfrak{X}_w)^{-1} \cdot \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial w}\right) = \nabla.$$

Ausführlich geschrieben ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}\nabla = {} & (\mathfrak{i}\mathfrak{i}x_u + \mathfrak{i}\mathfrak{j}y_u + \mathfrak{i}\mathfrak{k}z_u \\ & + \mathfrak{j}\mathfrak{i}x_v + \mathfrak{j}\mathfrak{j}y_v + \mathfrak{j}\mathfrak{k}z_v \\ & + \mathfrak{k}\mathfrak{i}x_w + \mathfrak{k}\mathfrak{j}y_w + \mathfrak{k}\mathfrak{k}z_w)^{-1} \cdot \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial w}\right)\end{aligned}$$

und wenn man die reziproke Dyadensumme einführt[1])

$$\nabla = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \mathfrak{i} \\ x_v & y_v & z_v & \mathfrak{j} \\ x_w & y_w & z_w & \mathfrak{k} \end{vmatrix} \cdot \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Dabei sind die in der ersten Horizontalreihe stehenden Einheitsvektoren als 1. Faktoren, die in der letzten Vertikalreihe als 2. Faktoren aufzufassen; ferner ist

---

[1]) Die reziproke Dyadensumme von

$$\Phi = a_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\mathfrak{i}\mathfrak{k} + a_{21}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\mathfrak{j}\mathfrak{k} + a_{31}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}$$

ist nach Gibbs S. 316

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{D}[A_{11}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + A_{21}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + A_{31}\mathfrak{i}\mathfrak{k} + A_{12}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + A_{22}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + A_{32}\mathfrak{j}\mathfrak{k} + A_{13}\mathfrak{k}\mathfrak{i} + A_{23}\mathfrak{k}\mathfrak{j} + A_{33}\mathfrak{k}\mathfrak{k}],$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und A_{ik} die adjungierte Determinante von a_{ik} in D ist.

$$D = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w = [\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_w].$$

Führt man die Multiplikation aus, so ergibt sich der transformierte Wert von ∇:

$$10) \qquad \nabla = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \dfrac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \dfrac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \dfrac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach Elementen der letzten Spalte erhält man

$$10') \quad \nabla = \frac{1}{D}\left[\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w \frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u \frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \frac{\partial}{\partial w}\right].$$

Insbesondere ist

$$\nabla u = \frac{1}{D} \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w; \qquad \nabla v = \frac{1}{D} \mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u; \qquad \nabla w = \frac{1}{D} \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v.$$

Nun ergibt die Gleichung (5)

$$\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w = \frac{\varrho\,(v, w)}{D} [\mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u] \times [\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v]$$

$$= \frac{\varrho\,(v, w)}{D} [\mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v] \mathfrak{x}_u - \frac{\varrho(v, w)}{D} [\mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_u] \mathfrak{x}_v.$$

Von den beiden gemischten Produkten der rechten Seite ist das erste $= D$, das zweite Null; folglich

$$11) \qquad \mathfrak{x}_u = \frac{1}{\varrho\,(v, w)} \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w.$$

Diese Gleichung ist für jede Parameterdarstellung einer Potentialströmung charakteristisch: legt man insbesondere zwei normierte Scharen von Stromflächen zu Grunde, so ist

11') $$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w .$$

Ausführlich geschrieben ist

$$\mathfrak{i}\,x_u + \mathfrak{j}\,y_u + \mathfrak{k}\,z_u = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}.$$

Wenn man (11') auf die ebene Strömung anwendet, also $w = z$ als eine Schar von Stromflächen einführt, erhält man

$$x_u = y_v; \qquad x_v = -y_u .$$

Die Gleichung (11') stellt also die räumliche Verallgemeinerung dieser bekannten Beziehung dar.

Untersucht man nun die Meridionalströmung, so hat man als Stromflächen w das Ebenenbüschel durch die z-Achse einzuführen; also etwa

$$x = r\cos w, \qquad y = r\sin w$$

so setzen, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die senkrechte Entfernung von der z-Achse bedeutet. Wenn man nur solche Stromflächen v in Betracht zieht, die ebenso wie die Potentialflächen u Rotationsflächen um die z-Achse sind, so ist $\frac{\partial r}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w} = 0$ zu setzen. Dann wird aus (11')

$$\mathfrak{i}\,r_u\cos w + \mathfrak{j}\,r_u\sin w + \mathfrak{k}\,z_u = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ r_v\cos w & r_v\sin w & z_v \\ -r\sin w & r\cos w & 0 \end{vmatrix}$$

oder

12) $$z_u = r r_v; \qquad z_v = -\frac{r_u}{r}.$$

Diese beiden Gleichungen sind die Bedingung dafür, daß ein ebenes Orthogonalsystem als meridionales Strömungsbild einer achsensymmetrischen räumlichen Potentialströmung betrachtet werden kann. Durch Elimination von z erhält man für r die Differentialgleichung

$$r r_{vv} + \frac{r_{uu}}{r} + r_v^2 - \frac{r_u^2}{r^2} = 0.$$

Es soll jetzt noch die Integrabilitätsbedingung der Gleichung (11') untersucht werden. Aus

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w$$

erhält man durch Differentiieren

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_{uu} &= \mathfrak{x}_{uv} \times \mathfrak{x}_w + \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{uw}\\ \mathfrak{x}_{uv} &= \mathfrak{x}_{vv} \times \mathfrak{x}_w + \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vw}\\ \mathfrak{x}_{uw} &= \mathfrak{x}_{vw} \times \mathfrak{x}_w + \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{ww}.\end{aligned}$$

Also

$$\mathfrak{x}_{uu} = [\mathfrak{x}_{vv} \times \mathfrak{x}_u] \times \mathfrak{x}_u + [\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vu}] \times \mathfrak{x}_u + \mathfrak{x}_v \times [\mathfrak{x}_{vw} \times \mathfrak{x}_w] + \mathfrak{x}_v \times [\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{ww}]$$

oder

$$13)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x}_{uu} = {} & 2(\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_w)\mathfrak{x}_{vw} - \mathfrak{x}_u^2 \mathfrak{x}_{vv} - \mathfrak{x}_v^2 \mathfrak{x}_{ww} + 2\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{vw}\\ & + (\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_{ww} - \mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_{vw})\mathfrak{x}_v + (\mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_{vv} - \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_{vw})\mathfrak{x}_w.\end{aligned}$$

Dieser linearen partiellen Differentialgleichung müssen die rechtwinkligen Koordinaten einer räumlichen Potentialströmung genügen.

Wenn die beiden Scharen von Stromflächen aufeinander senkrecht stehen, reduziert sich die Gleichung auf

$$\mathfrak{x}_{uu} + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{x}_w^2 \mathfrak{x}_v) + \frac{\partial}{\partial w}(\mathfrak{x}_v^2 \mathfrak{x}_w) = 0.$$

In dieser Gleichung erkennt man die Laplacesche Gleichung wieder. Wenn man nämlich die Laplacesche Gleichung auf ein dreifach orthogonales Koordinatensystem transformiert, erhält man nach Jacobi[1]):

$$\Delta_2 \varphi = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\right].$$

[1]) Jacobi, Über eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ges. Werke 2. Bd., S. 191.

Dabei ist

$$\frac{1}{h_1^2} = \Sigma x_u^2 = \mathfrak{X}_u^2$$

$$\frac{1}{h_2^2} = \Sigma x_v^2 = \mathfrak{X}_v^2$$

$$\frac{1}{h_3^2} = \Sigma x_w^2 = \mathfrak{X}_w^2 \,.$$

Nach (11′) ist aber

$$\mathfrak{X}_u^2 = \mathfrak{X}_v^2 \mathfrak{X}_w^2 - (\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w)^2. \tag{11''}$$

Diese Gleichung, die neuerdings und in einfachster Weise aussagt, daß in allen Zellen, in welche die Strömung durch die Potentialflächen und zwei geeignete Scharen von Stromflächen geteilt wird, der Querschnitt der Länge proportional ist, geht über in

$$h_1 = h_2 h_3.$$

Also ist

$$\triangle_2 \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_u^2 \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathfrak{X}_w^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\mathfrak{X}_v^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w} \right) \right].$$

Es läßt sich nun vermuten, daß auch in dem allgemeineren Fall die Integrabilitätsbedingung nichts anderes als die Laplacesche Differentialgleichung ist. Um das zu zeigen, soll der Laplacesche Operator $\triangle_2 = \nabla \cdot \nabla$ auf ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Allgemeinheit zunächst nicht beschränkt sei, transformiert werden. Nach (10) läßt sich schreiben

$$\nabla \cdot \nabla = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Führt man die skalare Multiplikation aus, so hat man die Summe der Quadrate der drei ersten Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix}$$

zu bilden; dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß gleichzeitig die in dem ersten Faktor jeweils auftretenden Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial w}$$

auf den zweiten anzuwenden sind, die Faktoren also nicht vertauscht werden dürfen.

Es sei für einen Moment eine Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}$$

betrachtet. Die Quadratsumme der drei ersten Determinanten ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_1^3 a_{1i}^2 + a_1^2 & \Sigma a_{1i}a_{2i} + a_1 a_2 & \Sigma a_{1i}a_{3i} + a_1 a_3 \\ \Sigma a_{2i}a_{1i} + a_2 a_1 & \Sigma a_{2i}^2 + a_2^2 & \Sigma a_{2i}a_{3i} + a_2 a_3 \\ \Sigma a_{3i}a_{1i} + a_3 a_1 & \Sigma a_{3i}a_{2i} + a_3 a_2 & \Sigma a_{3i}^2 + a_3^2 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} \sum_1^3 a_{1i}^2 & \Sigma a_{1i}a_{2i} & \Sigma a_{1i}a_{3i} \\ \Sigma a_{2i}a_{1i} & \Sigma a_{2i}^2 & \Sigma a_{2i}a_{3i} \\ \Sigma a_{3i}a_{1i} & \Sigma a_{3i}a_{2i} & \Sigma a_{3i}^2 \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man die erste Determinante in eine Summe, so bleiben nur 3 von Null verschiedene Determinanten übrig, die nach Ausscheidung des Faktors a_1, a_2 oder a_3 eine Vertikalreihe gemeinsam haben; ihre Summe ist die vierreihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ \sum_1^3 a_{1i}^2 & \Sigma a_{1i}a_{2i} & \Sigma a_{1i}a_{3i} & a_1 \\ \Sigma a_{2i}a_{1i} & \Sigma a_{2i}^2 & \Sigma a_{2i}a_{3i} & a_2 \\ \Sigma a_{3i}a_{1i} & \Sigma a_{3i}a_{2i} & \Sigma a_{3i}^2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Die Anwendung dieser Entwickung ergibt

$$14) \quad \Delta_2 = \nabla \cdot \nabla = \begin{vmatrix} \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} & 0 \\ \mathfrak{x}_u^2 & \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v & \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_u & \mathfrak{x}_v^2 & \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ \mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_u & \mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_v & \mathfrak{x}_w^2 & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Damit ist die Laplacesche Gleichung auf beliebige schiefwinklige Koordinaten transformiert.

Bei der Entwicklung sind die in der ersten Zeile stehenden Differentialoperatoren auf ihre Unterdeterminanten zur Anwendung zu bringen; deshalb kann der in der ersten Zeile stehende Faktor $\frac{1}{D}$, nicht aber der in der letzten Kolonne auftretende Faktor $\frac{1}{D}$ vor die Determinante gesetzt werden.

Die Anwendung auf unser Problem ergibt:

$$\Delta_2 \mathfrak{X} = \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} & 0 \\ \mathfrak{X}_u^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} \\ 0 & \mathfrak{X}_v^2 & \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w & \frac{1}{\mathfrak{X}_v^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} \\ 0 & \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_v & \mathfrak{X}_w^2 & \frac{1}{\mathfrak{X}_w^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{X}_v^2 \mathfrak{X}_w^2 - (\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w)^2}{\mathfrak{X}_u^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathfrak{X}_u^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_u \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\mathfrak{X}_v^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v}\right)\right].$$

Unter Benützung von (11″) ergibt sich

$$\mathfrak{X}_u^2 \Delta_2 \mathfrak{X} = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u^2} + \mathfrak{X}_w^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial v^2} + \mathfrak{X}_v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial w^2} - 2\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial v \partial w} + (\mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_{vw} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_{ww})\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} + (\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_{vw} - \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_{vv})\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Integrabilitätsbedingung (13) nichts anderes als die Laplacesche Gleichung ist.

Es soll nun noch die Frage nach den dreifach orthogonalen Systemen von Potentialflächen aufgeworfen werden. Nach (11) müssen 3 Gleichungen bestehen:

$$\mathfrak{X}_u = g_1(v, w)\mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_w$$
$$\mathfrak{X}_v = g_2(w, u)\mathfrak{X}_w \times \mathfrak{X}_u$$
$$\mathfrak{X}_w = g_3(u, v)\mathfrak{X}_u \times \mathfrak{X}_v,$$

wo $g_1(v, w)$, $g_2(w, u)$, $g_3(u, v)$ noch zu bestimmmende Funktionen sind.

Dazu

$$\mathfrak{X}_u \cdot \mathfrak{X}_v = \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w = \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_u = 0.$$

Also

$$\mathfrak{X}_u^2 = g_1^2 \mathfrak{X}_v^2 \mathfrak{X}_w^2$$
$$\mathfrak{X}_v^2 = g_2^2 \mathfrak{X}_w^2 \mathfrak{X}_u^2$$
$$\mathfrak{X}_w^2 = g_3^2 \mathfrak{X}_u^2 \mathfrak{X}_v^2,$$

folglich ist

$$\mathfrak{X}_u^2 g_2 g_3 = 1$$
$$\mathfrak{X}_v^2 g_3 g_1 = 1$$
$$\mathfrak{X}_w^2 g_1 g_2 = 1.$$

Das Linienelement des Raumes wird also

$$ds^2 = \frac{du^2}{g_2(w,u)\,g_3(u,v)} + \frac{dv^2}{g_3(u,v)\,g_1(v,w)} + \frac{dw^2}{g_1(v,w)\,g_2(w,u)}.$$

Dabei müssen die Größen $\frac{1}{g_2 g_3}, \frac{1}{g_3 g_1}, \frac{1}{g_1 g_2}$ den 6 Lamé-schen Gleichungen[1]) genügen. Nach dem Ergebnis der früheren Untersuchung der dreifach orthogonalen Potentialsysteme mit Rotationssymmetrie ist es nicht unwahrscheinlich, daß das einzige bisher bekannte allgemeine System, das der konfokalen Flächen zweiter Ordnung, auch das einzig existierende ist.

6. Anhang. Eine Ableitung der Cayley-Darbouxschen Gleichung.

Die verwendeten Methoden sind zur Behandlung einer Frage, die mit der bisherigen Untersuchung nur in losem Zusammenhang steht, nämlich nach der Bedingung dafür, daß eine Flächenschar einem dreifachen Orthogonalsystem angehört, sehr geeignet. Zunächst müssen die drei Flächenscharen u, v, w den Gleichungen

I) $$\nabla v \cdot \nabla w = \nabla w \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \nabla v = 0$$

genügen. Durch Anwendung des Operators ∇ ergibt sich hieraus

15)
$$\nabla^2 u \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \nabla^2 v = 0$$
$$\nabla^2 v \cdot \nabla w + \nabla v \cdot \nabla^2 w = 0$$
$$\nabla^2 w \cdot \nabla u + \nabla w \cdot \nabla^2 u = 0.$$

[1]) Vgl. z. B. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1899, S. 484.

Da nach (1)

$$\nabla u = \varrho_1 \nabla v \times \nabla w, \quad \nabla v = \varrho_2 \nabla w \times \nabla u, \quad \nabla w = \varrho_3 \nabla u \times \nabla v$$

ist, nimmt die Bedingung (3 a) für das Vorhandensein einer gemeinsamen orthogonalen Schar die Form

$$\nabla^2 w \cdot \nabla v \cdot \nabla u = 0$$

an neben 5 weiteren Gleichungen, die sich aus ihr durch Vertauschung von u, v, w ergeben; davon sei eine hervorgehoben:

II) $$\nabla^2 u \cdot \nabla v \cdot \nabla w = 0.$$

Diese Gleichung hätte aus

I) $$\nabla v \cdot \nabla w = 0$$

auch durch Anwendung eines besonderen skalaren Operators

$$\nabla u \cdot \nabla$$

erhalten werden können. Bringt man ihn an irgend einem vektoriellen Produkt $\Phi \cdot \Psi$ an, so ist

$$\nabla u \cdot \nabla (\Phi \cdot \Psi) = (\nabla u \cdot \nabla \Phi) \cdot \Psi + \Phi \cdot (\nabla u \cdot \nabla \Psi).$$

Wenn er insbesondere auf einen Ausdruck zur Anwendung kommt, der v und w nur in der Verbindung ∇v und ∇w enthält, so wird wegen (15) die Ordnung der Differentialquotienten von v und w nicht über die erste erhöht[1]).

Aus (I) erhält man hienach

$$\nabla u \cdot \nabla (\nabla v \cdot \nabla w) = (\nabla u \cdot \nabla^2 v) \cdot \nabla w + \nabla v \cdot (\nabla u \cdot \nabla^2 w) = 0,$$

also nach (15)

$$- (\nabla v \cdot \nabla^2 u) \cdot \nabla w - \nabla v \cdot (\nabla^2 u \cdot \nabla w) = 0$$

oder

II) $$\nabla^2 u \cdot \nabla v \cdot \nabla w = 0,$$

[1]) Sachlich ist der Operator $\nabla u \cdot \nabla$ schon bei Cayley vorhanden. Seiner konsequenten Anwendung verdankt Darboux die große Vereinfachung der Ableitung, die er erzielt hat. Cayley, Sur la condition pour qu'une famille de surfaces donnée puisse faire partie d'un système triple orthogonal. Collected mathematical Papers Bd. VIII. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux, Chap. I.

wenn man berücksichtigt, daß Produkte aus einem Vektor und einer symmetrischen Dyadensumme kommutativ sind. Wendet man nun $\nabla u \cdot \nabla$ auf (II) an, so folgt

$$(\nabla u \cdot \nabla^3 u) \cdot \nabla v \cdot \nabla w + \nabla^2 u \cdot (\nabla u \cdot \nabla^2 v) \cdot \nabla w + \nabla^2 u \cdot \nabla v \cdot (\nabla u \cdot \nabla^2 u) = 0\,[1])$$

oder nach (15)

III) $$(\nabla u \cdot \nabla^3 u - 2\nabla^2 u \cdot \nabla^2 u) \cdot \nabla v \cdot \nabla w = 0.$$

Die 5 Gleichungen (I), (II), (III), von denen zwei in v bzw. w linear, die anderen bilinear sind, genügen zur Elimination von

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Es sind dieselben, die Darboux aufstellt. Um die Elimination wirklich auszuführen, stellen wir mit Darboux aus den zwei linearen Gleichungen

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0, \qquad \nabla u \cdot \nabla w = 0$$

drei bilineare her:

I') $$(\nabla u \cdot \nabla v)\nabla w + (\nabla u \cdot \nabla w)\nabla v = 0.$$

Ausführlich geschrieben haben wir nun folgende Gleichungen:

I) $$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

I') $$\begin{cases} 2u_1 v_1 w_1 + u_2(v_1 w_2 + v_2 w_1) + u_3(v_1 w_3 + v_3 w_1) = 0 \\ 2u_2 v_2 w_2 + u_1(v_1 w_2 + v_2 w_1) + u_3(v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0 \\ 2u_3 v_3 w_3 + u_1(v_1 w_3 + v_3 w_1) + u_2(v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0 \end{cases}$$

II) $$u_{11} v_1 w_1 + u_{22} v_2 w_2 + u_{33} v_3 w_3 + u_{12}(v_1 w_2 + v_2 w_1) + u_{13}(v_1 w_3 + v_3 w_1) + u_{23}(v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0$$

III) $$A_{11} v_1 w_1 + A_{22} v_2 w_2 + A_{33} v_3 w_3 + A_{12}(v_1 w_2 + v_2 w_1) + A_{13}(v_1 w_3 + v_3 w_1) + A_{23}(v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0.$$

[1]) $\nabla^3 u$ ist eine Triadensumme.

Das sind 6 homogene Gleichungen mit den Unbekannten

$$v_1 w_1, \quad v_2 w_2, \quad v_3 w_3, \quad v_1 w_2 + v_2 w_1, \quad v_1 w_3 + v_3 w_1, \quad v_2 w_3 + v_3 w_2 .$$

Dabei bedeuten die Indices an u, v, w Differentiationen. Die A_{ik} sind die Koeffizienten der Dyadensumme

$$\nabla u \cdot \nabla^3 u + \nabla^2 u \cdot \nabla^2 u,$$

also

$$A_{ik} = \sum_1^3{}^l (u_{ikl} u_l - u_{il} u_{kl}).$$

Die gesuchte Bedingung ergibt sich nun in der Form der bekannten Determinante

16)
$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{12} & A_{23} & A_{13} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{12} & u_{23} & u_{13} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Angenäherte Bestimmung entfernter Koeffizienten in Entwicklungen nach der mittleren Anomalie in der Theorie der Keplerschen Bewegung.

Von **R. Kleeberg.**

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 4. Juli 1914.

In einer in den Leipziger Berichten vom 31. Mai 1856 veröffentlichten und im 17. Band der Math. Annalen 1880 wiedergedruckten Abhandlung hat sich W. Scheibner damit befaßt, die asymptotischen Werte der Koeffizienten in den nach den cosinus bzw. den sinus der Vielfachen der mittleren Anomalie ζ fortschreitenden Entwicklungen der Ausdrücke

(a) $\qquad r^k \cdot \cos(l\,w + m\,u)$ und $r^k \cdot \sin(l\,w + m\,u)$

zu bestimmen, wo r der Radiusvektor, w die wahre und u die exzentrische Anomalie bedeutet, während k eine beliebige positive oder negative Zahl oder Null ist, l und m aber positive oder negative ganze Zahlen bedeuten oder eventuell auch der Null gleich sind.

Scheibner gelangt weniger mit Hilfe einer allgemeinen Methode als vielmehr mittels einiger Kunstgriffe zum Ziel, indem er durch imaginäre Substitutionen das Integral, welches die Koeffizienten darstellt, transformiert, unter dem Zeichen entwickelt und gliedweise integriert.

Im Jahre 1887 hat dann J. B. Flamme in seiner Pariser These[1]) dieselbe Aufgabe als Anwendung einer Erweiterung

[1]) Auch Bordeaux observ. ann. 2 (1887), p. 83 ff.

der von G. Darboux im J. de Math. (3) 4 (1878), Nr. 1, p. 9—20 auseinandergesetzten allgemeinen Methode zur angenäherten Berechnung von Funktionen großer Zahlen[1]) nochmals durchgeführt. Die Anwendung der Darbouxschen Methode erfordert aber eine recht komplizierte Rechenarbeit.

Auf einem einfacheren und direkteren Wege erhält man das Resultat, wenn man die von Cauchy in den C. R. 20 (1845), p. 691 = Oeuvres (1) 9, p. 84 und C. R. 38 (1854), p. 990 u. 1083 = Oeuvres (1) 12, p. 160—166 gegebene Ausdehnung der Laplaceschen Methode zur Berechnung von Funktionen großer Zahlen auf das komplexe Gebiet hier anwendet.

Auf diese Methode hat in letzter Zeit H. Burkhardt[2]) wieder aufmerksam gemacht, indem er sie zugleich näher auseinandersetzte und zur asymptotischen Darstellung der Koeffizienten der Mittelpunktsgleichung verwendete.

Auf die Aufforderung von Herrn Professor Burkhardt hin unternehme ich es in nachstehender Arbeit, die Cauchysche Methode auch auf die Entwicklung der allgemeineren Scheibnerschen Ausdrücke anzuwenden und behandle auch noch den Fall, daß die Exzentrizität der Einheit gleich wird, welcher bei Scheibner und Flamme nicht berücksichtigt worden ist. Es zeigt sich dabei mit, daß die Scheibnersche Schluß-

[1]) Eine Darstellung der Methode von Darboux und Flamme findet sich auch bei H. Burkhardt, Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen, Bd. 1, p. 177 ff. und bei H. v. Zeipel, Entwicklung der Störungsfunktion, Artikel 13 von Bd. VI_2 der Enzyklopä die d. math. Wissenschaften, p. 642.

[2]) Münchener Sitzungsb. d. math.-phys. Kl., Jahrg. 1914, p. 1 bis 11. Wie mir Herr Professor Burkhardt mitteilte, ist die in dem Nachtrag zu seiner Note durchgeführte Berechnung der Koeffizienten der Mittelpunktsgleichung für den Fall, daß die Exzentrizität ε der Einheit nahe kommt, nur unter der Voraussetzung gültig, daß der Zähler des betreffenden Integranden zwar für die angegebene Darstellung von ε entwickelt wird, daß aber im Nenner diese Darstellung nur für das dort explizite auftretende ε verwendet wird, während der Nenner als implizite Funktion von ε für den Fall $\varepsilon = 1$ entwickelt werden darf.

formel[1]) durch mehrere Fehler entstellt und daß auch das Resultat Flammes durch ein kleines Versehen nicht ganz richtig ist.

Zunächst will ich die Cauchysche Methode folgendermaßen kurz darstellen:

Ist der Wert des Integrals

$$(1) \qquad \int_W f(u)[\varphi(u)]^n du \qquad (u = x + iy)$$

für große Werte von n längs eines Weges W zu bestimmen, so verschiebt Cauchy den Integrationsweg nach einem äquivalenten, welcher durch einen Punkt $u_0 = x_0 + iy_0$ hindurchgeht, der als senkrechte Projektion eines Sattelpunktes der über der u-Ebene ausgebreiteten Fläche des absoluten Betrags von $\varphi(u)$ auf diese Ebene angesehen werden kann. Die Richtung, in welcher der Weg durch einen solchen Punkt u_0 hindurchläuft, muß so beschaffen sein, daß dort längs des Weges der absolute Betrag der Funktion $\varphi(u)$ die Eigenschaft eines Maximums besitzt.

Die Entwicklung der in einem solchen Punkte u_0 als analytisch vorausgesetzten Funktion $\varphi(u)$ lautet dort dann im allgemeinen

$$(2) \qquad \varphi(u) = \varphi(u_0) \cdot [1 - \alpha t^2 + \beta t^3 + \gamma t^4 + \cdots],$$

wo t den Parameter der Kurve bedeutet längs welcher integriert wird, und der reelle Teil des Koeffizienten α positiv ist.

Ferner ist das Produkt

$$(3) \qquad \varphi(u) \cdot e^{\alpha t^2} = \varphi(u_0) \cdot [1 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5 + \cdots].$$

Von der Funktion $f(u)$ sei vorausgesetzt, sie lasse sich in der Nähe des betrachteten Punktes u_0 längs des Integrationsweges in eine Reihe der Form entwickeln:

$$(4) \qquad f(u) = a \cdot t^\lambda \cdot [1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \cdots],$$

wo a einen konstanten Faktor und λ eine positive oder negative Zahl bedeutet oder gleich 0 ist.

[1]) Math. Ann. 17 (1880), p. 556. Bei uns die Reihe (7a).

Dann ist

$$\int_W f(u)[\varphi(u)]^n du = \varphi(u_0) \cdot a \cdot \int_{t=-t_1}^{t=+t_2} t^\lambda \cdot (1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \cdots)$$

$$\cdot (1 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5 + \cdots)^n \cdot e^{-n\alpha t^2} dt, \tag{5}$$

wo t_1 und t_2 positive Zahlen bedeuten.

Wird nun durch die Substitution

$$n t^2 = v^2 \tag{6}$$

eine neue Integrationsvariable v eingeführt und beachtet, daß für große Werte des Arguments n nur die Teile des Integrationsweges einen merklichen Beitrag zum Integral liefern, welche dem Punkt u_0 unmittelbar benachbart sind, so ergibt sich

$$\int_W f(u)[\varphi(u)]^n du \sim \frac{\varphi(u_0) \cdot a}{n^{\frac{\lambda+1}{2}}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} v^\lambda \cdot \Big[1 + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}[Av + a_1 v^3]$$

$$+ \frac{1}{n}[Bv^2 + (Aa_1 + a_2)v^4 + b_1 v^6] \tag{7}$$

$$+ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}[Cv^3 + (Ba_1 + Aa_2 + a_3)v^5 + (Ab_1 + b_2)v^7 + c_1 v^9]$$

$$+ \frac{1}{n^2}[Dv^4 + (Ca_1 + Ba_2 + Aa_3 + a_4)v^6 + (Bb_1 + Ab_2 + b_3)v^8$$

$$+ (Ac_1 + c_2)v^{10} + d_1 v^{12}] + \cdots\Big] \cdot e^{-\alpha v^2} dv.$$

Die Entwicklung in eine derartige nach Potenzen von $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ fortschreitende Reihe, wobei die Koeffizienten nur eine endliche Anzahl von Summanden enthalten, ist nur deshalb möglich, weil in der Reihe (3) die Glieder mit t und t^2 durch die getroffene Wahl des Integrationsweges und durch die Multiplikation mit $e^{\alpha t^2}$ entfernt worden sind. Durch gliedweise Integration von (7) erhält man dann die gesuchte asymptotische Darstellung der Koeffizienten.

1.

Die Koeffizienten in den Entwicklungen der Scheibnerschen Ausdrücke (a) bestimmen sich, wie man leicht erkennt, durch Auswertung des Integrals

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^k \cdot e^{(lw+mu)i} \cdot e^{-n\zeta i}\, d\zeta. \tag{8}$$

Durch Einführung der exzentrischen Anomalie u als Integrationsvariable mit Hilfe bekannter Formeln geht dieses Integral über in

$$J_n = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot(1+\beta^2)^{k+l}} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} (1-\beta e^{ui})^{k-l+1} \cdot (1-\beta e^{-ui})^{k+l+1}$$

$$\cdot e^{(m+l)ui} \cdot \left[e^{i(\sin\varphi \sin u - u)}\right]^n du; \tag{9}$$

dabei ist die numerische Exzentrizität $\varepsilon = \sin\varphi$ und $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \beta$ gesetzt worden. Die Integration findet in der $(u = x + iy)$-Ebene längs der reellen x-Achse statt. Dieser Integrationsweg W wird durch die Substitution

$$u = i\log\beta + t \tag{10}$$

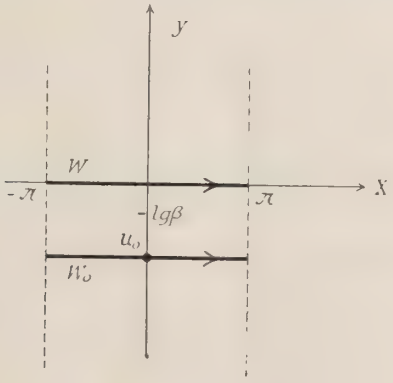


Fig. 1.

in einen äquivalenten, zu ihm parallelen übergeführt, welcher durch den Punkt $\log \beta$ des negativen Teiles der y-Achse hindurchgeht. Diesem Punkt entspricht nämlich, wie sich leicht zeigen läßt, ein Sattelpunkt der Fläche des absoluten Betrags der Funktion $\varphi(u)$:

$$z = e^{y - \sin x \cos x \mathfrak{Sin} y} \tag{11}$$

und dieser absolute Betrag nimmt längs des Integrationsweges W_0 in diesem Punkt ein Maximum an. [Außer diesem Sattelpunkt hat der zwischen den Parallelen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ liegende Flächenstreifen noch einen zweiten, der über dem Punkt $-\log \beta$ auf dem positiven Teil der y-Achse liegt. In diesem Punkt hat aber der längs eines zur x-Achse parallelen Weges genommene absolute Betrag von $\varphi(u)$ ein Minimum.]

Durch die Substitution:

$$z = e^{-iu} \tag{12}$$

geht der Integrationsweg W_0 in einen Kreis um den Anfangspunkt der z-Ebene mit dem Radius $r = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ über, welchen Kreis bereits Cauchy zur Integration bei Entwicklungen nach der mittleren Anomalie empfiehlt.

Nach Ausführung der Substitution wird das Integral

$$J_n = \frac{\beta^{n-(m+l)}}{2\pi(1+\beta^2)^{k+1}} \int_{-\pi}^{+\pi} (1-e^{ti})^{k-l+1} \cdot (1-\beta^2 e^{-ti})^{k+l+1} \cdot e^{(m+l)ti} \tag{13}$$

$$\cdot \left[e^{t(\sin\varphi \sin(t+i\lg\beta)-t)}\right]^n dt = \frac{\beta^{n-(m+l)}}{2\pi(1+\beta^2)^{k+1}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)[\Phi(t)]^n dt.$$

Durch Multiplikation der Reihenentwicklungen für $e^{(m+l)ti}$, für

$$(1-e^{ti})^{k-l+1} = (-ti)^{k-l+1} \cdot \left[1 + \frac{i}{2}(k-l+1)t - \frac{k-l+1}{24}(3(k-l)+4)t^2\right.$$

$$\left. - \frac{i(k+l+1)}{48}((k-l)(k-l+3)+2)t^3 + \cdots\right] \tag{14}$$

und für

$$(15)\quad (1-\beta^2\cdot e^{-ti})^{k+l+1} = (1-\beta^2)^{k+l+1}\cdot\Big[1+i\mu(k+l+1)t + \frac{k+l+1}{2}\mu(1-(k+l)\mu)t^2 - \frac{i(k+l+1)}{6}\mu(1-3(k+l)\mu+(k+l)(k+l-1)\mu^2)t^3 + \cdots\Big],$$

wo

$$(16)\qquad \mu = \frac{\beta^2}{1-\beta^2} = \frac{1-\cos\varphi}{2\cos\varphi}$$

gesetzt ist, ergibt sich für $f(t)$ die Darstellung:

$$(4\,a)\quad f(t) = (1-\beta^2)^{k+l+1}\cdot\left(\frac{t}{i}\right)^{k-l+1}\cdot[1+At+Bt^2+Ct^3+\cdots],$$

wo

$$A = i\left[m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}\right]$$

$$B = -\frac{1}{12}\left[2k+l+2+6m^2+\frac{6m(k+l+1)}{\cos\varphi}+\frac{3(k+l+1)(k+l)}{2\cos^2\varphi}\right]$$

$$C = -\frac{i}{12}\left[m(2k+l+2+2m^2)+\frac{(k+l+1)(2k+l+1+6m^2)}{2\cos\varphi} + \frac{3m(k+l+1)(k+l)}{2\cos^2\varphi}+\frac{(k+l+1)(k+l)(k+l-1)}{4\cos^3\varphi}\right].$$

Die Entwicklung der Funktion $\Phi(t)$:

$$(2\,a)\quad \Phi(t) = e^{\cos\varphi}\cdot\left[1-\frac{\cos\varphi}{2}t^2-\frac{i}{3!}t^3+\frac{\cos\varphi(1+3\cos\varphi)}{4!}t^4 + \frac{i(1+10\cos\varphi)}{5!}t^5-\frac{10+\cos\varphi+15\cos^2\varphi+15\cos^3\varphi}{6!}t^6+\cdots\right]$$

gibt mit derjenigen von $e^{\frac{\cos\varphi}{2}t^2}$ multipliziert die Darstellung:

$$(3\,a)\quad \begin{aligned}\Phi(t)\cdot e^{\frac{\cos\varphi}{2}t^2} &= 1+a_1t^3+a_2t^4+a_3t^5+a_4t^6+\cdots\\ &= 1-\frac{i}{6}t^3+\frac{\cos\varphi}{24}t^4+\frac{i}{120}t^5-\frac{10+\cos\varphi}{720}t^6+\cdots.\end{aligned}$$

Nach Vornahme der Substitution

$$n\frac{\cos\varphi}{2}t^2 = v^2 \tag{6a}$$

kann man jetzt unmittelbar die Reihe angeben, welche der unter (7) entspricht. Diese lautet, wenn wir uns damit begnügen, die Rechnung bis auf die Potenz $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ einschließlich zu treiben:

$$\begin{aligned}(7a)\quad & 1+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot i\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}\right)v-\frac{1}{3\cos\varphi}v^3\right]\\ &-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\left[\left[\frac{2k+l+2+6m^2}{6}+\frac{m(k+l+1)}{\cos\varphi}+\frac{(k+l+1)(k+l)}{4\cos^2\varphi}\right]v^2\right.\\ &\left.-\frac{2}{3\cos\varphi}\left[m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}+\frac{\cos\varphi}{4}\right]v^4+\frac{1}{9\cos^2\varphi}v^6\right]\\ &-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{i}{12}\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\left[m(2k+l+2+2m^2)+\frac{(k+l+1)(2k+l+1+6m^2)}{2\cos\varphi}\right.\right.\\ &\left.+\frac{3m(k+l+1)(k+l)}{2\cos^2\varphi}+\frac{(k+l+1)(k+l)(k+l-1)}{4\cos^3\varphi}\right]v^3\\ &-\left[\frac{m\cos\varphi}{2}+\frac{35k+25l+41+60m^2}{60}+\frac{m(k+l+1)}{\cos\varphi}+\frac{(k+l)(k+l+1)}{4\cos^2\varphi}\right]\frac{2}{\cos\varphi}\cdot v^5\\ &\left.+\left[\frac{\cos\varphi}{12}+\frac{1}{6}\left(m+\frac{k+l+1}{2\cos\varphi}\right)\right]\cdot\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^2\cdot v^7-\frac{1}{108}\left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^3\cdot v^9\right]+\cdots.\end{aligned}$$

Bei Scheibner sind die Koeffizienten von $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ durch mehrere Fehler entstellt. Flamme hat dies nicht bemerkt, weil er nur die beiden bei Scheibner richtigen ersten Bestandteile dieser Reihe mit seinen Resultaten verglichen hat[1]).

Mit Zuhilfenahme der Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\cdot\binom{v}{i}^r dv = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-r}{2}\right)},$$

[1]) Vgl. p. 7 der These.

wobei der längs der reellen Achse geführte Integrationsweg für $r < -1$ den Nullpunkt so umgeht, daß er den positiven Teil der rein imaginären Achse schneidet, läßt sich die gliedweise Integration ausführen, so daß man erhält:

$$(18)\qquad J_n = \frac{e^{n\cos\varphi}}{n^{\frac{k-l+2}{2}}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)^{n-m} \cdot (\operatorname{tg}\varphi)^{-l} \cdot (2\cdot\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}}$$

$$\left[\frac{1}{\Gamma\binom{l-k}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(m + \frac{k+2l}{3\cos\varphi}\right) \frac{1}{\Gamma\binom{l-k-1}{2}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{1}{\Gamma\binom{l-k-2}{2}}\right.$$

$$\cdot \left[\frac{k+l+4m^2}{4} + \frac{m[2(k+2l)-1]}{3\cos\varphi} + \frac{4(k+2l)(k+2l-2)-3(k+l)}{36\cos^2\varphi}\right]$$

$$- \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{2}{\cos\varphi}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{24\cdot\Gamma\binom{l-k-3}{2}} \cdot \left[m[3(k+l)-1+4m^2]\right.$$

$$+ \frac{10(2k+l+1+6m^2)(k+2l-1)-(k-l+5)(5k+10l-2)}{15\cos\varphi}$$

$$+ \frac{m[4(k+2l)^2-12(k+2l)-(3k+3l-5)]}{3\cos^2\varphi}$$

$$\left.\left. + \frac{4(k+2l)^3-33(k+2l)^2+(9l+59)(k+2l)-24l}{27\cos^3\varphi}\right] + \cdots\right].$$

Dieses Resultat stimmt mit dem von Flamme erhaltenen überein bis auf das Glied im Koeffizienten von $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, welches $\cos\varphi$ im Nenner enthält. Der Unterschied beruht auf einem Versehen, welches Flamme bei der Zusammenziehung der beiden ersten Integrale im Koeffizient von $u^3 i$ in der Formel (8) auf p. 57 seiner These unterlaufen ist. Daß das Resultat Flammes nicht richtig ist, erkennt man auch durch Annahme der speziellen Werte $k = l = m = 0$, für welche die einzelnen Glieder in den obigen eckigen Klammern für sich verschwinden müssen.

2.

Die gewonnene asymptotische Darstellung des Integrals J_n gilt nicht mehr, wenn die Exzentrizität ε der Einheit gleich ist.

Im Falle parabolischer Bahnen verliert zwar die mittlere Anomalie ihre astronomische Bedeutung, jedoch ist es vom rein mathematischen Standpunkt aus nicht uninteressant und für die Erkenntnis der Leistungsfähigkeit der Cauchyschen Methode jedenfalls wünschenswert zu wissen, wie sich das Verfahren in diesem Falle modifiziert.

Die beiden Sattelpunkte des von den Parallelen $x = -\pi$ und $x = +\pi$ eingefaßten Streifens der Fläche des absoluten Betrags von $\varphi(u)$:

$$z = e^{y - \cos x \operatorname{Sin} y} \tag{11a}$$

sind jetzt im Nullpunkt vereinigt, für welchen neben $\varphi'(u)$ auch $\varphi''(u)$ verschwindet, während längs der x-Achse der absolute Betrag von $\varphi(u)$ den konstanten Wert Eins annimmt. Der bisher angewandte Integrationsweg wird jetzt unbrauchbar.

Aus der Gestalt jener Fläche in der Nähe der Punkte $x = y = 0$, $z = 1$ ist zu ersehen, daß der absolute Betrag von $\varphi(u)$ längs eines jeden Strahles im Nullpunkt ein Maximum annimmt, der auf der Seite der negativen y verläuft, an der x-Achse im Nullpunkt reflektiert wird und mit dem Einfallslot einen Winkel von mindestens 30^0 bildet. Jeder dieser Strahlen liefert einen brauchbaren Integrationsweg. Welcher von ihnen zu der bequemsten Rechnung führt, zeigt die Entwicklung der Funktion $\varphi(u)$ in der Nähe des Anfangspunktes. Längs eines solchen Weges ist

$$u = \lambda \cdot t$$

und

$$\varphi(t) = e^{i(\sin \lambda t - \lambda t)} = 1 - i\frac{\lambda^3 t^3}{6} + \frac{i}{120}\lambda^5 t^5 + \frac{1}{72}\lambda^6 t^6 \pm \cdots.$$

Der reelle Teil des ersten von Null verschiedenen Koeffizienten in der Entwicklung von $\varphi(t)$ nach Potenzen von t,

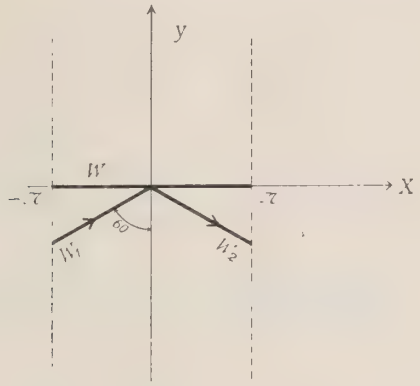


Fig. 2.

also hier von t^3, muß, soll die Cauchysche Methode angewendet werden können, negativ sein. Die bequemste Rechnung wird also durch die Annahmen

$$\lambda_1 = e^{-\frac{5\pi i}{6}} \text{ längs des einfallenden Strahls } W_1$$

$$\lambda_2 = e^{-\frac{\pi i}{6}} \text{ längs des reflektierten Strahls } W_2$$

erreicht.

Durch die Abbildung (12) der u-Ebene auf eine z-Ebene gehen die auf diese Weise bestimmten Geradenstücke in jene zwei Bogen logarithmischer Spiralen in der z-Ebene über, welche Cauchy als Integrationsweg für den Fall $\varepsilon = 1$ empfohlen hat[1]).

Die Rechnung gestaltet sich nun analog der im Fall $\varepsilon \neq 1$. Das Integral

$$J_n = \frac{1}{2^{k+2} \cdot \pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (1 - e^{ui})^{k-l+1} \cdot (1 - e^{-ui})^{k+l+1} \cdot e^{(m+l)ui} \cdot [e^{i(\sin u - u)}]^n \, du$$

spaltet sich in zwei Teile:

[1]) Man vergleiche die Ausführungen darüber von H. Burkhardt, a. a. O., p. 8.

$$J_n = \frac{1}{2^{k+2} \cdot \pi} \cdot \left[\int_0^{t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} (-iu_1)^{k-l+1} \cdot (iu_1)^{k+l+1} \right.$$

$$\cdot \left[1 + imu_1 - \frac{1}{12}(6m^2+k+1)u_1^2 - \frac{mi}{12}(2m^2+k+1)u_1^3 \pm \cdots \right]$$

$$\left. \cdot \left[1 - \frac{iu_1^3}{6} + \frac{iu_1^5}{120} + \frac{u_1^6}{72} \pm \cdots \right]^n du_1 + \int_0^{t=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \{u_2\} \cdot du_2 \right].$$

Dabei ist

$$u_1 = \lambda_1 t = e^{-\frac{5\pi i}{6} \cdot t}$$

$$u_2 = \lambda_2 t = e^{-\frac{\pi i}{6} t}.$$

Durch Multiplikation der Reihen in den zweiten eckigen Klammern in den beiden Integranden mit den Reihen für $e^{i\frac{u_1^3}{6}}$ bzw. für $e^{i\frac{u_2^3}{6}}$ ergibt sich dann weiter nach Vornahme der Substitution:

(6 b) $$\frac{n}{6} t^3 = v^3$$

$$J_n = \binom{6}{n}^{\frac{2k+3}{3}} \cdot \frac{1}{2^{k+2} \cdot \pi} \cdot \left[\int_0^{v=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{6}}} (-iw_1)^{k-l+1} \cdot (iw_1)^{k+l+1} \right.$$

$$\cdot \left[1 + \binom{6}{n}^{\frac{1}{3}} imw_1 - \binom{6}{n}^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{6m^2+k+1}{12} w_1^2 - \frac{6}{n} \cdot \frac{mi}{12}(2m^2+k+1)w_1^3 \pm \cdots \right]$$

$$\left. \cdot \left[1 + \binom{6}{n}^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{i}{120} \cdot w_1^5 + \cdots \right]^n \cdot e^{-v^3} dw_1 + \int_0^{v=\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{n}{6}}} \{w_2\} e^{-v^3} dw_2 \right];$$

dabei bedeutet

$$w_1 = \lambda_1 v$$

$$w_2 = \lambda_2 v.$$

Nun ist:

$$\left[1+A\frac{v}{n^{\frac{1}{3}}}+B\frac{v^2}{n^{\frac{2}{3}}}+C\frac{v^3}{n}+\cdots\right]\cdot\left[1+a_1\frac{v^5}{n^{\frac{5}{3}}}+a_2\frac{v^6}{n^2}+\cdots\right]^n$$
$$=1+\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}Av+\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\cdot[Bv^2+a_1v^5]+\frac{1}{n}\cdot[Cv^3+(a_2+a_1A)v^6]$$
$$+\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}\cdot\left[Dv^4+(a_3+a_2A+a_1B)v^7+\frac{a_1^2}{2}v^{10}\right]+\cdots.$$

Wird diese Umformung auf die Produkte der beiden Reihen in jedem der beiden Integrale in dem Ausdrucke für J_n angewendet, so nimmt dieser die Form an:

$$J_n=\binom{6}{n}^{\frac{2k+3}{3}}\cdot\frac{(-1)^l}{2^{k+2}\cdot\pi}\cdot\left[-e^{-\frac{5\pi i}{3}(k+1)}\cdot\lambda_1\int_0^\infty v^{2k+2}\cdot\left[1+\binom{6}{n}^{\frac{1}{3}}\cdot imw_1\right.\right.$$
$$-\binom{6}{n}^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left[(6m^2+k+1)w_1^2-\frac{i\cdot 3}{5}w_1^5\right]$$
$$\left.-\binom{6}{n}\cdot\frac{m}{12}\cdot\left[i(2m^2+k+1)w_1^3+\frac{3}{5}w_1^6\right]+\cdots\right]e^{-v^3}\cdot dv$$
$$\left.+e^{\frac{5\pi i}{3}(k+1)}\cdot\lambda_2\int_0^\infty v^{2k+2}\{w_2\}e^{-v^3}dv\right].$$

Durch gliedweise Integration vermittelst der Formel

$$\int_0^\infty t^r e^{-t^3}dt=\frac{1}{3}\Gamma\binom{r+1}{3}$$

und Zusammenziehung ergibt sich dann für J_n der gesuchte Ausdruck:

$$J_n=\binom{6}{n}^{\frac{2k+3}{3}}\frac{(-1)^l}{2^{k+1}\cdot 3\cdot\pi}\cdot\left[\sin\frac{5\pi}{3}k\cdot\Gamma\binom{2k+3}{3}\right.$$
$$+\binom{6}{n}^{\frac{1}{3}}\cdot m\cdot\sin\frac{5\pi}{3}(k+1)\cdot\Gamma\binom{2k+4}{3}$$
$$+\binom{6}{n}^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{10m^2+k}{20}\sin\frac{5\pi}{3}(k+2)\Gamma\binom{2k+5}{3}$$
$$\left.-\frac{1}{n}\cdot\frac{m(10m^2+3k-1)}{10}\sin\frac{5\pi}{3}k\Gamma\binom{2k+6}{3}+\cdots\right],$$

welcher bei Benutzung der Relation:

$$\Gamma(\mu)\cdot\Gamma(1-\mu)=\frac{\pi}{\sin\mu\pi}$$

auch in der Form geschrieben werden kann

$$J_n=\binom{6}{n}^{\frac{2k+3}{3}}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{3\cdot 2^{k+1}}\cdot\left[\begin{matrix}\sin\frac{5k\pi}{3}\\ \sin\frac{2k\pi}{3}\end{matrix}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k}{3}\right)}\right.$$

$$+\binom{6}{n}^{\frac{1}{3}}\cdot m\cdot\frac{\sin\frac{5k+1}{3}\pi}{\sin\frac{2k+1}{3}\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k-1}{3}\right)}$$

$$+\binom{6}{n}^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{10m^2+k}{20}\cdot\frac{\sin\frac{5k+2}{3}\pi}{\sin\frac{2k+2}{3}\pi}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k-2}{3}\right)}$$

$$\left.+\frac{1}{n}\cdot\frac{m(10m^2+3k-1)}{10}\cdot\frac{\sin\frac{5k\pi}{3}}{\sin\frac{2k\pi}{3}}\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{-2k-3}{3}\right)}+\cdots\right].$$

Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen.

Von **J. Stark** und **H. Lunelund.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Inhalt: 1. Aufgabe und Methoden. 2. Fehlen der Polarisation bei den Bandenlinien in der negativen Glimmschicht und in den Kanalstrahlen und bei den Serienlinien in den Kanalstrahlen. 3. Polarisation der bewegten Serienlinien in den Kanalstrahlen, erste Versuchsreihe. 4. Polarisation der bewegten Serienlinien in den Kanalstrahlen, zweite Versuchsreihe. 5. Resultate und ihre Deutung.

1. Aufgabe und Methoden.

Es ist bereits durch qualitative Beobachtungen[1]) festgestellt worden, daß die Lichtemission der Wasserstoff-Kanalstrahlen teilweise polarisiert ist, daß nämlich in einer Sehachse senkrecht zur Kanalstrahlenachse die Lichtschwingungen (J_p) parallel der Achse der Kanalstrahlen etwas intensiver sind als die Schwingungen (J_s) senkrecht dazu. Diese Beobachtungen wurden an der Gesamtemission der Kanalstrahlen in reinem Wasserstoff angestellt; diese besteht zwar zum größten Teil aus der bewegten Intensität der H-Serienlinien, indes ist in ihr doch auch ruhende Intensität der Serienlinien und außerdem Intensität der Bandenlinien in merklichem Betrage enthalten. Es blieb somit die Aufgabe übrig, die Serien- und Bandenlinien getrennt auf Polarisation in den Kanalstrahlen zu untersuchen; weiter mußte die qualitative Feststellung des Vorhandenseins einer teilweisen Polarisation durch die quantita-

[1]) J. Stark, Verh. d. D. Phys. Ges. S. 104. 1908; J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43, 1002, 1914.

tive Ermittlung des Verhältnisses $\frac{J_p}{J_s}$ ergänzt oder wenigstens eine untere Grenze dieses Verhältnisses bestimmt werden. Zur Lösung dieser Aufgabe bedienten wir uns folgender Methode.

Die Achse des Spaltrohres eines Spektrographen wird senkrecht zur Achse eines Kanalstrahlenbündels so aufgestellt, daß sie diese 2—3 cm hinter der Kathode schneidet, durch deren Löcher die Kanalstrahlen austreten. Mittels eines Objektivs und einer Wollaston-Platte werden von dem Kanalstrahlenbündel zwei senkrecht zueinander polarisierte Bilder so auf den Spektrographenspalt entworfen, daß die Schwingungen in dem einen Bild parallel, diejenigen in dem anderen senkrecht zu den Kanalstrahlen erfolgen. Man erhält somit auf der photographischen Platte von einer jeden Linie, welche die Kanalstrahlen emittieren, übereinander zwei Bilder, ein p- und ein s-Bild. Aus deren Schwärzungen S_p und S_s dieser Bilder läßt sich zunächst ihr Intensitätsverhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s$ auf der photographischen Platte in folgender Weise ermitteln.

Bei gleicher Belichtungsdauer gilt innerhalb des Gebietes der Normalschwärzung die Beziehung[1]) $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s = e^{\frac{S_p - S_s}{m}}$. Ermittelt man also m, so läßt sich das auf der Platte erscheinende („scheinbare") Intensitätsverhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s$ berechnen. Nun ist indes das scheinbare Intensitätsverhältnis im allgemeinen nicht gleich dem „wirklichen" Intensitätsverhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ der p- und s-Schwingungen, welche von der untersuchten Lichtquelle, in unserem Falle von den Kanalstrahlen, emittiert werden. Selbst wenn nämlich $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = 1$ ist, wird das scheinbare Intensitätsverhältnis im allgemeinen von 1 verschieden sein, indem $(J_p)_w$ durch die Optik der Beobachtung, sei es durch die Brechung

[1]) Vgl. J. Stark, Ann. d. Phys. 35, 461, 1911.

an der Glaswand der Kanalstrahlenröhre, an der Wollaston-Platte, an den Objektiven, an den verwendeten Prismen, durch Polarisation am Spalt oder am verwendeten Gitter größer oder kleiner als $(J_s)_w$ gemacht wird. Dieses „optische" Intensitätsverhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_0$ wird gleich dem scheinbaren Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s$, wenn die Lichtquelle oder die zu untersuchende Spektrallinie so gewählt wird, daß $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = 1$ ist. Hat man so für eine optische Anordnung einmal die Konstante $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_0$ bestimmt, so kann man aus dem scheinbaren Verhältnis das wahre Verhältnis für eine andere Emission berechnen, deren Polarisation untersucht werden soll. Es ist nämlich, wie leicht zu sehen ist,

$$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = \left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s \quad \left(\frac{J_p}{J_s}\right)_0.$$

Es sei $(S_p - S_s)_s$ bzw. $(S_p - S_s)_0$ die Schwärzungsdifferenz der Bilder, welche das scheinbare bzw. das optische Intensitätsverhältnis liefern. Es ist dann

$$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = e^{\frac{(S_p - S_s)_s - (S_p - S_s)_0}{m}}.$$

Die strenge Voraussetzung der vorstehenden Methode ist, daß das Licht, welches $(S_p - S_s)_0$ liefert, genau denselben optischen Weg zurücklegt wie das zu untersuchende Licht, welches die Differenz $(S_p - S_s)_s$ ergibt. Dieser Voraussetzung wurde in der vorliegenden Untersuchung dadurch genügt, daß bei unveränderter Optik an dem Ort in der Röhre, woher die untersuchte Lichtemission der Kanalstrahlen kam, nach oder vor deren Untersuchung die negative Glimmschicht des Glimmstromes hergestellt wurde. In ihr wird die Emission der Bandenlinien überwiegend durch die nach allen Richtungen laufenden zerstreuten oder sekundären Kathodenstrahlen erzeugt; wie darum zu erwarten ist und die qualitative Untersuchung bestätigt, ist in ihr die Lichtemission der Banden- und der Serienlinien unpolarisiert.

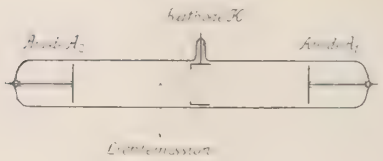


Fig. 1.

Demgemäß haben wir der von uns verwendeten Kanalstrahlenröhre die aus Fig. 1 ersichtliche Form gegeben. Einer Kathode K in der Röhrenmitte ist an jedem Röhrenende je eine Anode A_1 und A_2 gegenübergestellt. 2—3 cm auf der Rückseite von K befindet sich der Ort der spektrographisch untersuchten Lichtemission. Wurde A_1 als Anode des Glimmstromes benutzt, so trat an diesem Ort die Lichtemission der Kanalstrahlen auf: wurde dagegen A_2 als Anode benutzt, so trat an ihre Stelle die Lichtemission der negativen Glimmschicht (Kathodenstrahlen) bei ziemlich hohem Gasdruck. Um nur Lichtemission in der Nähe der Röhrenachse zu untersuchen, ferner um die p- und s-Bilder auf dem Spalt und auf der photographischen Platte zu trennen, schoben wir über den Teil $A_2 - K$ der Röhre einen Zylinder aus Aluminiumblech, in welchem ein 2 mm weiter Schlitz als Austrittsöffnung für die Lichtemission angebracht war.

Nachdem somit die Grundzüge der von uns verwendeten Methode angegeben sind, seien noch folgende Einzelheiten erwähnt.

Der Glimmstrom in der Kanalstrahlenröhre wurde mit Gleichspannung aus einer Dynamo und einer Batterie hergestellt. Der die Kanalstrahlen erzeugende Kathodenfall wurde an einem Elektrometer ständig kontrolliert und bis auf 10% konstant gehalten. Vor den spektrographischen Aufnahmen wurde die Röhre durch Strombetrieb unter Wasserstoffspülung gereinigt; während der Aufnahmen wurde darauf geachtet, daß die Wasserstoffüllung rein blieb, daß also die Kanalstrahlen die ihnen eigentümliche rote Farbe beibehielten. Reinheit der Wasserstoffüllung ist, wie weiter unten begründet ist, eine wichtige Voraussetzung für das positive Resultat der vorliegenden Untersuchungen.

Der Intensitätsexponent m wurde nach einer an früherer Stelle[1]) beschriebenen Methode in folgender Weise bestimmt. Es wurde ein Stück einer photographischen Platte ausgewählt, auf dem die eine Hälfte intensiver geschwärzt war als die andere; zwei anfänglich gleich intensive Lichtbündel nahmen somit beim Durchgang durch die zwei Hälften oder Felder dieser Platte („Doppelfeld") ein von 1 verschiedenes Intensitätsverhältnis an. Dieses Verhältnis bestimmten wir für das von uns verwendete Doppelfeld zu 1,48. Ein solches Doppelfeld wurde auf dem Spektrographenspalt zum Zweck der Bestimmung des Exponenten m befestigt, so daß jede Spalthälfte von je einem Feld bedeckt war, also auf der photographischen Platte die Hälften der Spektrallinien von Seite einer dem Spalt entlang gleich intensiven Lichtquelle eine Schwärzungsdifferenz $S_1 - S_2$ zeigten. Es konnte dann m aus der Formel

$$1{,}48 = e^{\frac{S_1 - S_2}{m}}$$

berechnet werden.

In dieser Weise wurde für eine jede Platte, von welcher das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ für die Kanalstrahlen abgenommen werden sollte, der Exponent m bestimmt. Es wurde also auf eine und dieselbe Platte mindestens eine Aufnahme von der Lichtemission der Kanalstrahlen gemacht, eine Aufnahme von der Emission der negativen Glimmschicht durch den Schlitz in dem abdeckenden Blechzylinder und mindestens eine Aufnahme von der negativen Glimmschicht ohne diesen abdeckenden Zylinder oder auch eine Aufnahme von einer H-Geißlerröhre durch das Doppelfeld auf dem Spalt. In einer ersten Versuchsreihe wurden die Intensitäten so ausprobiert, daß die drei Aufnahmen bei gleicher Belichtungsdauer nicht bloß normal, sondern angenähert gleich geschwärzte Spektrallinien für den Vergleich lieferten. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich die vorstehende photometrische Methode genau. Nachdem wir in dieser Versuchs-

[1]) J. Stark, Ann. d. Phys. 35, 461, 1911.

reihe außer jeden Zweifel gesetzt hatten, daß $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_u$ für die Kanalstrahlen größer als 1 ist, haben wir in einer zweiten Versuchsreihe, welche in erster Linie dem Vergleich von H_α und H_β galt, auch solchen Aufnahmen auf einer Platte, deren Belichtungszeiten verschieden waren, den gleichen Intensitätsexponenten m zugewiesen. Der damit gemachte Fehler blieb aber sehr klein, da ja m innerhalb des Gebietes der Normalschwärzung sich noch nicht merklich ändert, wenn die Intensität im Verhältnis 1 : 20 sich ändert.

Die erste Versuchsreihe wurde mit Agfa-Platten (Extra rapid) durchgeführt. Da m von Platte zu Platte derselben Emulsion und auch für die Linien H_β und H_γ nicht merklich innerhalb der Versuchsfehler verschieden war, so haben wir den Mittelwert von m als allen Bestimmungen gebildet und mit ihm die Intensitätsverhältnisse $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ berechnet. Dieser Mittelwert m betrug 0,64.

Die zweite Versuchsreihe haben wir mit der rotempfindlichen Platte von Wratten & Wainright (Spektralplatte) durchgeführt. Auch bei ihr ergaben sich nur wenig verschiedene Werte des Exponenten m für H_α, H_β und H_γ; wir haben darum ebenfalls den Mittelwert $m = 0{,}67$ für die drei Linien benützt.

Die erste und die zweite Versuchsreihe wurde mit einem Einprismenspektrographen mit Objektiven von 30 cm Brennweite durchgeführt, die erste Reihe außerdem gleichzeitig mit einem Plangitterspektrographen, dessen Objektive 60 bzw. 50 cm Brennweite haben. Die Spaltrohre der zwei Spektrographen waren hierbei koaxial und einander zugewandt. Die Resultate mit den zwei Spektrographen sollten nämlich einander kontrollieren; bei dem einen war das optische Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_0$ größer, bei dem anderen kleiner als 1. In der zweiten Versuchsreihe wurden die Bedingungen so gewählt, daß $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_0$ nur sehr wenig von 1 verschieden war.

2. Fehlen der Polarisation bei den Bandenlinien in der negativen Glimmschicht und in den Kanalstrahlen und bei den Serienlinien in der negativen Glimmschicht.

Das Fehlen der Polarisation der Bandenlinien in der negativen Glimmschicht erklärt sich ohne weiteres aus der ungeordneten Verteilung der Geschwindigkeiten der zerstreuten oder sekundären Kathodenstrahlen, welche die Emission in der negativen Glimmschicht veranlassen. Dagegen erschien es nicht als ausgeschlossen, daß die geordnet verlaufenden Kanalstrahlen eine teilweise Polarisation der Bandenlinien bewirken, welche sie an ruhenden Gasmolekülen zur Emission bringen. Um diesen Punkt zu prüfen, haben wir nach der oben angegebenen Methode das *H*-Bandenspektrum von Seite der negativen Glimmschicht und von Seite der Kanalstrahlen auf dieselbe Platte aufgenommen. In Tabelle I sind für mehrere Bandenlinien die Schwärzungen der *p*- und *s*-Bilder in den zwei Aufnahmen zusammengestellt.

Tabelle I.

Lichtquelle	Wellenlänge	S_s	S_p	$S_s - S_p$	Mittelwert
Negative Glimmschicht	4723 Å	1,23	1,19	0,04	0,03
	4634	2,22	2,18	0,04	
	4583	1,73	1,70	0,03	
	4499	1,23	1,20	0,03	
	4177	1,59	1,57	0,02	
Kanalstrahlen 3300 Volt	4634	1,97	1,94	0,03	0,03
	4583	1,63	1,57	0,06	
	4177	1,34	1,34	0,00	

Wie aus ihr hervorgeht, ist die Schwärzungsdifferenz $S_p - S_s$ der Bandenlinien aus den Kanalstrahlen dieselbe wie derjenigen aus der negativen Glimmschicht. Das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_s$ hat also hier denselben Wert wie dort und, da $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ für die negative

Glimmschicht den Wert 1 hat, so hat dieses wirkliche Intensitätsverhältnis der p- und s-Schwingungen der Bandenlinien in den Kanalstrahlen ebenfalls den Wert 1; die Emission der H-Bandenlinien in den Kanalstrahlen ist also unpolarisiert.

Gemäß der ungeordneten Verteilung der Kathodenstrahl-Geschwindigkeiten in der negativen Glimmschicht ist von vornherein zu erwarten, daß in dieser Strompartie die Emission der Serienlinien ebenso unpolarisiert ist wie diejenige der Bandenlinien. Immerhin hielten wir es für notwendig, auch diesen Punkt experimentell zu prüfen. Zu diesem Zweck nahmen wir auf eine und dieselbe Platte die Lichtemission der negativen Glimmschicht für verschiedene Belichtungszeiten auf, um für den Vergleich angenähert gleiche normale Schwärzungen von Banden- und Serienlinien zu erhalten. In Tabelle II sind Schwärzungen für mehrere Linien zusammengestellt. Wie aus ihr zu ersehen ist, ist die Schwärzungsdifferenz der p- und

Tabelle II.

Linienart	Wellenlänge	Belichtungszeit in Min.	S_s	S_p	$S_s - S_p$	Mittelwert
Serienlinien	H_β 4861 Å	15	1,88	1,85	0,03	0,025
	H_γ 4341		1,56	1,54	0,02	
Bandenlinien	4634	15	1,95	1,91	0,04	0,038
	4177		1,18	1,14	0,04	
	4723	30	1,68	1,66	0,02	
	4583		1,78	1,73	0,05	
	4182		1,74	1,70	0,04	

s-Bilder innerhalb der Versuchsfehler für die Serienlinien dieselbe wie für die Bandenlinien. Da diese unpolarisiert sind, so ist somit auch die Lichtemission der Serienlinien in der negativen Glimmschicht unpolarisiert.

3. Polarisation der bewegten Serienlinien in den Kanalstrahlen, erste Versuchsreihe.

Bekanntlich kommt in den Kanalstrahlen, wenn sie in dem eigenen Gase verlaufen, gleichzeitig ruhende und bewegte Intensität ihrer Serienlinien zur Emission; diese von Seite der Kanalstrahlen selber, jene von Seite der von ihnen gestoßenen ruhenden Gasteilchen. Beobachtet man die Lichtemission der Kanalstrahlen in einer Achse senkrecht zu ihrer Geschwindigkeit, so überlagern sich in den Serienlinien die ruhende und die bewegte Intensität.

Bei Untersuchung der Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen ist diese Überlagerung zu beachten und zu fragen, in welchem Betrage die ruhende und die bewegte Intensität der Serienlinien für sich polarisiert sind. Zu diesem Zweck sind Bedingungen herzustellen, in denen die Serienlinien eines Elementes nur in bewegter oder nur in ruhender Intensität in den Kanalstrahlen erscheinen. Für ein Element schwerer als 12 läßt sich überwiegend nur bewegte Intensität der Serienlinien in den Kanalstrahlen erzielen, indem man es in sehr geringem Betrage einem leichten Gas wie Wasserstoff oder Helium beimischt. Eine derartige Untersuchung nach der hier benützten Methode erscheint wünschenswert. Überwiegend nur die ruhende Intensität tritt bei den Serienlinien reinen Heliums in den Kanalstrahlen auf. Für diesen Fall nun hat die Untersuchung der Gesamtemission (Überwiegen der gelben Linie bei Beobachtung mit dem Auge) ergeben, daß die Emission der ruhenden *He*-Linien in den Kanalstrahlen nicht merklich polarisiert ist. Wie gelegentlich der vorliegenden Untersuchung an der *Hg*-Linie λ 4359 Å festgestellt werden konnte, ist ihre Emission in den *H*-Kanalstrahlen ebenfalls nicht merklich polarisiert; da sie unter den von uns benutzten Bedingungen überwiegend in ruhender Intensität herauskommt, so haben wir in ihr den zweiten Fall, daß die ruhende Intensität von Serienlinien in den Kanalstrahlen unpolarisiert ist. Und so ist wahrscheinlich, daß allgemein die Emission der ruhenden

Serienlinien in den Kanalstrahlen unpolarisiert ist. Eine weitere experimentelle Prüfung dieses Satzes ist freilich wünschenswert, für das Folgende sei seine Richtigkeit vorausgesetzt.

Verlaufen Wasserstoff-Kanalstrahlen in reinem Wasserstoff, so ist die ruhende Intensität ihrer Serienlinien zwar sehr viel kleiner als die bewegte Intensität, immerhin ist sie aber neben dieser nicht zu vernachlässigen. Ermittelt man darum nach der oben angegebenen Methode das wirkliche Intensitätsverhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ für die Kanalstrahlen in reinem Wasserstoff, so ist dieses gleich dem Verhältnis $\frac{J^{(r)} + J_p^{(b)}}{J^{(r)} + J_s^{(b)}}$, worin $J^{(r)}$ die ruhende, $J^{(b)}$ die bewegte Intensität bedeutet. Es ist somit das Verhältnis $\frac{J_p^{(b)}}{J_s^{(b)}}$, welches die Polarisation der bewegten Intensität mißt, größer als das der Beobachtung zugängliche Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$; dieses stellt nur eine untere Grenze für jenes dar.

Die vorstehenden Hinweise lassen die große Bedeutung des Verhältnisses von bewegter zu ruhender Intensität für die Untersuchung der Polarisation der Emission der Kanalstrahlen ins Licht treten. Wählt man absichtlich oder zufällig die Versuchsbedingungen so, daß in der Lichtemission der Kanalstrahlen die Intensität des Bandenspektrums und die ruhende Intensität der Serienlinien neben deren bewegter Intensität sehr groß ist, so wird bei Untersuchung der Gesamtemission auch bei Anwendung einer sehr empfindlichen Methode der Betrag der Polarisation unmerklich klein sich ergeben. Ferner erkennt man, daß die Reinheit eines Füllgases oder das Mischungsverhältnis verschiedener Gase von empfindlichem Einfluß auf das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ ist, welches die hier angewandte Methode liefert. So weiß man, daß die ruhende Intensität der Serienlinien des Wasserstoffs durch die Beimischung schwerer Gase im Verhältnis zur bewegten Intensität beträchtlich verstärkt

wird. Um also $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ möglichst in Annäherung an $\frac{J_p^{(b)}}{J_s^{(b)}}$ bei den Serienlinien des Wasserstoffs zu erhalten, hat man für große Reinheit der Wasserstoffüllung Sorge zu tragen.

Die Ungleichung $\frac{J_p^{(b)}}{J_s^{(b)}} > \left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ ist ein Umstand, welcher den quantitativen Charakter der vorliegenden Untersuchung beeinträchtigt. Dazu tritt noch ein weiterer Umstand. Es kommt ja in einem Kanalstrahlenbündel nicht eine einzige Geschwindigkeit für alle Teilchen, sondern eine ganze Reihe von Geschwindigkeiten vor. Wenn also, wie wahrscheinlich ist, $\frac{J_p^{(b)}}{J_s^{(b)}}$ eine Funktion der Geschwindigkeit ist, so gibt das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ nur eine untere Grenze des Durchschnittswertes der Verhältnisse $\frac{J_p^{(b)}}{J_s^{(b)}}$ für eine Reihe von Geschwindigkeiten.

Obgleich gemäß diesen Überlegungen das experimentell zugängliche Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ nur einen qualitativen Wert für die Beurteilung der Polarisation bewegter Serienlinien hat, so ist der experimentellen Feststellung dieser Erscheinung durch Angabe eines unteren Grenzwertes doch eine erhebliche Bedeutung beizumessen, da sie theoretisch interessante Gesichtspunkte liefert.

In den Tabellen III und IV sind die Resultate mitgeteilt, welche für die Linien H_β und H_γ bei Verwendung von Agfa-Platten ($m = 0{,}64$) hinsichtlich des wirklichen Intensitätsverhältnisses $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ in den Kanalstrahlen (letzte Spalte) erhalten wurden. Um ein genaueres Urteil über die den Endwerten zu Grunde liegenden Schwärzungsmessungen zu erlauben, sind diese ausführlich mitgeteilt. Unterhalb der von den Kanalstrahlen beobachteten Serienlinien H_β und H_γ sind in der dritten Spalte Bandenlinien angeführt, die aus der negativen Glimm-

Tabelle III.

Kathodenfall, Volt	Spektrograph, Belichtungszeit	Linie	S_p	S_s	$S_p - S_s$	$S_p - S_s$ Mittel	$(S_p - S_s)_s - (S_p - S_s)_0$	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_u = e^{\frac{(S_p - S_s)_s - (S_p - S_s)_0}{m}}$
2400	Prisma 30 Min.	H_β	1,42	1,15	0,27	0,28	0,21	1,36
	„	$H_{\beta'}$	1,58	1,29	0,29			
	„	4973 Å	1,17	1,11	0,06	0,07		
	„	4973	1,18	1,12	0,06			
	„	4723	1,78	1,71	0,07			
	„	4723	1,77	1,68	0,09			
	Gitter 60 Min.	$H_{\beta'}$	1,14	1,16	− 0,02	− 0,21	0,19	
	„	4719	1,46	1,68	− 0,22			
	„	4723	1,15	1,34	− 0,19			
4800	Prisma 30 Min.	H_β	1,90	1,63	0,27	0,25	0,17	1,32
	„	$H_{\beta'}$	2,22	1,99	0,23			
	„	4723	1,56	1,47	0,09	0,08		
	„	4723	1,80	1,73	0,07			
	Gitter 60 Min.	$H_{\beta'}$	1,43	1,45	− 0,02	− 0,21	0,19	
	„	4719	1,13	1,33	− 0,20			
	„	4634	1,32	1,54	− 0,22			
9600	Prisma 30 Min.	H_β	2,05	1,84	0,21	0,225	0,13	1,25
	„	$H_{\beta'}$	2,07	1,83	0,24			
	„	4723	1,19	1,11	0,08	0,095		
	„	4723	1,13	1,02	0,11			
	Gitter 60 Min.	$H_{\beta'}$	1,18	1,22	− 0,04	− 0,205	0,16	
	„	4634	1,67	1,85	− 0,18			
	„	4632	1,22	1,44	− 0,23			

Tabelle IV.

Kathodenfall. Volt	Spektrograph, Belichtungszeit	Linie	S_p	S_s	$S_p - S_s$	$S_p - S_s$ Mittel	$(S_p - S_s)_s - (S_p - S_s)_0$	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$
2400	Prisma 30 Min.	H_γ	1,37	1,17	0,20	0,215	0,12	1,20
	„	H_γ	1,41	1,18	0,23			
	„	4318 Å	1,82	1,72	0,10	0,09		
	„	4318	1,68	1,60	0,08			
	Gitter 60 Min.	H_γ	1,28	1,41	− 0,13		0,11	
	„	4312	1,63	1,87	− 0,24			
4800	Prisma 30 Min.	H_γ	1,90	1,67	0,23	0,225	0,14	1,22
	„	H_γ	2,12	1,90	0,22			
	„	4318	1,84	1,75	0,09	0,085		
	„	4318	2,04	1,96	0,08			
	Gitter 60 Min.	H_γ	1,54	1,66	− 0,12		0,12	
	„	4179	1,73	1,97	− 0,24			
9600	Prisma 30 Min.	H_γ	2,00	1,75	0,25	0,225	0,13	1,21
	„	H_γ	1,99	1,79	0,20			
	„	4341 (H_γ)	2,18	2,10	0,08	0,09		
	„	4341 (H_γ)	2,20	2,10	0,10			
	Gitter 60 Min.	H_γ	1,32	1,46	− 0,14		0,11	
	„	4179	1,08	1,33	− 0,25			

schicht zum Zweck der Ermittlung des optischen Intensitätsverhältnisses $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_0 = e^{\frac{(s_p - s_s)_0}{m}}$ erhalten wurden; nur in einem Falle (H_γ bei 9600 Volt) wurde für diesen Zweck die Serienlinie (H_γ) selber aus der negativen Glimmschicht verwendet.

Wie aus den zwei Tabellen zu ersehen ist, übersteigt die Intensität der p-Schwingungen diejenige der s-Schwingungen der Serienlinien in den Kanalstrahlen durchweg um 20—35%. Nach den oben gegebenen Ausführungen ist also die bewegte Intensität der H-Serienlinien in den Kanalstrahlen um mehr als 20—35% zu Gunsten der Schwingungen parallel der Geschwindigkeitsachse größer. Man wird erstaunt sein über die Größe dieses Effektes: wohl niemand hätte ihn in diesem Betrag erwartet, sonst wäre er vermutlich schon längst aufgesucht worden.

Vergleicht man die Werte von $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ für verschiedene Kathodenfälle miteinander, so scheint es, als ob sie mit wachsendem Kathodenfall abnehmen. Wir möchten indes auf diesen Punkt keinen Wert legen. Es ist nämlich möglich, daß in den Aufnahmen für die drei Werte des Kathodenfalls die Gasfüllung noch nicht gleichmäßig rein war: wahrscheinlich war sie etwas durch Stickstoff verunreinigt. Eine Verunreinigung aber hat, wie oben dargelegt wurde, einen empfindlichen Einfluß auf das Verhältnis von bewegter und ruhender Intensität und somit auf das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = \frac{J_p^{(r)} + J_p^{(b)}}{J_s^{(r)} + J_s^{(b)}}$. Es ist also möglich, daß in gleichmäßig reinem Wasserstoff der Gang des Verhältnisses $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ mit dem Kathodenfall ein anderer ist. In der Tat nimmt gemäß der Tabelle V $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ mit wachsendem Kathodenfall etwas zu, und zwar war in der Versuchsreihe dieser Tabelle der Wasserstoff gleichmäßig reiner als in der ersten Versuchsreihe. Aber selbst wenn dieser zweite Gang des Verhältnisses

$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ mit wachsendem Kathodenfall in reinem Wasserstoff eine wiederkehrende Erscheinung wäre, möchten wir deren theoretische Verwertung für bedenklich erachten. In unseren Versuchen änderte sich nämlich mit dem Kathodenfall gleichzeitig der Gasdruck, und zwar wurde dieser kleiner gemacht, um jenen zu erhöhen. Es ist nun sehr wohl möglich, daß das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ auch vom Gasdruck abhängig ist.

4. Polarisation der bewegten Serienlinien in den Kanalstrahlen, zweite Versuchsreihe.

Diejenigen Linien H_β und H_γ in den Tabellen III und IV, welche hinter demselben Wert des Kathodenfalls verzeichnet stehen, wurden von demselben Spektrogramm abgenommen; sie entsprechen also gleichen Versuchsbedingungen. Vergleicht man nun ihre Verhältnisse $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ miteinander, so ergibt sich für H_β durchweg ein größerer Wert als für H_γ. Dies bedeutet, daß der Betrag der Polarisation der Lichtemission in den Kanalstrahlen bei der Serienlinie H_β größer ist als bei H_γ.

Dieser Punkt erschien uns so interessant, daß wir zu prüfen beschlossen, ob zwischen H_α und H_β die gleiche Beziehung besteht. Zu diesem Zweck führten wir eine zweite Versuchsreihe mit einer rotempfindlichen Platte durch; hierbei wurde nur der Prismenspektrograph verwendet; die Versuchsbedingungen wurden günstig für den Vergleich von H_α und H_β gewählt. In Tabelle V sind für drei Werte des Kathodenfalls die gewonnenen Messungen zusammengestellt. Wie aus ihr hervorgeht, ist $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ für H_α durchweg etwas größer als für H_β. Es nimmt demnach das Verhältnis $\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w$ bei den drei ersten Gliedern der Wasserstoffserie mit steigender Gliednummer ab. Es ist freilich unentschieden, wenn auch wahrscheinlich, daß

Tabelle V.

Kathodenfall, Volt	Serienlinie	Linie	S_p	S_s	$S_p - S_s$	$(S_p - S_s)_s - (S_p - S_s)_0$	$\left(\frac{J_p}{J_s}\right)_w = e^{\frac{(S_p - S_s)_s - (S_p - S_s)_0}{m}}$
2300	H_α	H_α	1,77	1,63	0,14	0,19	1,32
		5920 Å	1,28	1,33	− 0,05		
	H_β	H_β	1,18	1,09	0,09	0,12	1,20
		4797	1,21	1,24	− 0,03		
	H_γ	H_γ	1,13	1,05	0,08	0,14	1,23
		4318	1,39	1,45	− 0,06		
4200	H_α	H_α	2,35	2,21	0,14	0,17	1,28
		5920	0,94	0,97	− 0,03		
	H_β	H_β	1,99	1,90	0,09	0,16	1,27
		4973	1,05	1,12	− 0,07		
	H_γ	H_γ	1,84	1,74	0,10	0,13	1,21
		4318	1,68	1,71	− 0,03		
9500	H_α	H_α	1,59	1,41	0,18	0,22	1,38
		5920	1,14	1,18	− 0,04		
	H_β	H_β	1,48	1,33	0,15	0,20	1,34
		4973	1,27	1,32	− 0,05		
	H_γ	H_γ	1,42	1,27	0,15	0,20	1,34
		4318	1,76	1,81	− 0,05		

dieser Gang für die bewegte Intensität der Serienlinien allein zutrifft, daß er also nicht durch einen Gang des Verhältnisses der bewegten zur ruhenden Intensität, deren Summen ja zur Beobachtung kommen, bewirkt wird.

5. Resultate und ihre Deutung.

Durch die vorliegende Untersuchung dürfen wir folgende Erscheinungen als sichergestellt erachten.

1. Die Emission der Bandenlinien des Wasserstoffs ist in den Kanalstrahlen ebenso unpolarisiert wie in der negativen Glimmschicht.

2. Die Emission der *H*-Serienlinien in der negativen Glimmschicht ist unpolarisiert, wahrscheinlich ebenso die Emission der ruhenden *H*-Serienlinien in den Kanalstrahlen entsprechend den ruhenden Serienlinien des Heliums und des Quecksilbers in den Kanalstrahlen.

3. Die Emission der bewegten *H*-Serienlinien in den Kanalstrahlen ist polarisiert und zwar ist die Intensität der Schwingungen parallel der Geschwindigkeitsachse mehr als 20 bis 35% intensiver als die Intensität der Schwingungen senkrecht dazu.

Das Fehlen der Polarisation in der negativen Glimmschicht bei höherem Druck erklärt sich allein aus dem ungeordneten Verlauf der zerstreuten und sekundären Kathodenstrahlen, welche die Lichtemission in jener Strompartie durch ihren Stoß auf ruhende Gasmoleküle veranlassen.

Aus der teilweisen Polarisation der bewegten *H*-Serienlinien in den geordnet verlaufenden Kanalstrahlen ist zu folgern, daß zwischen der Bewegung der Kanalstrahlenteilchen und der Beschleunigung ihrer emittierenden Serienelektronen ein unmittelbarer Zusammenhang besteht, so daß die Ordnung in der Stellung der Geschwindigkeitsachsen der Kanalstrahlen in einer teilweisen Ordnung der Beschleunigungsachsen ihrer Serienelektronen wiederkehrt. Diese Folgerung ist verträglich mit

der Auffassung, daß die Träger der *H*-Serienlinien positive Atomjonen sind und daß diese ihre bewegte Intensität an ihren eigenen Serienelektronen überwiegend unmittelbar durch ihren Stoß auf Gasmoleküle als positive Kanalstrahlen anregen, daß also Geschwindigkeits-, Stoß- und Beschleunigungsachsen angenähert zusammenfallen.

Das Fehlen der Polarisation bei der Emission der ruhenden Serien- und Bandenlinien in den Kanalstrahlen läßt folgern, daß zwischen der Beschleunigung der sie emittierenden Elektronen und der Geschwindigkeit der Kanalstrahlen kein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Wohl wird die Emission der zwei Arten von Linien durch den Stoß der Kanalstrahlen auf ruhende Gasmoleküle veranlaßt,[1]) indes nur veranlaßt. Zwischen den Stoß und die Emission schaltet sich ein unmittelbar auf den Stoß folgender Vorgang ein, welcher die Orientierung der Stoßachsen nicht auf die Beschleunigungsachsen der Emission überträgt. Dieser Vorgang ist im Falle der Emission der Bandenlinien gemäß der Auffassung des einen von uns die teilweise oder ganze Abtrennung und Wiederanlagerung von Valenzelektronen. Im Falle der Emission der ruhenden Serienlinien ist es die Jonisierung, also die Abtrennung eines Valenzelektrons von seinem Atom infolge des Stoßes eines Kanalstrahlenteilchens; im Abschluß dieses Vorganges kommen die Serienelektronen des neu gebildeten Atomjons mit Geschwindigkeit in ihrer neuen Gleichgewichtslage an und strahlen dann ihre überschüssige Energie in Schwingungen um diese aus.

Aachen, 30. Juni 1914.

[1]) J. Stark, Ann. d. Phys. 42, 163, 1913.

Zur Frage der Absorption der Gravitation.

Von **K. F. Bottlinger.**

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 4. Juli 1914.

I. Die Mondbewegung.

Der Versuch, die beobachteten Schwankungen in der Mondbewegung gegen die reine Theorie mit einer Absorption der Gravitation zu erklären, wurde unabhängig von W. de Sitter und mir unternommen[1]).

Beide Untersuchungen stimmten im großen und ganzen überein und zeigten eine gewisse Ähnlichkeit mit den beobachteten Abweichungen der Mondlänge.

In dem Zeitraum von 1830 bis 1866 ließen sie sich vollkommen zur Deckung bringen. Um die Jahre 1866 und 1895 indes traten starke Verschiedenheiten zwischen Beobachtung und Absorptionstheorie auf.

Ich hatte trotz dieses noch unvollständigen Einklanges die Vermutung ausgesprochen, daß die „unexplained fluctuations", wie sie Newcomb nannte, tatsächlich durch Absorption der Gravitation verursacht seien.

Hierdurch angeregt, hatte Herr de Sitter den Gegenstand einer genaueren Untersuchung unterzogen, deren Resultat im wesentlichen folgendes war:

---

[1]) W. de Sitter, Observatory 1912 und Koningklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 1913. — K. F. Bottlinger, Die Gravitationstheorie und die Bewegung des Mondes. C. Troemer, Freiburg i. B. 1912.

1. Die Art der Störung ist wesentlich unabhängig von der angenommenen Dichteverteilung in der Erde und sehr angenähert eine Sinuskurve von Sarosperiode.

2. Die Mondstörungen, wie sie beobachtet sind, lassen sich nicht durch eine Sinuskurve darstellen, sondern sind viel unregelmäßiger.

3. Die langperiodischen Glieder zeigen weitere Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Beobachtung, sind aber doch zu unsicher, um als Beweis zu gelten.

Der Schluß, der hieraus mit Bestimmtheit zu ziehen ist, lautete: Die Absorption der Gravitation ist nicht imstande, die Abweichungen der beobachteten Mondörter von der Theorie zu erklären.

Auf der anderen Seite war nicht von der Hand zu weisen, daß während großer Zeiträume eine Parallelität beider Kurven augenscheinlich war.

Um zu entscheiden, ob eine Absorption der Gravitation wahrscheinlich sei, stellte ich die Frage: Ist es möglich, mit Hilfe der Absorption in den beobachteten Mondörtern die 18jährige Periode zum Verschwinden zu bringen?

Die Untersuchung, die auf Newcombs[1]) Tabellen beruhte, ergab zunächst ein Resultat, das der Absorption günstig schien. Gleich nach Fertigstellung dieses erschien E. Browns[2]) neue Untersuchung, die obiges Resultat völlig illusorisch machte.

Da im folgenden die Frage nach der Existenz der Absorption nach unseren augenblicklichen Kenntnissen erschöpfend erörtert werden soll, muß ich die erwähnten Rechnungen ausführlicher darstellen.

Es handelt sich vor allem darum, möglichst gute Werte für die Störung, welche aus der Absorption der Gravitation auf die Länge des Mondes erfolgt, zu erhalten. Hierfür ist die Entdeckung de Sitters, daß unsere Annahme über die Dichteverteilung im Erdinnern nur von sehr geringem Einfluß sei, wichtig.

---

[1]) S. Newcomb, Astronomical Papers, Vol. IX, Pt. I und Monthly Notices 69.

[2]) E. Brown, The Moons longitude. Monthly Notices 73.

Es ist somit gleichgültig, ob man eine der beiden Störungsserien von de Sitter oder meine nimmt.

Inzwischen war mir aber aufgefallen, daß mit der Berechnung der Mondfinsternisse noch nicht der ganze Effekt der Gravitationsabsorption auf die beobachtete Mondlänge gegeben sei.

Auf S. 22 meiner Dissertation[1]) hatte ich erwähnt, daß auch Sonnenfinsternisse das System Erde-Mond beeinflussen müssen, war aber zu dem Schluß gekommen, daß sie vernachlässigt werden können.

Es gibt aber noch eine weitere Wirkung der Sonnenfinsternisse, die mir bisher entgangen war:

Wenn der Mondschatten über die Erde gleitet und die Finsternis nicht genau zentral ist, so muß — wenn Gravitationsabsorption existiert — ein Drehimpuls auf die Erde ausgeübt werden, dessen in die Richtung der Erdachse fallende Vektorkomponente die Rotationsgeschwindigkeit der Erde ändert.

Dies bedeutet aber für uns nichts anderes als eine Änderung des astronomischen Zeitmaßes. Solange diese Änderung zu klein bleibt, um durch Pendeluhren direkt gemessen zu werden, haben wir kein irdisches Mittel, sie nachzuweisen. Dagegen muß ein schnell ablaufendes astronomisches Ereignis, das von der Erdrotation unabhängig ist, eine scheinbare Verfrühung oder Verspätung erleiden.

In dieser Hinsicht ist unser Mond wieder bei weitem das günstigste Objekt, da er sich im Mittel in einer Zeitsekunde um 0".55 bewegt, d. h. eine Verspätung unseres Zeitmaßes um 1^s würde ein scheinbares Vorauseilen des Mondes um 0".55 zur Folge haben.

Eine Änderung der Erdrotation von dieser Größenordnung aber dürfte sich auch nicht mit den besten Pendeluhren nachweisen lassen.

Unter der Annahme, daß das Mondmaterial den gleichen

[1]) Ich werde diese Arbeit im folgenden stets unter „Gravitationstheorie" zitieren.

Absorptionskoeffizienten besitze wie die Erdmaterie, kann man die Größe des erwähnten Effektes im Verhältnis zu der Störung der Mondfinsternisse leicht berechnen, denn sie ist nur noch durch die geometrischen Verhältnisse sowie die Dichte von Erde und Mond bedingt.

Hat man den Einfluß der Sonnenfinsternisse auf die Erdrotation im Zeitmaß bestimmt, so ist diese noch mit — 0.55 zu multiplizieren, um die scheinbare Störung der Mondlänge zu liefern.

Die Berechnung dieses Effektes werde ich im folgenden Kapitel ausführen, während hier gleich das Gesamtresultat erörtert werden soll, das sich für die Mondbewegung ergibt.

Ich verwandte dazu meine Rechnungen der Mondfinsternisse in „Gravitationstheorie", die ich noch für die Erdexzentrizität korrigierte, welche ich dort vernachlässigt hatte, und erhielt so die reelle Störung der Mondlänge[1]).

Ebenso berechnete ich aus den Einzeleffekten der Sonnenfinsternisse durch doppelte Summation und Multiplikation mit —0.55 die scheinbare Störung der Mondlänge. Dann wurden beide Störungen addiert, wobei die in die gleiche Lunation fallenden Sonnen- und Mondfinsternisse als gleichzeitig betrachtet wurden. Die hierbei begangene Ungenauigkeit ist gänzlich belanglos.

Da die Störungskurve eine Zickzacklinie mit Unstetigkeiten in halbjährlichen Intervallen darstellt, die Mondörter aber Mittel über ein Jahr oder noch größere Intervalle sind, wurde jene graphisch ausgeglichen und aus der Mittelkurve die Einzelwerte für die betreffenden Zeitpunkte abgelesen.

Es galt nun den Absorptionskoeffizienten zu bestimmen, für welchen die Kurve beobachtete minus berechnete Mondstörung den glattesten Verlauf zeigte.

[1]) Es sei hier bemerkt, daß in Gravitationstheorie p. 57 die Finsternisse am 23. Mai 1910 und 26. September 1912 fehlerhaft berechnet waren. Es soll nämlich in der Kolonne Δu heißen +7.27 und +1.16 anstatt +0.73 und +0.12.

Reichte die Absorption zur Erklärung der Mondbewegung aus, so müßten die Werte von $B - R$ auf einer Geraden liegen. Wie aber schon vorher erwähnt, ist es nicht möglich, die Mondstörungen als alleinige Folge der Gravitationsabsorption anzusehen.

Legt man die Newcombschen Mondörter zu Grunde [siehe Tafel, Kurve I], so erhält man das beste Resultat, wenn man den früher von mir angenommenen Absorptionskoeffizienten mit 0.42 multipliziert [II ist die Störungskurve]. Bildet man $B - R$, also I — II, so erhält man (Kurve III) das sehr auffallende Resultat, daß sich die Reste vollständig durch 4 Gerade darstellen lassen, mit Knicken bei 1868, 1875, 1895. Es hat ganz den Anschein, als ob hier plötzliche Änderungen der Mondbewegung aufgetreten seien. Im übrigen aber deutete das völlige Verschwinden der 18jährigen Periode auf das Vorhandensein einer Absorption der Gravitation im etwa halben Betrage der früheren Annahme hin. Die von Professor E. F. van den Sande Backhuizen reduzierten Greenwicher Meridianbeobachtungen zeigten die obenerwähnte Erscheinung allerdings nicht so deutlich (Kurve IV).

Wenn man diesem nun entnehmen konnte, daß wenigstens ein Teil der Mondstörungen durch die Absorption der Gravitation erklärt werden könne und geradezu auf ihr Vorhandensein hindeute, so zeigten die neuesten Untersuchungen von E. Brown (Monthly Notices **73**, 692), daß dieser Schluß gänzlich illusorisch war. Brown hatte, auf der reinen Gravitationstheorie fußend, kleinere Vernachlässigungen der Hansen-Newcombschen Mondtheorie aufgedeckt und eine andere Erdabplattung angenommen als Newcomb, nämlich den Hayfordschen Wert $\frac{1}{297}$, während Newcomb den Wert von Helmert $\frac{1}{298.3}$ verwandt hatte.

So erhält er Korrektionen, die mit denen aus der Absorption folgenden nahezu übereinstimmen. Die Folge davon ist, daß er ohne Absorption fast die gleichen Reste erhält, wie sie sich bei mir ergaben. Wenigstens ist dies für die

Newcombschen Sternbedeckungen sehr auffallend [V stellt die Reste der Newcombschen Okkultationen nach Brown dar]. Die Meridianbeobachtungen mußten noch einige kleinere Korrekturen erhalten und zeigen deshalb ein etwas anderes Aussehen [Kurve VI].

Herrn Brown war hier dieselbe Erscheinung aufgefallen, daß die übrigbleibenden, unerklärten Reste sich durch eine dreifach gebrochene Gerade darstellen ließen. Ein Blick auf die Tafel zeigt dies besonders bei den Meridianbeobachtungen [Kurve VI], ferner ist die große Ähnlichkeit zwischen III und V auffallend.

Brown läßt sich auf eine nähere Erklärung dieser augenscheinlich sprungweisen Änderung der mittleren Bewegung des Mondes nicht ein, gibt aber ausdrücklich ihre Möglichkeit zu.

Es ist aus dem obigen folgendes zu schließen:

Die Brownschen Mondörter zeigen keine Störung mehr, die sich durch eine Absorption der Gravitation erklären ließe. Sollte der von Brown angenommene Wert für die Abplattung der Erde unrichtig sein, so kann trotzdem eine merkliche Absorption existieren, es ist aber unmöglich, sie von den anderen Störungen, die den Knotenumlauf zur Periode haben, zu trennen.

Gegenwärtig spricht in der Mondbewegung nichts mehr für das Vorhandensein einer Absorption.

II. Schwankungen der Erdrotation.

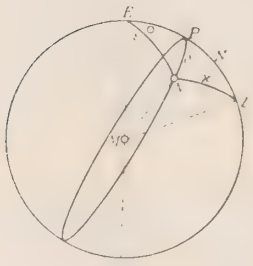


Fig. 1.

Der Einfluß der Gravitationsabsorption bei Sonnenfinsternissen auf die Erdrotation, der in vorigem schon für die Mondlänge berücksichtigt wurde, soll hier abgeleitet und die Möglichkeiten seines direkten Nachweises näher erörtert werden.

Stellt in Fig. 1 der Kreis den Schnitt der Erde mit der Ebene durch

ihren Mittelpunkt senkrecht zur Achse Erde-Sonne dar, dann muß der den Impuls einer Finsternis darstellende Vektor in dieser Ebene liegen. Sei E der instantane Pol der Ekliptik im Erdkörper, N der Nordpol, MZ die Impulsrichtung, dann ist ε die Ekliptikschiefe, δ die Sonnendeklination[1]). Ist J die Größe des Impulses der Finsternis, so kommt für die Änderung der Rotationsgeschwindigkeit nur die Projektion in die Erdachse in Betracht, d. i. $J\cos\varkappa$.

Zur Berechnung von J ist zunächst zu bemerken, daß, wenn die Wanderungsgeschwindigkeit des Mondschattens während der Finsternis als Konstante angenommen wird, nur die in die Bewegungsrichtung des Mondes fallende Komponente des Impulses in Betracht kommt, da die andere Komponente in der ersten und zweiten Hälfte der Eklipse entgegengesetzt gleich ist, ihr Integral also Null wird.

In Oppolzers Kanon der Finsternisse bedeutet N' den Winkel der Mondbahn zur Zeit der Eklipse mit dem Rektaszensionskreise. Dieser aber muß nach obigem identisch sein mit dem Winkel PMZ in Fig. 1. Da NPZ ein rechter Winkel ist, so ist

$$\cos\varkappa = \cos\delta\cos N'.$$

Diese Größe aber ist im Kanon tabuliert.

J ist noch abhängig von der Entfernung der Erde von der Sonne R und von der Wanderungsgeschwindigkeit des Mondes während der Finsternis. Ist diese n, n_0 die mittlere Geschwindigkeit unter Annahme einer kreisförmigen Mondbahn, so wird der Effekt der einzelnen Eklipse auf die Erdrotation

$$\Delta\omega = \frac{n_0}{n}\,\frac{1}{R^2}\cos\varkappa J_0.$$

Hier ist J_0 nur noch Funktion der Zentralität der Finsternis, d. h. des Minimalabstandes der Schattenachse vom Erdmittelpunkt.

[1]) Ich habe hier absichtlich eine schiefe Projektion gewählt. EPN und NPZ sind demnach rechte Winkel.

Für die Berechnung der Mondfinsternisse hatte ich in „Gravitationstheorie" Sonne und Mond als punktförmig betrachtet, was für die dort hauptsächlich ins Gewicht fallenden zentralen Eklipsen wenig ausmachte. Hier dagegen wird J_0 bei zentralen Finsternissen Null und die Hauptwirkung liegt bei den mittelgroßen Finsternissen.

Es ist deshalb wünschenswert, eine genauere Formel für den Impuls aufzustellen.

Die Struktur des Mondschattens kann mit genügender Annäherung als zylindrisch angenommen werden, d. h. die Schattendichte ist bloß Funktion des Abstandes von der Achse. Die äußere Grenze ist der geometrische Halbschattenrand.

Zerlegt man den Schatten in einzelne Lamellen, in der Bewegungsrichtung des Mondes, so gleitet jede Lamelle über eine bestimmte Stelle der Erde hinweg und trifft dabei ein bestimmtes, aus der Erde herausgeschnittenes Blatt. Bezeichnet man das Intensitätsintegral über die ganze Lamelle mit μ, die Masse innerhalb des Blattes des Erdkörpers mit Q, dann ist der Schattenimpuls auf dieses Blatt $\mu \cdot Q$.

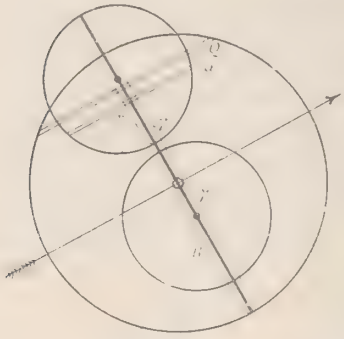


Fig. 2.

In Fig. 2 bedeutet der Kreis mit dem Radius R die Erde, der Pfeil die Bewegungsrichtung des Schattens (relativ zur ruhenden Erde). Die kleinen Kreise entsprechen den Hauptphasen zweier verschieden großer Finsternisse; γ ist der Minimalabstand der Schattenachse vom Erdmittelpunkt.

Hieraus ist ersichtlich, daß das Moment, welches auf das Blatt ausgeübt wird, $Q\mu(\gamma - \varrho)$ beträgt, wo ϱ der Abstand der betreffenden Lamelle von der Schattenachse ist; r ist der Halbmesser des Schattens. Der Gesamtdrehimpuls auf die Erde wird dann

$$J_0 = \text{const.} \int Q\mu(\gamma - \varrho)\, d\varrho.$$

Ist $\gamma + r < R$, dann ist die Integration $\gamma - r$ bis $\gamma + r$ zu erstrecken.

Ist $\gamma + r > R$, dann ist von $\gamma - r$ bis R zu integrieren.

Q ist von der Dichteverteilung im Erdinnern abhängig. Nimmt man (was am einfachsten ist) nach Wiechert einen Steinmantel und einen Eisenkern an, so hat man zwei übereinander gelagerte Kugeln mit den Radien $R_1 = 1.0$ und $R_2 = 0.8$ und den Dichten $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 1.5$, deren Wirkungen einfach zu superponieren ist.

μ ist abhängig von der Dichteverteilung in Sonne und Mond. Da beide unbekannt sind, habe ich den geometrischen Schattendurchmesser angenommen, d. i. mit genügender Annäherung der halbe Erddurchmesser und daß der Schatten verursacht sei durch eine gleich große homogene Kugel, bei punktförmiger, unendlich ferner Sonne.

Daraus ergibt sich:

$$Q = \Delta s(R^2 - s^2)$$
$$\mu = \Delta s(r^2 - (s - \gamma)^2),$$

wo $s = \gamma - \varrho$ ist.

Der Impuls wird dann

$$J_0 = \text{const.} \int_{\gamma - r}^{\gamma + r \text{ oder } R} (R^2 - s^2)(r^2 - (s - \gamma)^2)\, s\, ds.$$

Daraus wird für die beiden Fälle:

$$J_{0\,\mathrm{I}} = \text{const.} \tfrac{4}{3} \gamma r^3 [R^2 - \tfrac{3}{5} r^2 - \gamma^2]$$
$$J_{0\,\mathrm{II}} = \text{const.} [\tfrac{1}{2}(r^2 - R^2)^3 + \tfrac{1}{15}(10 R^2 r^3 + 4 R^5 - 6 r^5)\gamma - \tfrac{1}{4}(R^4 + 2 R^2 r^2 - 3 r^4)\gamma^2 - \tfrac{2}{3}\gamma^3 r^3 + \tfrac{1}{12}(R^2 + 3 r^2)\gamma^4 - \tfrac{1}{60}\gamma^6].$$

Hier hat man für die äußere Kugel der Erde $R = 1$ für die innere $R = 0.8$, für beide Fälle $r = 0.5$ zu setzen. Entsprechend der größeren Dichte hat man die zweite Funktion mit 1.5 zu multiplizieren und dann zu der ersten zu addieren. $J_0 = J_1 + 1.5\, J_2$.

Naturgemäß ist die Grenze der Gültigkeit zwischen den Funktionen J_I und J_{II} für die beiden Erdkugeln an verschiedenen Stellen.

Der Impuls wurde so für verschiedene Werte von γ in Intervallen von 0.1 berechnet von 0.0 bis 1.5, der Grenze für die äußere Erdkugel.

γ	J_0	γ	J_0
0.0	0.0000	0.8	0.5419
0.1	.2600	0.9	.3946
0.2	.4950	1.0	.2544
0.3	.6800	1.1	.1397
0.4	.7933	1.2	.0656
0.5	.8277	1.3	.0215
0.6	.7848	1.4	.0032
0.7	.6828	1.5	.0000

Aus den 16 Werten, die in dieser Tabelle angeführt sind, erhielt ich durch Interpolation mit 2. Differenzen die Funktion in Intervallen von 0.01 für γ, woraus dann die Einzelwerte linear interpoliert wurden, da γ dreistellig berücksichtigt wurde.

So wurden für die Zeit von 1830 bis 1915 die Impulse der Einzelfinsternisse berechnet. Die Konstante war so gewählt worden, daß bei dem in „Gravitationstheorie" angenommenen Werte der Absorptionskonstanten ($\lambda = 3 \cdot 10^{15}$ im c. g. s. System) die Störung der Erdrotation in Sekunden pro Jahr gegeben sei. Die erste Summation gibt dann die augenblickliche Abweichung der Erdrotation vom Mittelwert an. Die zweite Summation ergibt den fortlaufenden Zeitfehler.

Wenn 2 Finsternisse um bloß eine Lunation voneinander entfernt lagen, so wurden sie zu einer einzigen zusammengefaßt, während im übrigen das Zeitintervall als konstant zu 0.47 Jahren angenommen wurde.

In der folgenden Tabelle sind die Impulse der einzelnen Finsternisse und die erste Summenreihe angeführt [1]).

[1]) Die zweite Summenreihe, die als eine kleine Korrektion bereits bei der Mondbewegung verwandt worden war, ist hier weggelassen.

Epoche	$\triangle\omega$	$\Sigma\triangle\omega$	Epoche	$\triangle\omega$	$\Sigma\triangle\omega$
		+ 1°033			− 0°179
1829.4	− 0°571	+ .462	1848.2	− 0°033	− .212
.8	− .640	− .178	.7	− .024	− .236
30.2	− .022	− .200	49.1	+ .433	+ .197
.7	− .011	− .211	.6	+ .363	+ .560
31.1	+ .386	+ .175	50.1	+ .084	+ .644
.6	+ .329	+ .504	.6	− .024	+ .620
32 1	+ .042	+ .546	51.1	− .369	+ .251
.6	− .074	+ .472	.6	− .193	+ .058
33.1	− .233	+ .239	52.1	− .007	+ .051
.5	− .087	+ .152	.4	− .038	+ .013
34.0	− .002	+ .150	.9	− .188	− .175
.4	− .010	+ .140	53.4	− .387	− .562
.9	− .278	− .138	.9	− .259	− .821
35.4	− .452	− .590	54.4	+ .540	− .281
.9	− .312	− .902	.9	+ .634	+ .353
36.4	+ .710	− .192	55.4	+ .096	+ .449
.9	+ .751	+ .559	.9	+ .028	+ .477
37.3	+ .067	+ .626	56.3	− .623	− .146
.8	+ .025	+ .651	.7	− .442	− .588
38.2	− .715	− .064	57.2	− .274	− .862
.7	− .550	− .614	.7	− .612	− 1.474
39.2	− .172	− .786	58.2	+ .920	− .554
.7	− .427	− 1.213	.7	+ .943	+ .389
40.2	+ .864	− .349	59.1	+ .003	+ .392
.7	+ .846	+ .497	.6	+ .013	+ .405
41.1	+ .002	+ .499	60.1	− .340	+ .065
.6	− .027	+ .472	.5	− .511	− .446
42.0	− .274	+ .198	61.0	− .279	− .725
.5	− .388	− .190	.5	+ .271	− .454
43 0	− .188	− .378	62.0	+ .333	− .121
.5	+ .221	.157	.5	+ .075	− .046
44.0	+ .173	+ .016	.9	+ .018	− .028
.5	+ .019	+ .035	63.4	+ .061	+ .033
.9	+ .001	+ .036	.9	+ .190	+ .223
45.3	+ .129	+ .165	64.3	+ .287	+ .510
.8	+ .265	+ .430	.8	+ .275	+ .785
46.3	+ .297	+ .727	65.3	− .457	+ .328
.8	+ .273	+ 1.000	.8	− .601	− .273
47.3	− .533	+ .467	66.2	− .046	− .319
.8	− .646	.179	.8	− .040	− .359

Epoche	$\triangle\omega$	$\Sigma\triangle\omega$	Epoche	$\triangle\omega$	$\Sigma\triangle\omega$
		$-0^s.359$			$+0^s.280$
1867.2	$+0^s.445$	+ .086	1886.2	$+0^s.205$	+ .485
.7	+ .360	+ .446	.7	+ .177	+ .662
68.1	+ .137	+ .583	87.1	− .580	+ .082
.6	+ .065	+ .648	.6	− .430	− .348
69.1	− .484	+ .164	88.1	− .020	− .368
.6	− .313	− .149	.6	+ .001	− .367
70.1	− .012	− .161	89.0	− .010	− .377
.5	− .007	− .168	.5	− .097	− .474
71.0	− .097	− .265	90.0	− .099	− .573
.5	− .255	− .520	.5	+ .169	− .404
.9	− .184	− .704	.9	+ .336	− .068
72.4	+ .345	− .359	91.4	+ .135	+ .067
.9	+ .491	+ .132	.9	+ .025	+ .092
73.4	+ .123	+ .255	92.3	− .392	− .300
.9	+ .029	+ .284	.8	− .265	− .565
74.3	− .512	− .228	93.3	− .473	− 1.038
.8	− .347	− .575	.8	− .826	− 1.864
75.3	− .379	− .954	94.3	+ .957	− .907
.7	− .749	− 1.703	.7	+ .987	+ .080
76.2	+ .953	− .750	95.2	+ .011	+ .091
.7	+ .992	+ .242	.7	+ .112	+ .203
77.2	+ .005	+ .247	96.1	− .416	− .213
.6	+ .062	+ .309	.6	− .625	− .838
78.1	− .390	− .081	97.1	− .460	− 1.298
.6	− .593	− .674	.6	+ .137	− 1.161
79.1	− .369	− 1.043	98.1	+ .630	− .531
.5	+ .244	− .799	.5	+ .325	− .206
80.0	+ .488	− .311	99.0	+ .055	− .151
.5	+ .176	− .135	.4	.000	− .151
81.0	+ .036	− .099	.9	+ .041	− .110
.4	+ .019	− .080	1900.4	+ .128	+ .018
.9	+ .115	+ .035	.9	+ .165	+ .183
82.4	+ .230	+ .265	01.4	− .227	− .044
.9	+ .238	+ .503	.9	− .400	− .444
83.3	− .353	+ .150	02.3	− .069	− .513
.8	− .518	− .368	.8	− .059	− .572
84.3	− .059	.427	03.2	+ .376	− .196
.8	− .053	.480	.7	+ .296	+ .100
85.2	+ .425	− .055	04.2	+ .283	+ .383
.7	+ .335	+ .280	.7	+ .287	+ .670

Epoche	$\triangle\omega$	$\Sigma\triangle\omega$	Epoche	$\triangle\omega$	$\Sigma\triangle\omega$
		+ 0^s.670			+ 0^s.013
1905.2	− 0^s.650	+ .020	1910.4	+ 0^s.018	+ .031
.7	− .527	− .507	.8	− .273	− .242
06.1	− .030	− .537	11.3	− .198	− .440
.5	− .002	− .539	.8	− .538	− .978
07.0	+ .073	− .466	12.3	− .842	− 1.820
.5	+ .051	− .415	.8	+ .922	− .898
08.0	− .009	− .424	13.3	+ .937	+ .039
.5	+ .043	− .381	.7	+ .023	+ .062
09.5	+ .278	− .103	14.2	+ .161	+ .223
.9	+ .116	+ .013	.7	− .415	− .192

Für die frühere Gravitations-Absorptions-Konstante würde also die Rotationsgeschwindigkeit um etwa 2 Sekunden pro Jahr schwanken müssen und zwar betrüge die Periode etwa 4.5 Jahre, nämlich $\frac{Saros}{4}$.

Der Betrag von 2 Sekunden wäre zu klein, um selbst von der besten Pendeluhr angezeigt zu werden und überdies ist die wahre Absorption, wenn vorhanden, wesentlich kleiner als die oben angenommene. Somit wäre auch die Methode, eine Reihe der besten Pendeluhren zu untersuchen und die Gänge zu mitteln und dann noch einige der Perioden zu mitteln recht wenig aussichtsreich.

Ferner könnte man etwa analog den Schweremessungen im luftleeren Raum freischwingende Pendel beobachten und zwischen Zeitbestimmungen größerer Intervalle einzuschließen. Im Laufe einiger Jahre könnte man auf diese Weise vielleicht Änderungen der Erdrotation angedeutet finden, wofern die Pendellänge als genügend konstant angenommen werden kann.

Doch dürften sich derartige Untersuchungen kaum lohnen, solange keine besonderen Andeutungen für die Existenz der Gravitationsextinktion da sind; und aus der Mondbewegung kann man, wie bemerkt, nichts derartiges mehr schließen.

III. Der Marsmond Phobos.

In „Gravitationstheorie" p. 27 hatte ich erwähnt, daß der Marsmond Phobos am ehesten einen Beweis für die Absorption liefern könnte. Im Jahre 1911 war von H. Struve eine neue Arbeit erschienen „Über die Lage der Marsachse und die Konstanten des Marssystems" (Sitzungsber. der K. Preußischen Akademie der Wissenschaften).

Durch diese Arbeit war es möglich, die Frage sofort zu beantworten.

Es war nach „Gravitationstheorie" p. 9 die Störung einer Eklipse auf die mittlere Bewegung

$$\Delta n = -\frac{3e\sin v}{a\sqrt{1-e^2}}J.$$

Ich will nun den Impuls J' einer Phobosverfinsterung, verglichen mit einer Maximaleklipse des Erdmondes, bestimmen.

Der Abstand des Phobos vom Marsmittelpunkt ist 2.70 Planetenradien. Daraus ergibt sich, daß der Mond bei 21°6 Abstand vom Gegenpunkt der Sonne an der Schattengrenze steht;

$$\frac{1}{2.70} = \sin 21°6.$$

Aus der Umlaufszeit des Mondes zu 7^h65 ergibt sich für eine zentrale Eklipse die Dauer

$$t' = \frac{7^h65 \times 2 \times 21°6}{360°} = 0^h92 = 55^m.$$

Die Maximaldauer einer Erdmondeklipse ist $t = 224^m$,

$$\therefore t' = 0.25\, t.$$

Die Sonnenkraft ist in Marsentfernung nur 0.43 des Wertes bei der Erde.

Die Dichte des Mars 0,69 (Erde = 1).
Der Durchmesser 0.54 „
Somit ist der Impuls einer Zentralfinsternis

$$J' = 0.25 \times 0.43 \times 0.69 \times 0.54\, J = 0.040\, J.$$

Nun treten aber bei 67 % aller Umläufe Finsternisse auf, d. h. bei 1140 Umläufen im Jahr 760 Eklipsen, von denen etwa 60 % die Halbdauer von 27^m überschreiten, denen $^1/_4$ des Maximalimpulses zukommt.

Man dürfte angenähert richtig schätzen, wenn man annimmt, daß auf 30 % aller Umläufe eine Maximaleklipse komme, das sind 342 im Jahr oder der Impuls ist 13.6 J pro Jahr.

Stünde das Periastron der Phobosbahn im Raume fest, so würden die Finsternisse während eines halben Marsjahres in gleichem Sinne wirken und dann für ebensolange ihr Vorzeichen umkehren. Hätte das Periastron einen Umlauf von der Dauer des Marsjahres, so würden sich alle Finsterniswirkungen säkular akkumulieren. Nun ist nach H. Struve die jährliche Säkularbewegung des Phobosperiastrons 158°, der Mars legt im Jahr 191° zurück, so daß in 10.9 Jahren der Mars einen Umlauf mehr macht als das Phobosperiastron.

Die Wirkungsperiode der Finsternisse ist demnach 10.9 Jahre.

Die Störung der mittleren Bewegung war

$$\Delta n = -\frac{3\,e\sin v}{a\sqrt{1-e^2}}\,J.$$

Da Δn bei der Erde im Maximum 2″ betrug (unter Annahme des in „Gravitationstheorie“ verwandten Absorptionskoeffizienten, $\frac{e}{a}$ etwa $14\,\frac{e}{a}$ (Erde) beträgt, kann man für den günstigen Fall, daß $\sin v$ nahe 1 liegt, als Störung der mittleren Bewegung pro Jahr annehmen $14 \times 13.6 \times 2'' = 380''$, welche Kraft nach dem Sinusgesetz in 10.9 Jahren oszillieren möge. Die Amplitude wird dann $\pm 380''\left(\frac{10.9}{2\pi}\right)^2 = 1140''$ so daß die Gesamtschwankung $2280'' = 0^\circ 6$ betragen müßte. Die größte negative Kraft, d. i. durch doppelte Integration die größte positive Längenstörung, tritt auf, wenn die Länge des Phobosperiastrons 90° größer ist als die areozentrische Länge der Sonne. Nach den Elementen von Struve war dies etwa 1894.5 der Fall.

Reduziert man die von Struve (l. c. p. 1071) mit der verbesserten mittleren Bewegung auf die Epoche 1894 Okt. 0.0 umgerechnete Phoboslänge l_0 auf eine Periode von 10.9 Jahren, so erhält man in der Tat eine Anordnung der Werte, daß man eine Sinuslinie hindurchziehen könnte: besonders wird dies deutlich, wenn man benachbarte Phasen zusammenfaßt. Indessen zeigt sich 1895 ein Minimum, während die Theorie ein Maximum erwarten ließe.

Betrachtet man die Einzelwerte von l_0, so zeigt sich, daß die Abweichung vom konstanten Mittelwert 296°40 nur bei 2 von 9 Werten den mittleren Fehler überschreitet, sonst meist beträchtlich darunter bleibt.

Aus den Phobosbeobachtungen ist also das gleiche, wie jetzt aus der Mondbewegung zu schließen, daß auf das Vorhandensein einer Gravitationsabsorption im ungefähren Betrage des früher vermuteten Wertes nichts hindeutet.

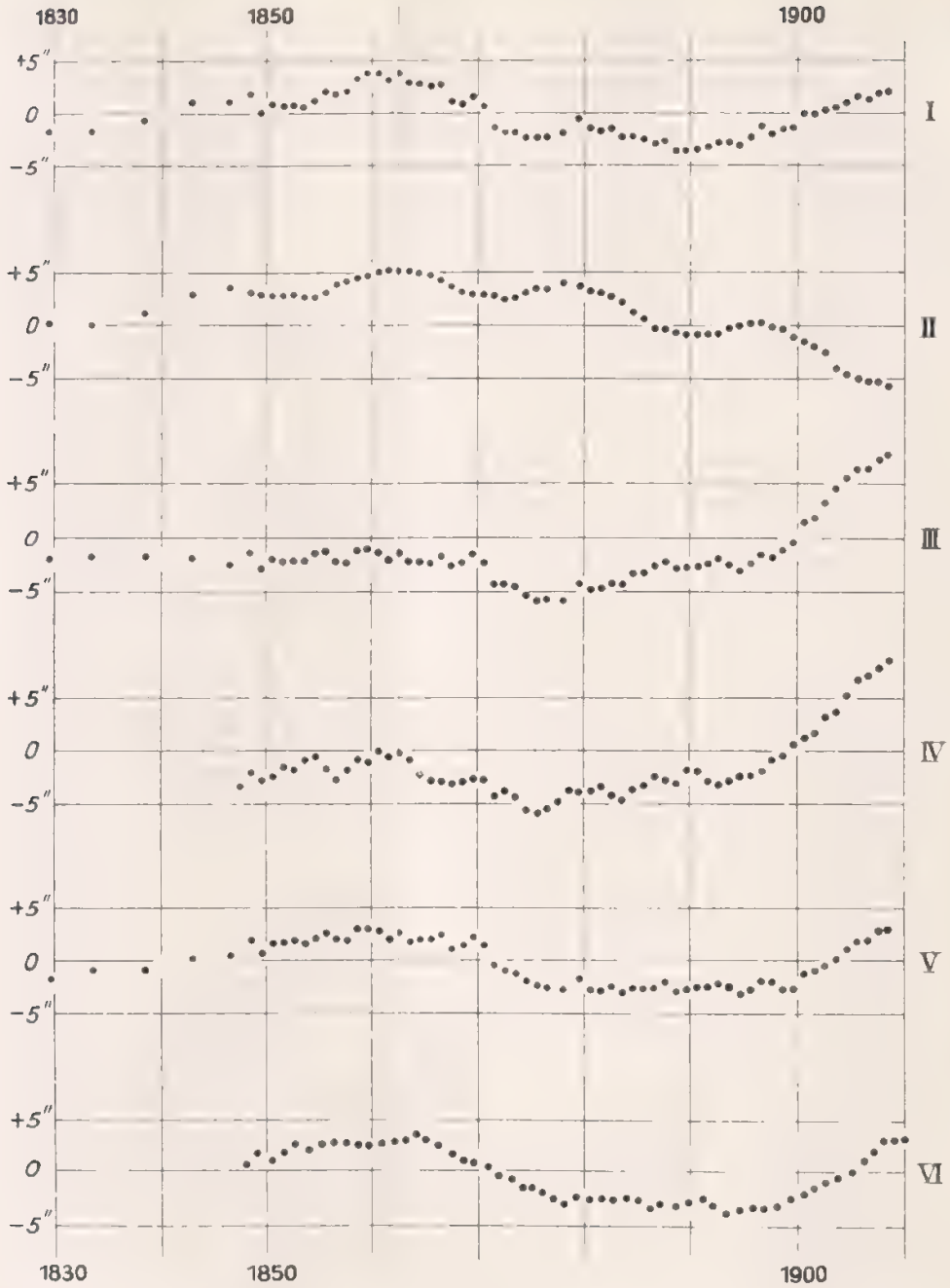
IV. Die übrigen Nachweismöglichkeiten.

Zu demselben Resultat führen die Lotschwankungen, auf die ich „Gravitationstheorie" p. 47 hingewiesen habe. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Dr. Schweydar haben 2 in Freiberg i. S. 200 Meter unter Tag aufgestellte Pendel während 3 Jahren keine auf Absorption hinweisende Störung gezeigt.

Ein anderer Weg zur Untersuchung, auf den bisher noch nicht hingewiesen wurde, der aber vielleicht lohnen würde, sobald die Greenwicher Beobachtungen des Mondes mit der neuen Theorie von Brown in kleineren Zeitintervallen verglichen vorliegen, wäre der Nachweis der Wirkung der einzelnen Finsternis auf die Mondbewegung. Da die einzelne Eklipse verglichen mit der Gesamtwirkung eine sehr große Störung hervorruft, so könnte durch geeignete Zusammenfassung aller positiven und aller negativen Δn-Werte über mehrere Jahrzehnte eine sehr viel größere Genauigkeit erreicht werden als auf irgend einem anderen Wege.

Wenn auch nach obigem in unseren Beobachtungen nichts mehr vorhanden ist, was auf eine Absorption der Gravitation hindeutet, sondern die ungestörte Newtonsche Formel noch immer gültig ist, so sollten wir doch die Möglichkeit einer solchen Absorption, wenn auch in wesentlich geringerem Grade zugeben und wenn sich unerklärte Erscheinungen zeigen, dürfte der Versuch stets interessant sein, sie auf solchem Wege zu erklären.

Neuenburg (Schweiz), 9. Juni 1914.


1830
1850
1900
+5″
0
−5″
I
II
III
IV
V
VI

Der Zusammenschluss des preussischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern.

Von **S. Finsterwalder.**

Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Für die bevorstehende Neutriangulation von Bayern war ursprünglich vom K. Bayer. Katasterbureau der Anschluß an die drei Eckpunkte des preußischen Hauptdreiecksnetzes Kreuzberg, Großgleichberg und Döbra vorgesehen und zwar sollte das bayerische Netz als Fortsetzung des preußischen nach Süden angelegt werden, wobei Zwanganschluß in Bezug auf Seiten und Winkel vorgesehen war[1]). Es liegt nun die Möglichkeit vor, die Anschlußstrecke nach Westen und Osten noch zu verlängern, indem einerseits westlich mindestens noch der preußische Punkt Steigkoppe mit angeschlossen wird, während östlich das sächsische Hauptdreiecksnetz die Anschlußpunkte Ochsenkopf und Kapellenberg bietet. Je länger die Anschlußstrecke wird, um so wahrscheinlicher wird der Einfluß zufälliger Abweichungen einzelner Anschlußseiten auf den Maßstab und die Orientierung des bayerischen Netzes ausgeschaltet. Um nun die sächsischen Punkte zum Anschluß benützen zu

[1]) Vergleiche hiezu die vorausgegangene Abhandlung des Verfassers: Das Verhältnis der bayerischen zur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München. Diese Berichte, Jahrgang 1914, S. 53, sowie: Vorschlag zu einer Neugestaltung der bayerischen Koordinaten. Zeitschr. des Vereins der Höheren Bayerischen Vermessungsbeamten, 18. Bd., Nr. 3, 1914. Schließlich sei noch auf die Berichtigung am Schlusse der vorliegenden Abhandlung hingewiesen.

Tabelle I.

Trig. Punkt		Breite	Länge	x Meridianabschn.	y Perpendikel	Meridiankonv.
Strauch	sächsische	51° 23′ 7,676″	+ 0° 1′ 17,485″	+ 8888,030	+ 1498,182	+ 0° 1′ 0,545″
	preußische	9,9343″	31° 14′ 38,8569″			
Collm	sächsische	51° 18′ 15,013″	— 0° 32′ 37,799″	— 15,199	— 37920,682	— 0° 25′ 28,032″
	preußische	17,2853″	30° 40′ 43,5247″			
Leipzig [1])	sächsische	51° 20′ 13,305″	— 1° 10′ 54,734″	+ 4162,885	— 82348,454	— 0° 55′ 22,195″
	preußische	15,6022″	30° 2′ 26,5250″			
Röden	sächsische	51° 1′ 10,873″	— 1° 24′ 16,481″	— 30862,187	— 98538,393	— 1° 5′ 31,029″
	preußische	13,1550″	29° 49′ 4,7271″			
Reust	sächsische	50° 49′ 55,044″	— 1° 21′ 33,220″	— 51802,648	— 95741,790	— 1° 3′ 13,983″
	preußische	57,3144″	29° 51′ 47,9721″			
Kuhberg	sächsische	50° 35′ 58,976″	— 1° 19′ 56,817″	— 77667,865	— 94320,736	— 1° 1′ 46,916″
	preußische	1,2340″	29° 53′ 24,3548″			
Stelzen	sächsische	50° 29′ 20,145″	— 1° 36′ 16,367″	— 89607,805	— 113845,518	— 1° 14′ 16,949″
	preußische	22,4089″	29° 37′ 4,7673″			
Döbra	sächsische	50° 16′ 43,717″	— 1° 54′ 40,483″	— 112460,376	— 136202,505	— 1° 28′ 13,018″
	preußische	45,9792″	29° 18′ 40,5978″			
Kapellenberg	sächsische	50° 11′ 19,191″	— 1° 15′ 13,778″	— 123481,575	— 89526,667	— 0° 57′ 47,517″
Ochsenkopf	sächsische	50° 1′ 52,288″	— 1° 44′ 40,295″	— 140289,794	— 124967,600	— 1° 20′ 13,797″
Großenhain	sächsische	51° 18′ 20,050″	0° 0′ 0,000″	0,000	0,000	0° 0′ 0,000″

[1]) Die sächsischen Angaben wurden zuerst auf das preußische Zentrum (Turmachse der Pleißenburg) reduziert. Als Quellen für die Tabelle sind zu nennen: Astronomisch-geodätische Arbeiten für die Europäische Gradmessung im Königreich Sachsen. II. Abteilung: Das trigonometrische Netz 1. Ordnung, bearbeitet von A. Nagel. Berlin 1890, S. 768.

Die K. preußische Landestriangulation. Abrisse, Koordinaten und Höhen, 15., 16. und 21. Teil, herausgegeben von der trig. Abteilung der Landesaufnahme. Berlin 1904, 1910, 1913.

können, müssen sie auf das preußische System bezogen werden. Das scheint gar keine Schwierigkeiten zu haben, da das sächsische Hauptdreiecksnetz sowohl wie das preußische zu den genauesten gehören, die es gibt und ein enger Anschluß beider Netze von vornherein zu erwarten ist. Immerhin wird es sich nicht empfehlen, den Anschluß des sächsischen Netzes an das preußische an einer einzelnen Seite, als welche Stelzen—Döbra zunächst in Betracht käme, vorzunehmen, weil sich deren zufällige Längen- und Richtungsabweichung in verstärktem Maße auf die zukünftige bayerische Anschlußseite Döbra—Kapellenberg, die erheblich länger als Stelzen—Döbra ist, übertragen würden. Ich habe es daher vorgezogen, den ganzen über 200 Kilometer betragenden Linienzug: Döbra, Stelzen, Kuhberg, Reust, Röden, Leipzig, Collm, Strauch für den Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Netzes zu benützen. Zum Vergleich seien in nebenstehender Tabelle I die preußischen und sächsischen geographischen Koordinaten der 8 Anschlußpunkte sowie die sächsischen Koordinaten der im preußischen Netz neuzubestimmenden Punkte Kapellenberg und Ochsenkopf zusammengestellt. In die gleiche Tabelle sind noch die sächsischen rechtwinklig sphärischen Koordinaten nach Soldner, sowie die Meridiankonvergenz, bezogen auf den sächsischen Ausgangspunkt Großenhain, aufgenommen. Beiderlei Koordinaten sind auf dem Besselschen Sphäroid gerechnet, aber selbständig astronomisch orientiert, die preußischen nach dem Rauenberg bei Berlin, die sächsischen nach dem Punkte Großenhain. Die Unterschiede der geographischen Koordinaten beruhen außer auf der Verschiedenheit der Orientierung noch auf einer Verschiedenheit des Maßstabes; sie betragen in der geographischen Breite zwischen 2,26″ und 2,40″, während sich der aus dem Vergleich der geographischen Längen gemeinsamer Punkte ermittelte Längenunterschied der beiden Zählungen zwischen 31° 13′ 21,13″ und 21,37″ bewegt. Die größte Schwankung des Unterschiedes der beiderlei Breiten beträgt 0,04″ gleich 1,2 m linear, jene der Längen 0,24″ gleich 4,8 m linear. Statt die geographischen

Tabelle II.

Seitenlogarithmen und Azimute.

	Strauch-Collm	Collm-Leipzig	Leipzig-Röden	Röden-Reust	Reust-Kuhberg	Kuhberg-Stelzen	Stelzen-Döbra
preußische	4,605112.0	4,6495730.6	4,5864004.6	4,3247823.6	4,4133281.2	4,3595643.7	4,5047061.9
sächsische	4,605081.8	4,6495663.5	4,5863923.0	4,3247756.3	4,4133225.8	4,3595583.9	4,5046986.5
preußisch-sächsische	30.2	67.1	81.6	67.3	55.4	59.8	75.4
preuß.	257° 17′ 25,111″	274° 56′ 54,139″	203° 53′ 25,637″	171° 18′ 10,367″	175° 48′ 13,734″	237° 31′ 43,105″	213° 8′ 32,425″
sächs.	22,450″	51,218″	22,800″	6,342″	10,050″	39,434″	28,935″
preuß.-sächs.	2,661″	3,221″	2,837″	4,025″	3,684″	3,671″	3,490″

Tabelle III.

Brechungswinkel des Linienzuges Strauch—Döbra.

	Strauch-Collm-Leipzig	Collm-Leipzig-Röden	Leipzig-Röden-Reust	Röden-Reust-Kuhberg
preußische	198° 5′ 58,777 (58,097)	109° 26′ 24,387 (23,368)	147° 35′ 9,420 (9,038)	184° 27′ 56,633 (56,509)
sächsische	58,167 (57,994)	24,692 (24,822)	8,196 (8,270)	56,963 (57,309)
preußisch-sächsische	+ 0,610 (+ 0,103)	- 0,305 (- 1,454)	+ 1,224 (+ 0,768)	— 0,330 (- 0,800)

Reust-Kuhberg-Stelzen	Kuhberg-Stelzen-Döbra
241° 42′ 14,768 (14,742)	165° 49′ 25,683 (25,805)
14,766 (15,065)	25,829 (25,682)
+ 0,002 (— 0,323)	- - 0,146 (+ 0,123)

Die eingeklammerten Zahlen stellen die beobachteten, die anderen die ausgeglichenen Werte dar.

Koordinaten der gemeinsamen Punkte beider Systeme zu vergleichen, kann man auch die Seiten und Winkel des gemeinsamen Linienzuges zusammenstellen, was in Tabelle II und III geschehen ist. Den ausgeglichenen Winkeln sind die beobachteten in Klammern beigesetzt. Die Unterschiede in den Seitenlogarithmen bewegen sich zwischen 30 und 82 Einheiten der 7. Dezimale und betragen im Mittel 58 E. d 7. D. Ein Vergleich der Azimute der Seiten des Linienzuges der in Tabelle II durchgeführt ist, weist auf eine Verdrehung der beiden Linienzüge gegeneinander hin, die zwischen 2,7″ und 4,0″ im Mittel 3,35″ beträgt.

Um einen besseren Anschluß des sächsischen Netzes an das preußische zu bekommen, verschieben wir vorläufig den sächsischen Ausgangspunkt Großenhain um $\delta\varphi_0 = 2{,}249''$ nach Norden und setzen dessen Länge im preußischen System auf $L_0 = 31^\circ 13' 21{,}3705''$ fest. Wir drehen ferner das sächsische Netz mit Beibehaltung seiner Form so gegen den Meridian von Großenhain, daß das Azimut dort um $\vartheta = 3{,}35''$ größer wird und multiplizieren die sächsischen Dreiecksseiten mit dem Faktor $1 + k = 1{,}0000144$ (58 E. d. 7. D. entsprechend). Dadurch werden die sächsischen Koordinaten offenbar den preußischen genähert.

Um die zugehörigen Koordinatenänderungen zu berechnen, beziehen wir uns auf beistehende Fig. 1, in welcher O den Ausgangspunkt Großenhain, P einen beliebigen Punkt der sächsischen Triangulation mit den Soldnerschen Koordinaten x und y bedeutet. γ ist die Meridiankonvergenz in P, s die Länge OP und α das Azimut von OP in O.

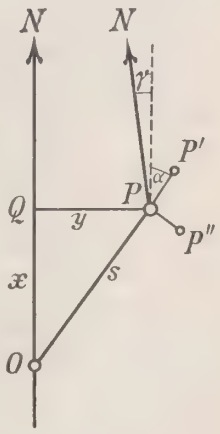


Fig. 1.

Es ist dann $PP' = ks$ die Verschiebung von P infolge der Maßstabänderung, die in P das genäherte Azimut $\alpha + \gamma$ hat. Die nördliche Komponente von PP' wird daher $ks\cos(\alpha + \gamma)$, die östliche $ks\sin(\alpha + \gamma)$.

Es sei ferner $PP'' = \frac{\vartheta s}{\varrho''}$ die senkrecht zu OP vor sich gehende Verschiebung von P infolge der Drehung um den Winkel ϑ. ϱ'' bedeutet die Länge des Radius in Sekunden. Diese Verschiebung hat das Azimut in $P: \alpha + \gamma + 90^0$. Ihre nördliche Komponente ist: $-\frac{\vartheta s}{\varrho''} \sin(\alpha+\gamma)$, ihre östliche: $\frac{\vartheta s}{\varrho''} \cos(\alpha+\gamma)$. Durch die Verschiebung von O um $\delta\varphi_0$ nach Norden wird P um $\delta\varphi_0 m_0 \cos\gamma$ nach Norden und um: $\delta\varphi_0 m_0 \sin\gamma$ nach Osten verschoben. m_0 ist dabei die Länge einer Breitensekunde in O. Die Gesamtverschiebung infolge der drei Veränderungen ergibt eine nördliche Verschiebung von:

$$\delta\varphi_0 m_0 \cos\gamma - \frac{\vartheta s}{\varrho''} \sin(\alpha+\gamma) + ks\cos(\alpha+\gamma)$$

und eine östliche Verschiebung von:

$$\delta\varphi_0 m_0 \sin\gamma + \frac{\vartheta s}{\varrho''} \cos(\alpha+\gamma) + ks\sin(\alpha+\gamma).$$

Verwandelt man diese linearen Verschiebungen durch Division mit dem linearen Maß der Breitensekunde m_p bzw. der Längensekunde n_p, das sich auf den Punkt P bezieht, in Winkelmaß und fügt man bei den geographischen Längen noch den konstanten Wert L_0 hinzu, so ergeben sich die Veränderungen der sächsischen geographischen Koordinaten $\delta\varphi$ und L mittels der Formeln:

$$\delta\varphi = \delta\varphi_0 \frac{m_0\cos\gamma}{m_p} - \vartheta\frac{s\sin(\alpha+\gamma)}{\varrho'' m_p} + k\frac{s\cos(\alpha+\gamma)}{m_p}$$

$$L = \delta\varphi_0 \frac{m_0\sin\gamma}{n_p} + \vartheta\frac{s\cos(\alpha+\gamma)}{\varrho'' n_p} + k\frac{s\sin(\alpha+\gamma)}{n_p} + L_0.$$

Zur Berechnung der Koeffizienten von ϑ und k in obigen Formeln können wegen der Kleinheit der zu erwartenden Verschiebungen unbedenklich die Größen α und s aus x und y durch ebene Rechnung (ohne Rücksicht auf sphärische Korrektionen) gefunden werden.

Tabelle IV.

Koeffizienten der Fehlergleichungen für Breite und Länge.

Punkt	Fehlergleichungen für die geographischen Breiten				Fehlergleichungen für die geographischen Längen				
	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\vartheta$	Δk	l	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\vartheta$	Δk	ΔL_0	l'
Strauch . . .	1	− 0,000235	+ 287,6	− 0,00595	+ 0,000465	+ 0,002229	+ 77,5	1	+ 0,00822
Collm	1	+ 0,005950	− 9,7	− 0,00351	− 0,011816	− 0,000075	− 1957,7	1	− 0,00823
Leipzig . . .	1	+ 0,012930	+ 91,7	− 0,00356	− 0,025708	+ 0,000710	− 4257,4	1	− 0,00527
Röden	1	+ 0,015366	− 1059,3	+ 0,00322	− 0,030212	− 0,008144	− 5025,0	1	− 0,00521
Reust	1	+ 0,014871	− 1733,3	+ 0,00346	− 0,029042	− 0,013269	− 4843,4	1	− 0,00114
Kuhberg . . .	1	+ 0,014578	− 2568,2	+ 0,00286	− 0,028240	− 0,019566	− 4725,3	1	+ 0,00159
Stelzen . . .	1	+ 0,017556	− 2979,3	+ 0,00101	− 0,033870	− 0,022640	− 5676,4	1	+ 0,00242
Döbra	1	+ 0,020912	− 3751,8	+ 0,00282	− 0,040045	− 0,028387	− 6731,8	1	+ 0,00758
		$p = 2{,}5$				$p = 1{,}0$			

Werden mit den oben angegebenen Konstanten $\delta\varphi_0$, ϑ, k und L_0 die Veränderungen gerechnet, so ergibt sich schon ein recht befriedigender Anschluß an die preußischen Koordinaten. Die noch auftretenden Unterschiede sind aus den Absolutgliedern der folgenden Ausgleichung (Tabelle IV) zu ersehen. Die größten Unterschiede finden sich in der Breite von Strauch zu 0,0059″ = 18 cm linear und in den Längen von Strauch und Collm zu 0,0082″ = 16 cm linear. Der mittlere Koordinatenunterschied ist 13 cm linear.

Um nun die günstigsten Werte für die vier Konstanten, welche die Verschiebung des sächsischen Netzes auf das preußische bestimmen, zu erhalten, sollen an den vorhin betrachteten Näherungswerten dieser Konstanten Verbesserungen $\Delta\varphi_0$, $\Delta\vartheta$, Δk und ΔL_0 so angebracht werden, daß die mit den verbesserten Konstanten berechnete Summe der Quadrate der linearen Koordinatenunterschiede ein Minimum wird. Die zu den geographischen Breiten und Längen gehörigen Fehlergleichungen sind in umstehender Tabelle IV zusammengefaßt. Wegen der verschiedenen Größen der Längen- und Breitensekunde (30,9 und 19,7 m) wird den Gleichungen für die Breiten das Gewicht $30{,}9^2 : 19{,}7^2 = 2{,}5$ rund zugewiesen.

Das Koeffizientenschema der Normalgleichungen lautet folgendermaßen:

$\Delta\varphi_0$	$\Delta\vartheta$	$10^5\Delta k$	ΔL_0	l bzw. l'
20,00611	0,25790	— 0,28286	— 0,19847	0,00088
	0,00600	— 0,00008	— 0,08914	0,00016
		0,02549	— 0,33140	— 0,00082
			8,00000	— 0,00004
				0,00051.

Die Auflösung gibt als Minimum der Fehlerquadratsumme 0,00041, woraus der mittlere Fehler m der Gewichtseinheit den Wert

$$m = \pm\sqrt{\frac{0{,}00041}{16-4}} = \pm 0{,}00585 \text{ Längensekunden}$$

oder in linearem Maße 117 mm erhält. Letztere Zahl ist zugleich der mittlere Koordinatenunterschied, der durch die systematische Ausgleichung nur wenig (von 128 auf 117 mm) verringert wurde.

Für die Verbesserungen der vier Konstanten wurde gefunden:

$$\Delta\varphi_0 = 0{,}00257'' \pm 0{,}00242;\quad \Delta\vartheta = -0{,}0819'' \pm 0{,}1400;$$
$$10^5.\Delta k = 0{,}1071 \pm 0{,}0670;\quad \Delta L_0 = 0{,}00359 \pm 0{,}0038.$$

Zusammen mit den Näherungswerten ergeben sich als endgültige Werte der Konstanten:

$$\delta\varphi_0 = 2{,}25157'' \pm 0{,}00242;\quad \vartheta = 3{,}2681'' \pm 0{,}1400;$$
$$k = 0{,}00001547 \pm 0{,}00000067;\quad L_0 = 31^\circ 13' 21{,}3741'' \pm 0{,}0038.$$

Korrigiert man mit diesen Konstanten die sächsischen Koordinaten, so nähern sie sich den preußischen bis auf folgende Werte:

preuß.-sächs.	Strauch	Collm	Leipzig	Röden
Breite:	0,00305	0,00143	0,00195	— 0,00344
Millimeter:	94	44	60	— 106
Länge:	— 0,01172	0,00675	0,00633	0,00640
Millimeter:	— 230	132	124	125

preuß.-sächs.	Reust	Kuhberg	Stelzen	Döbra
Breite:	— 0,00296	— 0,00148	0,00104	0,00033
Millimeter:	— 92	— 46	32	10
Länge:	0,00169	— 0,00167	— 0,00173	— 0,00621
Millimeter:	33	— 33	— 34	— 122

Die Nachrechnung der Fehlerquadratsumme ergibt 0.0004087 statt 0,00041 aus der Auflösung der Normalgleichungen.

Infolge der Ausgleichung ist der Extremwert der Koordinatenunterschiede bei Strauch von 17 auf 23 cm gestiegen. In Fig. 2 findet sich eine schematische Darstellung des Zusammenpassens der preußischen und sächsischen Vermessung, aus der ersichtlich ist, daß die verbleibenden Differenzen in erster Linie

Fig. 2.

auf Unterschiede des Polygonwinkels bei Leipzig zurückzuführen sind. Leipzig ist ein Punkt der preußischen Vermessung, in welchem der Zwangsanschluß des thüringischen Dreiecksnetzes an die Hannover-sächsische Dreieckskette erfolgt. Der letztgenannten gehört die Seite Leipzig—Collm an, während Collm —Strauch zu der märkisch-schlesischen Dreieckskette gehört, welche wieder für sich ausgeglichen ist. Daraus erklärt sich wohl der große Maßstabsunterschied der ebenerwähnten Seiten (67 und 30 E. d. 7. Dez.).

Für spätere Verwertung füge ich noch das System der Gewichtskoeffizienten Q_{ik}, wie es aus der Auflösung der Normalgleichungen hervorgeht, bei:

$$\begin{array}{llll} Q_{11} = 0{,}1706, & Q_{12} = -7{,}293, & Q_{13} = 1{,}881, & Q_{14} = 0{,}000942 \\ & Q_{22} = 575{,}5, & Q_{23} = 4{,}060, & Q_{24} = 6{,}400 \\ & & Q_{33} = 132{,}7, & Q_{34} = 5{,}603 \\ & & & Q_{44} = 0{,}4283. \end{array}$$

Die bei der Ausgleichung gefundenen mittleren Fehler von Δq_0 und ΔL_0, nämlich $\pm 0{,}00242$ und $\pm 0{,}00382$ gestatten einen Schluß auf die Genauigkeit, mit welcher aus der Ausgleichung die Lage des Punktes Großenhain, des Ausgangspunktes der sächsischen Triangulation, im preußischen System hervorgeht. Der mittlere Koordi-

natenfehler wird nämlich in der Nordsüdrichtung $30{,}9 \cdot 0{,}00242 = 75$ mm, in der Ostwestrichtung $19{,}6 \cdot 0{,}00382 = 75$ mm, also sehr nahe gleich. Aber auch die Fehlerellipse ist fast vollkommen kreisförmig, wie aus der Kleinheit von $Q_{14} = 0{,}000942$ im Verhältnis zu $Q_{11} = 0{,}1706$ und $Q_{44} = 0{,}4283$ hervorgeht. Es ist nämlich der mittlere Fehler m_x in der Nordsüdrichtung $m_x^2 = 30{,}9^2 m^2 \cdot Q_{11}$, jener in der Ostwestrichtung $m_y^2 = 19{,}6^2 m^2 Q_{44}$, wobei m den mittleren Fehler der Gewichtseinheit (0,00585) bedeutet. Auf ein um den Winkel α verdrehtes Koordinatensystem bezogen sind dann die Koordinaten ξ, η eines Punktes, dessen frühere Koordinaten x und y waren:

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$\eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Hieraus wird:

$$m_\xi^2 =$$
$$30{,}9^2 m^2\cos^2\alpha\, Q_{11} + 2\cdot 30{,}9\cdot 19{,}6\, m^2\cos\alpha\sin\alpha\, Q_{14} + 19{,}6^2 m^2\sin^2\alpha\, Q_{44}$$
$$= m^2\{162\cos^2\alpha + 1{,}1\cos\alpha\sin\alpha + 165\sin^2\alpha\}.$$

Dieser Ausdruck wird wegen der Kleinheit des mittleren Gliedes und der angenäherten Gleichheit der Koeffizienten der äußeren Glieder fast konstant, so daß der mittlere Koordinatenfehler im Azimut α von lezterem so gut wie unabhängig ist.

Mit den endgültigen Werten der Konstanten können nun auch die sächsischen Punkte Kapellenberg und Ochsenkopf in das preußische System umgerechnet werden. Dazu müssen die Koeffizienten in den Formeln für $\delta\varphi$ und L bestimmt werden, welche folgendermaßen lauten:

Kapellenberg $\delta\varphi = \delta\varphi_0 + 0{,}01372\,\vartheta - 4044{,}6\,k,$
$L = L_0 - 0{,}02619\,\delta\varphi_0 - 0{,}03055\,\vartheta - 4408{,}4\,k,$
Ochsenkopf $\delta\varphi = \delta\varphi_0 + 0{,}01909\,\vartheta - 4633{,}7k,$
$L = L_0 - 0{,}03623\,\delta\varphi_0 - 0{,}03488\,\vartheta - 6113{,}6\,k.$

Hieraus folgen nachstehende Koordinaten im preußischen System:

	φ	λ
Kapellenberg	$50^0 11' 21{,}4278'' \pm 0{,}0022$	$29^0 58' 7{,}3691'' \pm 0{,}0034$
Ochsenkopf	$50^0 1' 54{,}5303'' \pm 0{,}00265$	$29^0 28' 40{,}7889'' \pm 0{,}00415.$

Zur Berechnung der mittleren Fehler wurden die obenstehenden Transformationsformeln und die 10 Gewichtskoeffizienten $Q_{11} \ldots Q_{44}$ benützt, z. B.:

$$m_x^2 = m^2 \{Q_{11} + 2 \cdot 0{,}01372\, Q_{12} + 0.01372^2\, Q_{22} - 2 \cdot 4044{,}6\, Q_{23} + 4044{,}6^2\, Q_{33}\} \text{ usw.}$$

Rechnet man die mittleren Fehler der geographischen Koordinaten wieder in Millimeter um, indem man sie mit den Millimeterzahlen einer Breiten- bzw. Längensekunde multipliziert, so ergibt sich die mittlere Unsicherheit von Kapellenberg in nordsüdlicher Richtung zu 67,8 mm, in ostwestlicher Richtung zu 68,1 mm, also wiederum fast gleich groß. Bei Ochsenkopf werden die entsprechenden Zahlen 82,0 und 82,5 mm. Daß auch hier die mittleren Fehlerellipsen fast genau kreisförmig sind, kann man in folgender Weise zeigen.

Man sucht ähnlich wie bei Großenhain den mittleren Fehler für eine Koordinate, die das Azimut α hat, und überzeugt sich, daß sich derselbe fast unabhängig von α ergibt. Da die Rechnung hier recht umständlich würde, habe ich mich begnügt, den mittleren Fehler für die beiden Azimute 45° und 135° zu rechnen und bei Kapellenberg 67,9 und 67,7 mm, bei Ochsenkopf 82,4 und 81,7 mm gefunden, was die Kreisähnlichkeit der Fehlerellipsen hinlänglich bestätigt. Sie wäre übrigens durch Betrachtungen allgemeiner Natur über den Zusammenschluß zweier annähernd kongruenter Figuren, auf welche ich vielleicht bei anderer Gelegenheit zu sprechen komme, vorauszusehen gewesen. Die geringen mittleren Koordinatenfehler und die günstige Gestalt der Fehlerellipse bei den Punkten Kapellenberg und Ochsenkopf lassen sie als durchaus geeignet für weitere Zwangsanschlußpunkte der bayerischen Triangulation erscheinen. Es beträgt beispielsweise die aus dem Anschluß der sächsischen an die preußische Triangulation hervorgehende Unsicherheit der Richtung Döbra—Kapellenberg nur 0,31″ und selbst für die kurze Seite Döbra—Ochsenkopf nicht mehr als 0,56″. Die Un-

sicherheit in der Länge beläuft sich bei der erstgenannten Seite auf etwa 9, bei der zweiten auf 14 E. d. 7. Dez.

Die oben angeführten Koordinaten von Kapellenberg und Ochsenkopf weichen beträchtlich von jenen ab, die in einer früheren Mitteilung[1]) als Näherungskoordinaten dieser Punkte im preußischen System angegeben waren. Bei Kapellenberg beruht dies darauf, daß damals nur die auf den bayerischen Katasterblättern graphisch ermittelte Position in Rechnung gestellt wurde, da ja Kapellenberg kein Punkt der alten bayerischen Triangulation ist. Bei Ochsenkopf bezieht sich die frühere Rechnung auf das alte bayerische Zentrum, welches vom sächsischen stark verschieden ist. Berücksichtigen wir, daß nach den Zentrierungsmessungen des K. B. Katasterbureaus, welche mir Herr Regierungsrat Prof. Dr. Bischoff gütigst zur Verfügung stellte, das bayerische Zentrum um 0,3531" nördlicher und um —0,9768" östlicher als das sächsische liegt, so folgt folgende Position für das bayerische Zentrum:

Ochsenkopf		
sächs. Zentrum	$\varphi = 50^\circ 1' 54{,}5303''$	$\lambda = 29^\circ 28' 40{,}7889''$
	0,3531	— 0,9768
Ochsenkopf		
bayer. Zentrum	$50^\circ 1' 54{,}8834''$	$29^\circ 28' 39{,}8121''$
Aus bayer. Koord.		
früher gefunden:	$50^\circ 1' 54{,}898$	$29^\circ 28' 39{,}781$
Unterschied		
sächs.-bayer.	— 0,0146"	0,0311"
	= — 0,45 m	= 0,61 m.

Die verbleibenden Unterschiede liegen ganz innerhalb des früher bestimmten mittleren Fehlers der alten bayerischen Koordinaten von 0,8 m.

Einige Aufmerksamkeit verdient noch die Größe

$$k = 0{,}00001547 \pm 67,$$

welche zur Einheit addiert den Faktor darstellt, mit dem man die Seitenlängen der sächsischen Triangulierung multiplizieren

[1]) Vergleiche das Zitat auf der ersten Seite der Abhandlung.

muß, um sie in preußische zu verwandeln. Der zugehörige Logarithmus beträgt 67 ± 3 E. d. 7. Dez. Bedenkt man, daß die preußischen Seiten schon einer Korrektion von $+ 58$ E. d. 7. Dez. zur Überführung in internationale Meter bedürfen, so wird diese logarithmische Korrektion der sächsischen Seiten zur Überführung auf internationale Meter 125 E. d. 7. Dez. oder 1 : 35000 der Länge.

Im Vergleich zu dieser unerwartet großen Korrektion ist das Seitenverhältnis beiderlei Triangulationen wenig schwankend. Der mittlere Fehler der logarithmischen Korrektion einer der 7 verglichenen Seiten ist nur 16,8 E. d. 7. Dez. oder 1 : 250000 der Länge. Vergleicht man im Anschluß daran die dem Linienzug Strauch — Döbra angehörigen Brechungswinkel beiderlei Triangulationen, so ergibt sich ein mittlerer Unterschied für die beobachteten und auf der Station ausgeglichenen Winkel von 0,749″ und für die im Netz ausgeglichenen Winkel von 0,590″. Wollte man beiden Triangulationen gleiche Genauigkeit zubilligen, so wäre der mittlere Fehler eines beobachteten Winkels auf 0,53″, eines ausgeglichenen auf 0,42″ zu schätzen. Nach der Ausgleichung des sächsischen Netzes für sich ist der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels nur 0,33″.

Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Netzes kann uns schließlich noch dazu dienen, die Lotabweichung des sächsischen Ausgangspunktes Großenhain gegenüber dem preußischen Rauenberg bei Berlin abzuleiten. Zu diesem Zwecke rechnen wir die Länge und die Azimute der geodätischen Linie Rauenberg Großenhain nach den Formeln von Helmert.

Die preußischen geodätischen Koordinaten von Großenhain ergeben sich aus den sächsischen (51°18′20,050″ Breite und 0° Länge) durch Hinzufügung der Konstanten δq_0 und L_0 und werden demnach in der Helmertschen Bezeichnung:

$$B_k = 51°18'22{,}302'' \qquad L_k = 31°13'21{,}374''.$$

Die Koordinaten für Rauenberg sind:

$$B_i = 52°27'12{,}021'' \qquad L_i = 31°2'4{,}928''.$$

Hieraus ergibt sich als Logarithmus der Entfernung

$$\lg S = 5{,}1081464,$$

für das Azimut in Rauenberg

$$T_{ik} = 174^\circ 8' 15{,}04'',$$

für jenes in Großenhain

$$T_{ki} = 354^\circ 17' 7{,}24''.$$

Wir rechnen auch noch die 18 Koeffizienten p, q, r für die Übertragung der Lotabweichung:

$p_1 = -1{,}00090$	$q_1 = 0{,}00399$	$r_1 = -0{,}00671$
$p_2 = 0{,}00159$	$q_2 = -0{,}98416$	$r_2 = -1{,}00000$
$p_3 = 0{,}03220$	$q_3 = -0{,}00514$	$r_3 = -0{,}00514$
$p_4 = 0{,}00200$	$q_4 = 0{,}01997$	$r_4 = -1{,}26103$
$p_5 = -4130{,}5$	$q_5 = 659{,}5$	$r_5 = 659{,}5$
$p_6 = 591{,}1$	$q_6 = 407{,}4$	$r_6 = 407{,}4.$

Zur Überführung auf internationale Meter hat man dem Logarithmus der Entfernung S 58 E. d. 7. Dez. hinzuzufügen, was eine Verlängerung der Strecke um $dS = 1{,}71$ m bedeutet. Dieser Verlängerung entspricht eine Breitenänderung von Großenhain um $d\varphi = -p_3 dS = -0{,}0322 \cdot 1{,}71 = -0{,}055''$ und eine Längenänderung $\delta\lambda = -q_3 dS = 0{,}00311 \cdot 1{,}71 = 0{,}005''$, so daß die richtiggestellten geographischen Koordinaten von Großenhain

$$\varphi = 51^\circ 18' 20{,}05'' \qquad \lambda = 31^\circ 13' 21.379''$$

werden. Die astronomisch bestimmten Koordinaten sind dagegen

$$\varphi' = 51^\circ 18' 22{,}247'' \qquad \lambda' = 31^\circ 13' 14{,}378''.$$

Die Breite φ' ist direkt bestimmt, die Länge λ' durch Hinzufügung des astronomisch bestimmten Längenunterschiedes von $0^m 44{,}630^s = 11' 9.45''$ der Punkte Rauenberg—Großenhain zur Länge von Rauenberg gerechnet[1]).

[1]) Dieser Längenunterschied ist der Ausgleichung des zentraleuropäischen Längennetzes von Prof. Th. Albrecht, Astronomische Nachrichten Bd. 167, Nr. 3993 - 94, S. 157 entnommen.

Es ergibt sich hieraus unter Zugrundelegung des Besselschen Ellipsoides eine Lotabweichung von Großenhain gegenüber Rauenberg im Betrage von

$$\xi = \varphi' - \varphi = -2{,}197''; \quad \lambda' - \lambda = \eta : \cos\varphi = -7{,}001''$$
$$\text{oder } \eta = -4{,}377''.$$

Die Verlängerung $dS = 1{,}71$ m hat auch noch eine Azimutänderung in Großenhain im Betrage

$$d\alpha = -\mathfrak{r}_3 dS = 0{,}00321 \cdot 1{,}71 = 0{,}005''$$

im Gefolge. Das sächsische Netz ist in Großenhain richtig astronomisch orientiert. An das preußische Netz, das in Rauenberg richtig astronomisch orientiert ist, angehängt, zeigt es in Großenhain eine Verdrehung von $\vartheta = 3{,}268''$, wozu noch das eben ermittelte $d\alpha = 0{,}005''$ hinzukommt. Der Unterschied zwischen der astronomischen Orientierung in Großenhain und der von Rauenberg geodätisch übertragenen beträgt somit $3{,}273''$. Aus ihm würde sich eine Lotabweichung

$$\eta = -3{,}273'' \operatorname{ctg}\varphi' = -2{,}622''$$

in ostwestlicher Richtung ergeben. In der Laplaceschen Gleichung, welche die Gleichheit beider Bestimmungen von η ausdrückt, findet sich demnach ein Widerspruch von: $-4{,}377 + 2{,}622 = -1{,}755''$, der Beobachtungsfehlern zur Last zu legen ist. Das einfache Mittel beider Bestimmungen ist $\eta = -3{,}500''$, dem ein Unterschied der Längen $\lambda' - \lambda = -5{,}598''$ entspricht.

Herr A. Börsch hat aus anderem Material als Lotabweichungskomponenten für Großenhain gegen Rauenberg auf Bessels Ellipsoid $\varphi' - \varphi = -2{,}41''$ und $\lambda' - \lambda = -7{,}89''$ gefunden[1]).

Nach dieser Abschweifung seien noch die geographischen Koordinaten der bayerischen Anschlußpunkte im preußischen System zusammengestellt, welche dann in passende rechtwinklige Koordinaten umgesetzt werden können.

[1]) Lotabweichungen Heft IV. Veröffentlichungen des K. preuß. geod. Instituts. Neue Folge, Nr. 39. Berlin 1909, S. 96 und 97.

	φ	λ
Steigekoppe	50° 2'37,2611"	26°58'24,6214"
Kreuzberg	50°22'16,4473"	27°38'53,1882"
Großgleichberg, preuß. Punkt	50°23'21,8296"	28°15'37,3092"
Döbra, Zentrum	50°16'45,9792"	29°18'40,5978"
Ochsenkopf, sächs. Pfeiler	50° 1'54,5303"	29°28'40,7889"
Kapellenberg	50°11'21,4278"	29°58' 7,3691"

Um nun zu rechtwinkligen Koordinaten dieser Punkte zu gelangen, welche der historischen Entwicklung und den Bedürfnisssen der bayerischen Landesvermessung Rechnung tragen, wurde den obigen geographischen Koordinaten jene von München (nördlicher Frauenturm) zugesellt, wie sie aus dem früheren Anschluß, der alten bayerischen Triangulation, an die preußische hervorgegangen sind, nämlich:

	φ	λ
München nördl. Frauenturm	48°8'22,6270"	29°14'27,8220".

Nunmehr werden alle Punkte mittels der Schreiberschen Tabellen konform auf die Gaußsche Bildkugel übertragen und auf dieser wird ein rechtwinklig sphärisches Koordinatensystem gewählt, das den Meridian von München als Abszissenachse und München selbst als Ausgangspunkt hat. Diese Koordinaten werden dann unter Beibehaltung der Abszissen und unter Streckung der Ordinaten in konforme, ebene, rechtwinklige Koordinaten übergeführt, deren künftige Einführung in Bayern ich für zweckmäßig halte. Diese Koordinaten finden sich in der Schlußtabelle V. Die Tabelle wurde noch um die Näherungskoordinaten sämtlicher zukünftiger bayerischer Hauptdreieckspunkte bereichert, welche damit ein Gegenstück zu der am Schlusse der früheren Arbeit angehängten Tabelle der genäherten geographischen Koordinaten der gleichen Punkte bildet. Die neuen Koordinaten wurden jedoch nicht aus den geographischen umgerechnet, sondern aus den alten rechtwinkligen unter sachgemäßer Benützung der früher ermittelten Drehung

und Maßstabsänderung des alten bayerischen Systems gegenüber dem preußischen. Die Umrechnung ist übrigens nur auf einige Dezimeter genau, genügt aber ausreichend für die Näherungswerte, die der Ausgleichung der endgültigen neuen Koordinaten zu Grunde zu legen sind. Für die durch [1]) hervorgehobenen Neupunkte des Netzes, deren genaue Lage im Gelände zurzeit noch nicht bestimmt ist, sind natürlich vor der Ausgleichung bessere Näherungskoordinaten als die hier gegebenen abzuleiten.

Berichtigung.

In der mehrerwähnten Abhandlung: „Das Verhältnis der bayerischenzur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München“ diese Berichte vom 7. Februar 1914 findet sich ein bedauerliches Versehen infolge eines Rechenfehlers bei der Auswertung des Übertragungskoeffizienten q_2 (S. 65), welcher den Wert $-0{,}91075$ statt -0.08925 haben soll. Hiedurch wird der erste Ausdruck für λ_k (S. 67) $3{,}926 \pm 0.52''$. Mit dem zweiten $1{,}853 \pm 1.30''$ zu einem Mittel kombiniert ergibt sich $\lambda_k = 3{,}637 \pm 0{,}48''$. Hienach ändert sich auch die Bemerkung auf Seite 68. Es muß heißen: Die Ostwestkomponente (nämlich der Lotabweichung auf dem Helmertschen Ellipsoid) beträgt $3{,}637''$. Der Widerspruch gegen die Laplacesche Bedingung hat sich vermindert; er beträgt jetzt in Länge $2{,}073 \pm 1{,}40''$, in Zenitdistanz $1.38 \pm 0{,}93''$.

Tabelle V.

Genäherte Koordinaten der zukünftigen Hauptdreieckspunkte und endgültige Koordinaten der möglichen Anschlußpunkte.

Hauptdreieckspunkte	Abszisse + nördlich x	Ordinate + östlich y	Bemerkung
1. Aenger	— 45902,7	— 106028,9	
2. Arber	109469,5	114079,2	
3. Asbach [1])	31801,2	— 22698,0	
4. Asten	— 3820,0	85784,8	
5. Aufkirchen b. Erding	18695,2	21507,4	
6. Braunau	18141,9	108252,5	
7. Brennberg	104081,5	60376,2	
8. Dillenberg	146385,3	— 57504,8	
9. Döbra [2])	237953,034	5004,305	Preußischer Punkt
10. Eggersdorf [1])	47985,4	30003,5	
11. Eichelberg	105190,2	10161,2	
12. Frankenwarte	184063,9	— 119985,4	
13. Großgleichberg [2])	250640,359	— 69733,207	Preußischer Punkt
14. Günzelhofen [1])	11402,0	— 33789,2	
15. Habsberg	130621,9	4289,2	
16. Haid	59604,4	90128,5	
17. Hesselberg	103943,5	— 76483,6	
18. Hochgern	— 42669,6	70758,3	
19. Hoheleite	144748,4	— 94881,1	
20. Hohenstein	161026,9	— 10902,8	
21. Johannesbrunn	39148,9	66618,6	
22. Kapellenberg [2])	228177,204	51957,864	Sächsischer Punkt
23. Königsberg [1])	84949,6	— 2924,8	
24. Kreuzberg [2])	249373,861	— 113309,665	Bayerischer Punkt
25. Mitbach	2958,7	33970,7	

[1]) Die Lage dieses Punktes im künftigen bayerischen Netz ist noch unsicher, da er noch nicht versteint ist.

[2]) Zukünftige Anschlußpunkte.

Hauptdreieckspunkte	Abszisse + nördlich x	Ordinate + östlich y	Bemerkung
26. Mühlhausen	61650,0	58810,2	
27. München	0,0	0,0	
28. Murleinsnest	195352,7	— 82934,4	
29. Oberhof	— 5999,4	58906,4	
30. Ochsenkopf[2])	210436,915	16981,653	Sächsischer Punkt
31. Peißenberg	— 37404,1	— 41987,3	
32. Pöttmes	47852,8	— 38176,4	
33. Rauchwanne	70345,1	— 78342,1	
34. Roggenburg	15999,1	— 99816,4	
35. Rohr	71922,9	28278,2	
36. Schweitenkirchen	40803,9	2501,2	
37. Silberhütte[1])	180387,2	59442,4	
38. Stauffersberg	34381,5	— 63434,5	
39. Steigekoppe[2])	214194,048	— 162399,595	Bayerischer Punkt
40. Teuchatz	191561,2	— 35928,6	
41. Wendelstein	— 48296,4	32959,6	
42. Wülzburg	98724,4	— 41573,5	

[1]) Die Lage dieses Punktes im künftigen bayerischen Netz ist noch unsicher, da er noch nicht versteint ist.

[2]) Zukünftige Anschlußpunkte. Die Koordinaten von Ochsenkopf bedürfen noch einer Kontrolle (abgeschl. am 6. VIII. 1914).

Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen bei Wechselstrombetrieb.

Von **A. Sommerfeld.**

Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Die Herren Rukop und Zenneck haben kürzlich[1]) interessante Versuche über die Schwingungen in einem Kondensatorkreis veröffentlicht, der durch einen Lichtbogen mit einem von Wechselstrom gespeisten Primärkreis gekoppelt ist. Wenngleich durch die systematische Anordnung der zahlreichen Aufnahmen (im ganzen 68 oscillographische oder mit der Braunschen Röhre gewonnene Photogramme) die theoretischen Verhältnisse von den Experimentatoren selbst schon hinreichend geklärt sind, so schien es doch nicht überflüssig, eine quantitative Theorie zu entwickeln, um so mehr als es sich um ein Problem handelt, das möglicherweise für die drahtlose Telegraphie bedeutungsvoll werden kann, das Problem: die Wechselzahl eines Generators auf den dreifachen (resp. fünffachen, siebenfachen etc.) Wert heraufzutransformieren.

Der wesentliche Schritt, um die mathematische Behandlung einfach und durchsichtig zu gestalten, war der, die Charakteristik des Lichtbogens aufs äußerste zu idealisieren. Nicht nur wurde angenommen, daß die Spannung des Lichtbogens durch den augenblicklichen Wert des im Lichtbogen fließenden Stromes gegeben sei (daß also von der Vorgeschichte des Stromes und den dadurch bedingten Temperatureinflüssen

[1]) Ann. d. Phys. 44, p. 97, 1914.

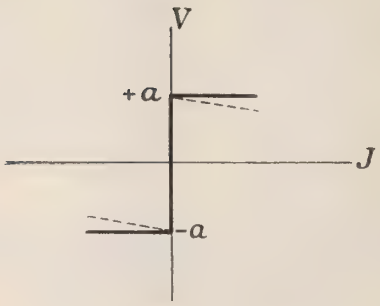


Fig. 1.

abgesehen werden kann), sondern es wurde diese Spannung auch als konstant und für die eine und die andere Stromrichtung als entgegengesetzt gleich angesetzt. Es wurde also die in Fig. 1 ausgezogene Charakteristik (V, J) zu Grunde gelegt. Dieselbe ist für die Gleichstrom-Lichtbogenschwingungen[1]) nach der Duddelschen Bedingung bekanntlich unzureichend; für deren Entstehen ist vielmehr wesentlich, daß die Charakteristik mit zunehmendem Strome fällt, wie in einfachster Schematisierung durch die punktierten Linien der Fig. 1 angedeutet wird. Es ist aber bereits von Rukop und Zenneck betont, daß Wechselstrom-Lichtbogenschwingungen auch bei durchweg steigender (resp. nicht fallender) Charakteristik möglich sind und daß hier im allgemeinen zwei verschiedene Erregungsarten zu unterscheiden sind: die Erregung der Schwingungen infolge fallender Charakteristik wie bei Gleichstrom und die insbesondere bei Wechselstrom wirksame Erregung infolge einer plötzlichen Neigungsänderung der Charakteristik. Indem wir die Charakteristik wie in Fig. 1 schematisieren, verzichten wir auf die erste Erregungsart, bringen aber

[1]) Die sogenannten „Lichtbogenschwingungen erster Art." Für die Theorie der „Lichtbogenschwingungen zweiter Art", bei denen der Lampenstrom während eines endlichen Bruchteils jeder Periode erlischt, ist dagegen unsere Charakteristik bereits von Herrn H. Barkhausen (Diss. Göttingen 1907) erfolgreich verwertet worden.

die zweite zum schärfsten Ausdruck. Wir kommen dabei zu theoretischen Resultaten, die das Neue der Wechselstromversuche treu wiedergeben und zwar auf mathematisch einfachem Wege mittels geschlossener, leicht diskutierbarer Ausdrücke. Die in Fig. 1 punktierte Charakteristik, welche das Hinzutreten der obengenannten ersten Erregungsart bewirkt, wird von anderer Seite behandelt werden.

Herrn Kollegen Zenneck verdanke ich die Anregung zu der nachfolgenden Studie und mehrfachen sachkundigen Rat bei ihrer Durchführung.

§ 1. Vernachlässigung der Dämpfung im Kondensatorkreis.

Schaltung und Bezeichnungen sind aus Fig. 2 ersichtlich. x sei der Speisestrom, y der Kondensatorstrom. Dann ist $J = x - y$ der Lampenstrom. Die Zeitpunkte, in denen Strom und Spannung im Lichtbogen sich umkehren, sind gegeben durch $J = 0$, d. h. $x = y$. Wir legen diese Zeitpunkte auf

$$t = 0, \quad \pm T, \quad \pm 2T, \quad \ldots \tag{1}$$

indem wir unter T die Halbperiode des Speisestromes verstehen. Die elektromotorische Kraft im Speisestromkreis setzen wir an zu

$$E = A \cos p(t - t_0), \quad p = \frac{\pi}{T}. \tag{2}$$

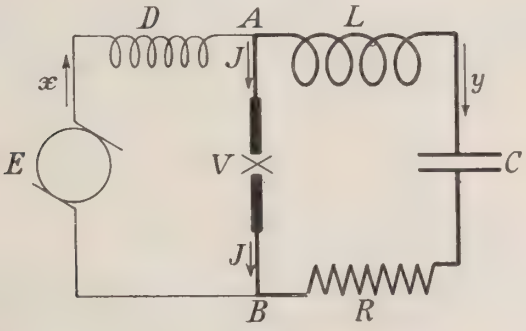


Fig. 2.

p ist also die Kreisfrequenz des Speisestromes; die Phase t_0 der elektromotorischen Kraft müssen wir zunächst unbestimmt lassen, da wir über den Zeitpunkt $t = 0$ bereits verfügt haben als Phase der Umkehr des Lichtbogenstromes. Die Phase t_0 der elektromotorischen Kraft wird sich erst am Ende der mathematischen Durchrechnung ergeben.

D ist die Selbstinduktion einer Drosselspule im Speisekreise, C, L, R Kapazität, Selbstinduktion und Widerstand im Kondensatorkreise. Wir setzen in diesem § zunächst $R = 0$, wodurch die Rechnung von allem mathematischen Ballast befreit wird. Im nächsten § werden wir die nicht unwesentlichen Modifikationen nachtragen, die bei Berücksichtigung des Widerstandes R in mathematischer und physikalischer Hinsicht entstehen; unter R sind dabei nicht nur die Ohmschen Widerstände sondern auch die Verluste zu verstehen, die in der Kapazität C oder (bei der Verwendung in der drahtlosen Telegraphie) in der Ausstrahlung ihren Ursprung haben.

Mit η bezeichnen wir die Ladung des Kondensators, so daß

$$y = \frac{d\eta}{dt}, \tag{3}$$

mit q die Kreisfrequenz des Kondensatorkreises, so daß

$$q^2 = \frac{1}{LC}; \tag{4}$$

das Verhältnis dieser Frequenz zur primären Wechselstromfrequenz p ist, wie von vornherein klar, für die Stärke der Kondensatorschwingungen bestimmend. Die Differentialgleichungen unseres Problems lauten dann:

$$E = D\frac{dx}{dt} + V, \tag{5}$$

$$V = L\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + q^2\eta\right), \tag{6}$$

wo V die Spannung zwischen den Punkten A und B der Lichtbogenbrücke bedeutet.

Diese Spannung V ist nun bei der in Fig. 1 angenommenen (ausgezogenen) Charakteristik und nach unserer Annahme über die Phasen der Umkehr des Lichtbogenstromes als explizite

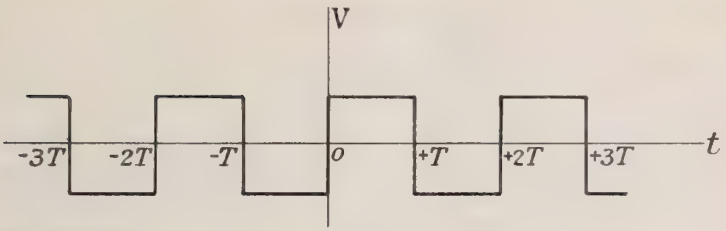


Fig. 3.

Funktion der Zeit durch Fig. 3 gegeben: V springt zwischen den konstanten Werten $\pm a$ hin und her und zwar in den Zeitpunkten (1). Wir entwickeln V in eine Fouriersche Reihe, welche wegen des (vom Zeitpunkte $t = 0$ beurteilten) ungeraden Charakters der V-Linie nur die Sinus-Glieder enthalten und nach Vielfachen des Argumentes $\frac{2\pi t}{2T} = pt$ fortschreiten wird:

$$V = \Sigma a_n \sin npt. \tag{7}$$

Die Ausrechnung gibt

$$a_n = \begin{cases} 0 & \dots\ n \text{ gerade} \\ \frac{4a}{\pi n} & \dots\ n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also

$$V = \frac{4a}{\pi} \sum_{1,3,5\dots} \frac{1}{n} \sin npt. \tag{8}$$

Um die Gleichung (6) für die Kondensatorladung η zu integrieren, setzen wir an

$$\eta = \Sigma b_n \sin npt. \tag{9}$$

Der Vergleich mit (7) resp. (8) liefert

$$b_n = \frac{a_n}{L} \frac{1}{q^2 - n^2 p^2} = \frac{4a}{L\pi n} \frac{1}{q^2 - n^2 p^2}. \tag{10}$$

Allerdings ist der Ansatz (9) nur eine partikuläre Lösung von (6); um die allgemeine Lösung hinzuschreiben, hätte man zu (9) noch hinzuzufügen:

$$\alpha \cos qt + \beta \sin qt \tag{11}$$

als freie Schwingung des Kondensatorkreises. Wenn wir nun auch $R = 0$ gesetzt haben, so können wir doch annehmen, daß im Verlaufe der Zeit bei Dauerbetrieb die freie Schwingung (11) durch Dämpfung verschwunden sei. Wir werden also mit der partikulären Lösung (9) allein operieren und zeigen, daß wir mit ihr allen Bedingungen des Problems genügen können. Aus (9) folgt noch durch Differentiation nach t

$$y = \Sigma npb_n \cos npt = \frac{4ap}{L\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{\cos npt}{q^2 - n^2p^2}. \tag{12}$$

Wir haben sodann die Gleichung (5) für den Speisestrom x zu integrieren. Es wäre auch hier möglich aber unnütz umständlich, die Lösung in Form von Fourierschen Reihen anzusetzen. Bei der Einfachheit der Gleichung (5) kommen wir nämlich durch direkte Quadratur zu einer geschlossenen Formel für x, die man auf dem Umweg über Fouriersche Reihen erst durch Summation derselben erhalten würde. Allerdings müssen wir dann, wegen des Sprunges in V, zwei verschiedene Intervalle und zwei verschiedene Darstellungen für x unterscheiden:

1) $$0 < t < T, \quad x = x_1 = \frac{1}{D}\int (E - a)\, dt,$$

2) $$-T < t < a, \quad x = x_2 = \frac{1}{D}\int (E + a)\, dt.$$

Dies liefert wegen (2)

$$\left| \begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{pD} \sin p(t - t_0) - \frac{a}{D} t + c_1, \\ x_2 &= \frac{A}{pD} \sin p(t - t_0) + \frac{a}{D} t + c_2. \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Die beiden Integrationskonstanten c_1, c_2 bestimmen sich leicht wie folgt: Zunächst muß x stetig verlaufen an den Übergangsstellen $t = 0$, $t = \pm T$, und zwar an letzterer in dem

Sinne, daß x_1 für $t = +T$ gleich x_2 für $t = -T$ wird. Wegen der Stetigkeit bei $t = 0$ erhält man sofort

$$c_1 = c_2 = c, \tag{14}$$

wodurch gleichzeitig der stetige Anschluß bei $t = \pm T$ gesichert ist, vgl. Fig. 4; hier stellt die gebrochene Linie $N0P$ die Terme $\frac{\pm at}{D}$ in x_1 bzw. x_2 dar, welche, sich periodisch fortgesetzt, in N und P, stetig aneinander anschließen (wenn auch natürlich mit unstetigen Neigungen). Um nun die Größe von c zu bestimmen, haben wir nur zu beachten, daß im Speisekreis ein wirklicher Wechselstrom fließen soll, d. h. ein Strom vom Mittelwert Null. Da nun in (13) der erste Term rechts für sich den Mittelwert 0 ergibt, der zweite Term aber, nach seiner Darstellung in Fig. 4, den durch die strichpunktierte Gerade dargestellten Mittelwert $\frac{-aT}{2D}$ besitzt, so muß die Integrationskonstante c so gewählt werden, daß sie diesen Mittelwert gerade aufhebt:

$$c = \frac{aT}{2D}. \tag{15}$$

Denselben Wert findet man natürlich auch analytisch aus der Bedingung

$$\int_0^T x_1\,dt + \int_{-T}^0 x_2\,dt = 0.$$

Mit (14) und (15) lautet die Darstellung (13) für den Speisestrom

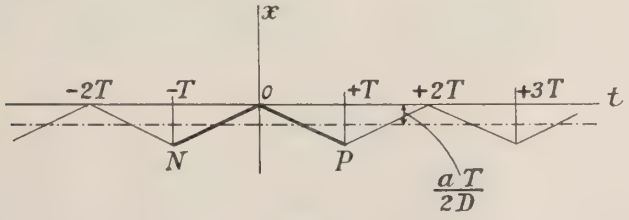


Fig. 4.

$$(16)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{pD}\sin p(t-t_0) - \frac{a}{D}\left(t-\frac{T}{2}\right), \quad 0<t<T, \\ x_2 &= \frac{A}{pD}\sin p(t-t_0) + \frac{a}{D}\left(t+\frac{T}{2}\right), \quad -T<t<0. \end{aligned}$$

Für Werte von t außerhalb des Intervalles $-T<t<+T$ ergibt sich der Wert des Stromes x natürlich durch periodische Wiederholung des für das Intervall $-T<t<+T$ erhaltenen Verlaufes, wie bereits in Fig. 4 teilweise (d. h. mit Ausschluß des ohnehin periodischen ersten Termes in (16)) angedeutet. Dies bedeutet, daß wir z. B. für das Intervall $(2n-1)T<t<(2n+1)T$ nicht die Formeln (16) direkt anzuwenden, sondern daß wir darin t durch $t-2nT$ zu ersetzen haben.

Nachdem wir in (12) und (16) y und x einzeln dargestellt haben, bleibt uns übrig, sie miteinander in Beziehung zu setzen. Dies geschieht durch die am Anfange dieses § geforderten Bedingungen des momentanen Lampenstromerlöschens

$$(17)\qquad x = y \quad \text{für} \quad t = 0,\ \pm T,\ \pm 2T,\ \ldots$$

Bezeichnet man mit x_0 den Wert von $x = x_1 = x_2$ für $t = 0$, ebenso mit y_0 den Wert von y für $t = 0$, entsprechend mit x_{+T} die Werte von x für $t = +T$ oder $t = -T$, so schließt man sofort aus (12) und (16)

$$\begin{aligned} x_{+T} &= x_{\pm 3T} = \ldots = -x_0 \\ x_{\pm 2T} &= x_{+4T} = \ldots = +x_0 \\ y_{+T} &= y_{\pm 3T} = \ldots = -y_0 \\ y_{\pm 2T} &= y_{\pm 4T} = \ldots = +y_0. \end{aligned}$$

Infolgedessen sind die sämtlichen Übergangsbedingungen (17) erfüllt, sobald wir nur die eine Bedingung für $t = 0$ erfüllt haben

$$(17a)\qquad x_0 = y_0.$$

Zu ihrer Befriedigung haben wir gerade noch einen unbestimmten Parameter zur Verfügung, die Phase t_0 im Ausdrucke der elektromotorischen Kraft. Indem wir diese

gemäß der Bedingung (17a) wählen, ist unser Problem mathematisch abgeschlossen.

Aus der ersten oder zweiten Gleichung (16) ergibt sich als Wert von x für $t = 0$ mit Rücksicht auf $T = \frac{\pi}{p}$:

$$x_0 = -\frac{A}{pD}\sin pt_0 + \frac{\pi}{2}\frac{a}{pD}. \tag{18}$$

Andererseits folgt aus (12) für $t = 0$:

$$y_0 = \frac{4ap}{L\pi}Q, \quad Q = \sum_{1,3,5,\ldots}\frac{1}{q^2 - n^2p^2}. \tag{19}$$

Die hier eingeführte Summe Q ist im wesentlichen die bekannte Partialbruchzerlegung der Tangens-Funktion. Man hat nämlich[1])

$$\operatorname{tg} z = \sum_{1,3,5,\ldots}\frac{8z}{n^2\pi^2 - 4z^2}, \tag{19a}$$

also

$$\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2p} = \frac{4qp}{\pi}\sum_{1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^2p^2 - q^2},$$

mithin

$$-Q = \sum_{1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^2p^2 - q^2} = \frac{\pi}{4qp}\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2p}. \tag{20}$$

Somit ergibt sich

$$y_0 = -\frac{a}{Lq}\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2p}. \tag{21}$$

Wegen (18) und (21) geht die Gleichung (17a) über in

$$\frac{A}{pD}\sin pt_0 = \frac{\pi}{2}\frac{a}{pD} + \frac{a}{Lq}\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2p}.$$

Indem wir die Abkürzung einführen

$$\xi = \frac{\pi q}{2p}, \tag{22}$$

[1]) Vgl. z. B. H. Burkhardt, Algebraische Analysis. § 84, Gleichung (12), p. 191.

schreiben wir die vorhergehende Bedingung übersichtlicher so:

$$A \sin p t_0 = \frac{\pi}{2} a \left(1 + \frac{D}{L} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi}\right). \tag{23}$$

Somit ist die ursprünglich unbestimmt gelassene Phase t_0 eindeutig bestimmt.

Wir sehen aber, daß diese Bestimmung nicht immer möglich ist. Vielmehr muß, damit der Sinus absolut genommen kleiner als 1 ausfällt, die Bedingung erfüllt sein

$$A > \frac{\pi}{2} a \left| 1 + \frac{D}{L} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\xi} \right|. \tag{24}$$

Wenn sie verletzt ist, bestehen unsere bisherigen Betrachtungen nicht zurecht, und es treten neue Schwingungsformen ein, die sogenannten Lichtbogenschwingungen zweiter Art, bei denen der Lampenstrom während einer endlichen Zeit innerhalb jeder Halbperiode erlischt. Im Rahmen unserer bisherigen Rechnung (Vernachlässigung des Widerstandes) sind die Bedingungen für diese Schwingungen jedenfalls dann gegeben, wenn $\operatorname{tg} \xi$ sehr groß wird; dies tritt nach (22) immer dann ein, wenn die Eigenfrequenz q des Kondensatorkreises ein ungerades Vielfaches der Frequenz p des Speisestromes ist. In diesem Falle wird auch die Stromamplitude im Kondensatorkreis sehr groß, wie aus (21) oder auch unmittelbar aus (12) hervorgeht. Wir haben einen typischen Fall von Resonanz und ein unendliches Anwachsen einer der Partialamplituden, aus denen sich y in (12) zusammensetzt.

Wir beschließen die Behandlung des dämpfungsfreien Falles mit der Berechnung des effektiven Kondensatorstromes, wie er direkt an einem Hitzdrahtinstrument gemessen wird. Der effektive Strom wird mit $\bar{y}$ bezeichnet; er ist zu definieren durch

$$\bar{y}^2 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y^2 \, dt.$$

Indem wir aus (12) einsetzen und beachten, daß

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos^2 npt\,dt = \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos npt\cos mpt\,dt = 0$$

ist, ergibt sich

$$(25)\qquad \bar{y}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4ap}{L\pi}\right)^2 Q_1,\qquad Q_1 = \sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{(q^2-n^2p^2)^2}.$$

Die Summe Q_1 läßt sich aus der früheren Summe Q in Gleichung (19) durch Differentiation ableiten. Es ist nämlich

$$\frac{dQ}{dq} = -2qQ_1,$$

also wegen (20) und (22)

$$Q_1 = \frac{\pi}{8pq}\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{q}\operatorname{tg}\frac{\pi q}{2p}\right) = \frac{\pi^3}{32p^3q}\frac{d}{d\xi}\frac{\operatorname{tg}\xi}{\xi} = \frac{\pi^4}{64p^4}\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\frac{\operatorname{tg}\xi}{\xi}.$$

In (25) eingesetzt, ergibt sich

$$(26)\qquad \bar{y}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a\pi}{2Lp}\right)^2\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\frac{\operatorname{tg}\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{a\pi}{2Lp}\right)^2\frac{\xi-\sin\xi\cos\xi}{\xi^3\cos^2\xi}.$$

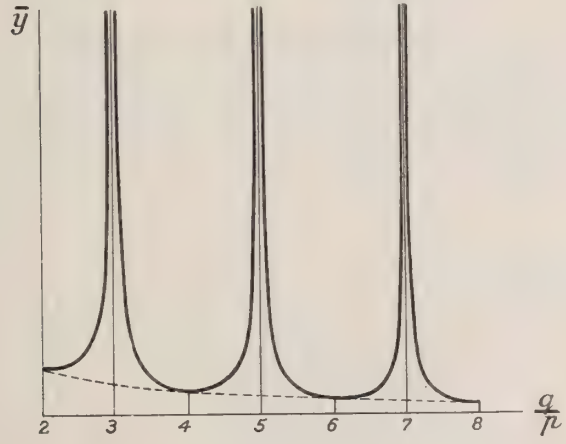


Fig. 5.

Fig. 5 stellt den effektiven Strom y in seiner Abhängigkeit von ξ, d. h. im wesentlichen dem Frequenzverhältnis $q:p$ dar. Die Maxima von $\bar{y}$ liegen an den Stellen

$$\cos\xi = 0, \text{ d. h. } q = \text{unger. Vielf. von } p$$

und sind unendlich groß. Wegen des Auftretens von Schwingungen zweiter Art und wegen Vernachlässigung der Dämpfung haben sie keine physikalische Bedeutung. Die Minima ergeben sich in hinreichender Näherung für

$$\sin\xi = 0, \text{ d. h. } q = \text{ger. Vielf. von } p.$$

Ihre Größe ist proportional zu $\frac{1}{\xi}$; sie liegen also auf einer gleichseitigen Hyperbel.

Wenn auch ein zahlenmäßiger Vergleich mit den Beobachtungen wegen Vernachlässigung des Widerstandes untunlich ist, so erkennt man doch in dem Verlauf dieser Figur bereits die wesentlichen Züge der von den Herren Rukop und Zenneck gefundenen Resultate sowie die Möglichkeit, die Frequenz p einer Wechselstrommaschine auf ein ungerades Vielfaches derselben mit erheblicher Größe der Amplitude zu transformieren.

§ 2. Berücksichtigung der Dämpfung.

Wir behalten die Schaltung in Fig. 1 und alle früheren Bezeichnungen bei. Indem wir den Widerstand R berücksichtigen, führen wir die Abkürzung ein:

$$\varrho = \frac{R}{L}. \tag{27}$$

Die Differentialgleichungen des Problems lauten dann:

$$E = D\frac{dx}{dt} + V, \tag{28}$$

$$V = L\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \varrho\frac{d\eta}{dt} + q^2\eta\right). \tag{29}$$

(28) ist mit der früheren Differentialgleichung (5) identisch; auch der Verlauf von V und seine Fouriersche Darstellung in Gleichung (8) bleibt — bei gleicher Verfügung über die Zeitpunkte der Stromumkehr im Lichtbogen — ungeändert erhalten. Deshalb überträgt sich auch die Darstellung (16) für den Speisestrom und der Wert (18) desselben für den Zeitpunkt $t = 0$ ohne Änderung auf den jetzigen Fall. Abzuändern ist nur die Integration der Differentialgleichung (29) wegen des hinzugetretenen Dämpfungsgliedes. Wir setzen jetzt — im Gegensatz zu (9) — an

$$\eta = \Sigma b_n \sin(npt - \gamma_n) \tag{30}$$

sowie — in Übereinstimmung mit (7) und (8) —

$$V = \Sigma a_n \sin npt = \frac{4a}{\pi} \sum_{1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} \sin npt.$$

Aus der Differentialgleichung (29) bestimmen sich dann die beiden Reihen von Unbekannten b_n, γ_n in bekannter Weise zu

$$\begin{cases} b_n = \dfrac{a_n}{L\sqrt{(q^2 - n^2p^2)^2 + (\varrho np)^2}} = \dfrac{4a}{L\pi n} \dfrac{1}{\sqrt{(q^2 - n^2p^2)^2 + (\varrho np)^2}} \\ \operatorname{tg} \gamma_n = \dfrac{\varrho np}{q^2 - n^2p^2}, \qquad \cos \gamma_n = -\dfrac{n^2p^2 - q^2}{\sqrt{(q^2 - n^2p^2)^2 + (\varrho np)^2}}. \end{cases} \tag{31}$$

Von der Hinzufügung einer freien Schwingung im Kondensatorkreis kann man aus den schon im dämpfungsfreien Falle bei Gleichung (11) dargelegten Gründen absehen. Von der Ladung η gehen wir sogleich zum Strome $y = \dfrac{d\eta}{dt}$ über und erhalten

$$y = \Sigma b_n np \cos(npt - \gamma_n) = \frac{4ap}{L\pi} \sum_{1,3,5,\ldots} \frac{\cos(npt - \gamma_n)}{\sqrt{(q^2 - n^2p^2)^2 + (\varrho np)^2}}. \tag{32}$$

Der Kondensatorstrom reproduziert sich ebenso wie im dämpfungsfreien Falle nach der Periode $2T$ des Speisestromes und wechselt je nach der Halbperiode T das Vorzeichen. Wir haben daher, wenn wir wie früher mit y_0 den Strom für $t = 0$ bezeichnen:

$$y_{+T} = y_{+3T} = \cdots = -y_0,$$
$$y_{+2T} = y_{+4T} = \cdots + y_0.$$

Die früher geforderten Bedingungen (17) für die Zeitpunkte des momentanen Erlöschens des Lampenstromes sind daher auch jetzt sämtlich erfüllt, sobald nur für die Befriedigung der einen Bedingung

$$x_0 = y_0 \tag{33}$$

gesorgt ist, was wiederum durch geeignete Wahl der Phase t_0 im Ausdrucke (2) der elektromotorischen Kraft zu geschehen hat.

Bevor wir hierauf eingehen, wollen wir zunächst einen bequemen Ausdruck für den Stromwert y_0 ableiten. Dieser ist nach (32) und (31):

$$y_0 = -\frac{4ap}{L\pi} \sum_{1,3,5,\ldots} \frac{n^2p^2 - q^2}{(n^2p^2 - q^2)^2 + (\varrho np)^2}. \tag{34}$$

Um den Anschluß an die früher in (22) definierte Größe ξ zu gewinnen, führen wir die Abkürzungen ein:

$$\xi = \frac{\pi \sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}}}{2p}, \qquad \eta = \frac{\pi\varrho}{4p}, \tag{35}$$

deren erstere mit $\varrho = 0$ in der Tat in das frühere ξ übergeht. Es wird dann nach (19a) zunächst

$$\frac{\operatorname{tg}(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta} = \frac{8p^2}{\pi^2} \sum_{1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2p^2 - \left(\sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}} + \frac{i\varrho}{2}\right)^2}. \tag{36}$$

Nach einiger Rechnung findet man, wenn $\Re$ und $\Im$ die Zeichen des reellen und imaginären Teiles der dahinter stehenden komplexen Ausdrücke bedeuten:

$$\Im \frac{\operatorname{tg}(\xi + i\eta)}{\xi + i\eta} = \frac{8p^2}{\pi^2} \varrho \sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}} \sum_{1,3,5,\ldots} \frac{1}{(n^2p^2 - q^2)^2 + (\varrho np)^2} \tag{37}$$

$$(38)\quad \frac{1}{\xi}\Re\,\mathrm{tg}(\xi+i\eta)=\frac{8p^2}{\pi^2}\sum_{1,3,5,\ldots}\frac{n^2p^2-q^2}{(n^2p^2-q^2)^2+(\varrho np)^2}.$$

Somit nach (34)

$$(39)\quad y_0=-\frac{a\pi}{2Lp}\frac{1}{\xi}\Re\,\mathrm{tg}(\xi+i\eta).$$

Will man die komplexen Ausdrücke nachträglich durch reelle ersetzen, so beachte man, daß

$$(40)\quad \mathrm{tg}(\xi+i\eta)=\frac{\sin 2\xi+i\,\mathfrak{Sin}\,2\eta}{\cos 2\xi+\mathfrak{Cof}\,2\eta},$$

$$(41)\quad \frac{\mathrm{tg}(\xi+i\eta)}{\xi+i\eta}=\frac{1}{\xi^2+\eta^2}\left\{\frac{\xi\sin 2\xi+\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta}{\cos 2\xi+\mathfrak{Cof}\,2\eta}+i\,\frac{\xi\,\mathfrak{Sin}\,2\eta-\eta\sin 2\xi}{\cos 2\xi+\mathfrak{Cof}\,2\eta}\right\}.$$

Man beweist dies unschwer, indem man die Tangens-Funktion durch die Exponentialfunktion darstellt; $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ bedeuten die hyperbolischen Funktionen. Nach (40) ergibt sich also aus (39):

$$(42)\quad y_0=-\frac{\pi a}{2Lp}\frac{\sin 2\xi}{\xi\cos 2\xi+\mathfrak{Cof}\,2\eta}.$$

Nunmehr gehen wir auf die noch zu erfüllende Gleichung (33) zurück. Da x_0 wie bemerkt den früheren Wert (18) ungeändert beibehält, können wir diese Bedingung folgendermaßen schreiben:

$$(43)\quad A\sin pt_0=\frac{\pi a}{2}\left(1+\frac{D}{L}\frac{1}{\xi}\frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi+\mathfrak{Cof}\,2\eta}\right).$$

Mit $R=0$, $\varrho=0$, $\eta=0$ geht sie, wie man sofort sieht, in die frühere Bedingung (23) über, indem

$$\frac{\sin 2\xi}{1+\cos 2\xi}=\mathrm{tg}\,\xi$$

wird. Die Bedingung (43) bestimmt, wie früher, die Phase t_0 im Ausdrucke der elektromotorischen Kraft, wenn sich daraus

für $|\sin pt_0|$ ein Wert kleiner als 1 ergibt, und weist im entgegengesetzten Falle darauf hin, daß unsere bisherigen Betrachtungen ihre Gültigkeit verlieren und daß eine neue Schwingungsform einsetzt. Während dies aber im dämpfungsfreien Falle in der Nähe jedes der (unendlich hohen) Maxima der Stromkurve eintrat, wo die Frequenz des Kondensatorkreises ein ungerades Vielfaches der Frequenz des Speisestromes war, wird unsere Bedingung (43) jetzt, wenn überhaupt, nur in der Nähe der höheren dieser (wegen der Dämpfung endlichen) Maxima verletzt.

Denkt man sich nämlich wie in Fig. 6 die Klammer der rechten Seite von (43)

$$Z = 1 + \frac{D}{L}\frac{1}{\xi}\frac{\sin 2\xi}{\cos 2\xi + \mathfrak{Cof}\, 2\eta} \tag{44}$$

als Ordinate zu der mit ξ im wesentlichen proportionalen Abszisse $\frac{q}{p}$ aufgetragen, so erhält man eine Kurve mit unendlich vielen Maxima und Minima von abnehmender Größe. Im Sinne der Gleichung (43) haben wir diese Kurve mit den zur Abszissenachse parallelen Geraden

$$z = \pm\frac{2}{\pi}\frac{A}{a} \tag{45}$$

zu schneiden, welche einen diese Achse umgebenden Streifen aussondern. Wir können nun offenbar sagen: Jeder Punkt der Kurve (44), der im Innern des Streifens (45) liegt, entspricht einem Falle, für den Gleichung (43) erfüllt werden kann; jeder Punkt, der außerhalb des Streifens liegt, entspricht keinem möglichen Schwingungszustande von dem bisher untersuchten Typus, da sich zu einem solchen nach (43) keine mögliche Phase der elektromotorischen Kraft bestimmen läßt. Die Grenze für das Versagen des bisherigen und das Auftreten eines neuen Schwingungstypus (Schwingungen zweiter Art) wird durch die Schnittpunkte unserer Kurve mit den Rändern des Streifens markiert.

Aus der abnehmenden Höhe der aufeinanderfolgenden Kurvenzacken zeigt sich nun sofort, daß die Möglichkeit für Lichtbogenschwingungen zweiter Art nur bei den ersten dieser Zacken gegeben ist, daß also von einer gewissen Ordnungszahl an sicher keine Schwingungen zweiter Art mehr auftreten können. Wie hoch diese Ordnungszahl ist, hängt einerseits von dem Charakter der Kurve Z ab, nämlich der Schnelligkeit der Abnahme ihrer aufeinanderfolgenden Zacken, welche durch die Konstante η, d. i. die Dämpfung, bestimmt wird, sodann aber namentlich von dem Abstande der beiden Geraden z, d. h. dem Verhältnis $\frac{A}{a}$. Da wir uns die Wechselstrommaschine und die Amplitude A ihrer elektromotorischen Kraft gegeben denken, kommt es bei dem Verhältnis $\frac{A}{a}$ auf die Beschaffenheit des Lichtbogens an. Ist die Lichtbogenspannung a verhältnismäßig stark, so liegen unsere beiden Geraden z verhältnismäßig nahe aneinander: dieser Umstand begünstigt das Auftreten von Schwingungen zweiter Art und bewirkt, daß sie sich noch bei höheren Ordnungszahlen der Zacken unserer Kurve Z ausbilden können. Ist die Lichtbogenspannung a klein, so rücken unsere beiden Geraden weiter auseinander: dann ist das Auftreten von Schwingungen zweiter Art erschwert und nur bei den niedrigeren Ordnungszahlen zu erwarten.

Fig. 6 ist konstruiert für die Zahlenwerte:

$$\frac{2}{\pi}\frac{A}{a} = 5, \quad \frac{D}{L} = 10, \quad \frac{R}{L} = 100\,\mathrm{sec}^{-1}, \quad p = 100\,\pi\,\mathrm{sec}^{-1}.$$

Dann wird nach (27) und (35):

$$\varrho = 100, \quad 2\eta = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{Cof}\,2\eta = 1{,}13.$$

Unsere Kurve verläuft außerhalb des Streifens

$$z = \pm\frac{2}{\pi}\frac{A}{a}$$

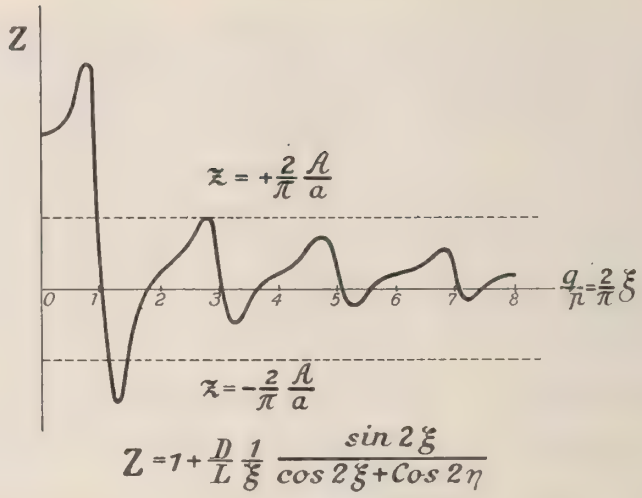


Fig. 6.

nur in der Nähe des ersten positiven und negativen Maximums und berührt seine Begrenzung mit ihrem zweiten positiven Maximum. Von da ab ist die Bedingung (43) ausnahmslos erfüllbar und Lichtbogenschwingungen zweiter Art treten nicht mehr auf.

Eigentümlich ist, daß die Maxima unserer Kurve nicht genau mit den Stellen $\frac{q}{p} = 1, 3, \ldots$ zusammenfallen, wo die Maxima des effektiven Stromes liegen, sondern daß sie je in ein positives und negatives Maximum zerfallen, die beiderseits gegen jene Stellen verschoben sind. Infolgedessen gibt es gerade in der Nähe der Stelle $\frac{q}{p} = 1$ Punkte innerhalb unseres Streifens, die scheinbar nicht zu Lichtbogenschwingungen zweiter Art Anlaß geben. Vielleicht kommen hier Stabilitätsfragen ins Spiel.

Schließlich haben wir den effektiven Strom unter Berücksichtigung des Widerstandes zu berechnen als das für den Vergleich mit den Beobachtungen maßgebende Element. Er ist nach Gleichung (32) folgendermaßen bestimmt:

$$y^2 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} y^2 dT = \frac{1}{2}\left(\frac{4ap}{L\pi}\right)^2 \sum_{1,3,5,\ldots} \frac{1}{(n^2p^2 - q^2)^2 + (\varrho np)^2}.$$

Entnimmt man den Wert der hier auftretenden Summe aus (37) und berücksichtigt (35) und (41), so ergibt sich

$$(46) \qquad \bar{y}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi a}{2Lp}\right)^2 \frac{1}{\xi\eta(\xi^2+\eta^2)} \cdot \frac{\xi \operatorname{Sin} 2\eta - \eta \sin 2\xi}{\cos 2\xi + \operatorname{Cof} 2\eta}.$$

Der frühere Ausdruck (26) folgt hieraus natürlich durch Grenzübergang für $\eta = 0$. Die Maxima und Minima dieses Ausdruckes liegen (bei nicht zu großem η) jedenfalls in der Nähe der Minima und Maxima des Nenners $\cos 2\xi + \operatorname{Cof} 2\eta$, d. h. in der Nähe von

$$(47) \qquad \cos 2\xi = -1, \quad \xi_{\max} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

bzw. von

$$(47\,a) \qquad \cos 2\xi = +1, \quad \xi_{\min} = 2n\frac{\pi}{2}.$$

Den ersteren entsprechen nach (40) Frequenzen q, die gegeben sind durch

$$\sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}} = (2n+1)p,$$

den letzteren solche, die sich berechnen aus

$$\sqrt{q^2 - \frac{\varrho^2}{4}} = 2np.$$

Die aus den Versuchen abgeleitete Regel, wonach die Maxima des effektiven Stromes im Kondensator bei den ungeraden, die Minima bei den geraden Vielfachen der Frequenz des Speisestromes liegen, ist also, wie leicht verständlich, mit Rücksicht auf die Dämpfung nicht ganz exakt, einmal wegen Hinzutretens des (kleinen) Termes $\frac{\varrho^2}{4}$ zu q^2, sodann aber auch,

weil die Bestimmung von $\xi_{\max}$ und $\xi_{\min}$ mittels der Gleichung (47) und (47a) nur eine angenäherte ist.

Begnügen wir uns mit dieser Annäherung (das Genauere kann aus den nachstehenden quantitativen Figuren entnommen werden), so können wir die Größe der Maxima und Minima des effektiven Stromes durch einfache Formeln berechnen. Für $\cos 2\xi = \mp 1$ ist $\sin 2\xi = 0$; ferner gilt

$$\frac{\mathfrak{Sin}\, 2\eta}{-1+\mathfrak{Cof}\, 2\eta} = \frac{\mathfrak{Cof}\, \eta}{\mathfrak{Sin}\, \eta} = \mathfrak{Ctg}\, \eta, \quad \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\eta}{1+\mathfrak{Cof}\, 2\eta} = \frac{\mathfrak{Sin}\, \eta}{\mathfrak{Cof}\, \eta} = \mathfrak{Tg}\, \eta.$$

Aus (46) folgt also

$$(48) \qquad \begin{cases} \bar{y}_{\max} = \dfrac{\pi a}{2Lp}\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Ctg}\, \eta}{2\eta}}\,\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \\ \bar{y}_{\min} = \dfrac{\pi a}{2Lp}\sqrt{\dfrac{\mathfrak{Tg}\, \eta}{2\eta}}\,\dfrac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}. \end{cases}$$

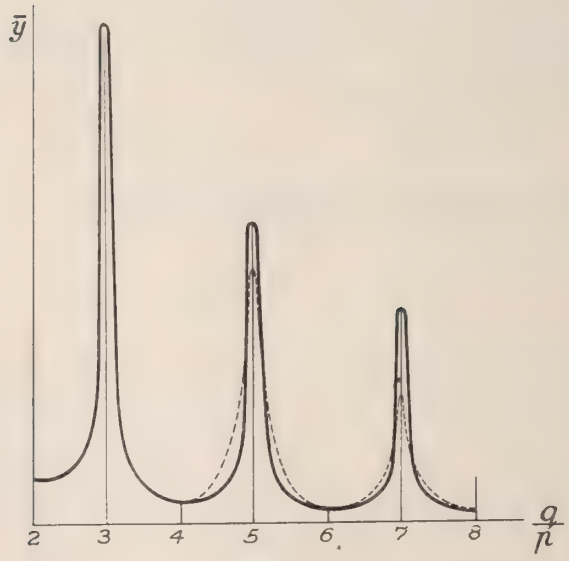


Fig. 7.

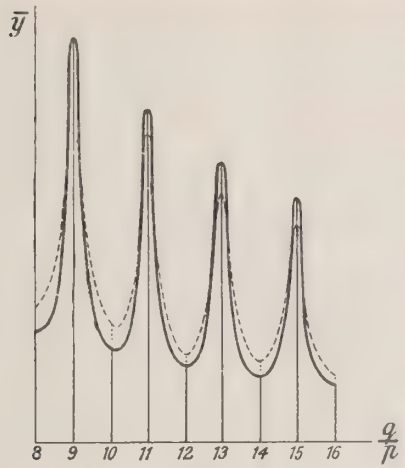


Fig. 8.

Die Maxima sind durch den Einfluß der Dämpfung natürlich endlich geworden. Die Maxima und Minima liegen, als Funktion der Variabeln ξ resp. der damit annähernd proportionalen Frequenz q gedacht, je auf einer einfachen Kurve (der 4. Ordnung), welche von der für die Minima früher gefundenen gleichseitigen Hyperbel um so mehr abweicht, je größer η, d. h. je größer die Dämpfung ist.

In den Fig. 7 und 8 ist der Verlauf des effektiven Stromes als Funktion der Frequenz q im Kondensatorkreise quantitativ dargestellt in zwei Fällen, die den Fig. 2a und 2b von Rukop und Zenneck entsprechen. In Fig. 7 ist angenommen

$$R = 25 \text{ Ohm}, \quad L = 1 \text{ Henri}, \quad \frac{R}{L} = 25 \text{ sec}^{-1},$$

in Fig. 8

$$R = 10 \text{ Ohm}, \quad L = 0{,}1 \text{ Henri}, \quad \frac{R}{L} = 100 \text{ sec}^{-1}.$$

Rukop und Zenneck geben für die entsprechenden Figuren an: $R = 20\,\Omega$, $L = 1{,}1\,H$ resp. $R = 6\,\Omega$, $L = 0{,}12\,H$; die Widerstände sind bei uns etwas höher genommen, um den Verlusten im Kondensator Rechnung zu tragen, die in unser R

einzubeziehen sind. Für p ist, wie oben und in den Versuchen, die Frequenz des technischen Wechselstromes genommen: $p = 100\,\pi$. Es berechnet sich dann für Fig. 7 $\eta = \frac{1}{16}$, für Fig. 8 $\eta = \frac{1}{4}$. Als Abszisse ist das mit ξ im wesentlichen proportionale Verhältnis $\frac{q}{p}$ aufgetragen; experimentell wurde dieses Verhältnis durch Änderung der Kapazität des Kondensators varieert. Die Ordinate $\bar{y}$ ist in solchem Maßstabe aufgetragen, daß das erste in den Figuren gezeichnete Maximum der theoretischen Kurve mit dem beobachteten der

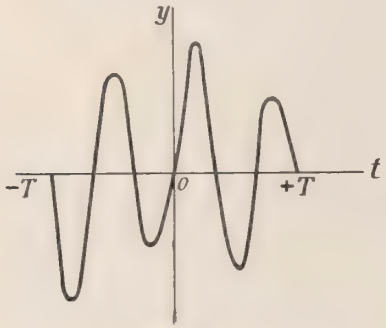


Fig. 9.

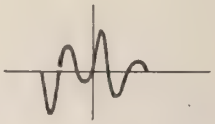


Fig. 9a.

Größe nach übereinstimmt. Die beobachteten Kurven sind punktiert eingetragen. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung vollauf befriedigend. Im Experiment fallen die Maxima mit zunehmender Ordnungszahl etwas schneller ab, wie nach der Theorie; die experimentellen Minima liegen in Fig. 8 etwas höher wie die theoretischen.

Endlich ist in Fig. 9 der zeitliche Verlauf des Kondensatorstromes in dem technisch interessantesten Falle $q = 3p$ aufgetragen. Hierbei mußte die Fouriersche Darstellung (32) zu Grunde gelegt werden, da sich für beliebige Zeitpunkte t die Summation derselben nicht in der Weise bewerkstelligen läßt, wie dies oben für die Zeitpunkte $t = 0$ und $t = T$ ($y = \pm y_0$) durchgeführt wurde. Die Berechnung dieser Figur ist daher etwas umständlich. Für die bei dieser und den übrigen Figuren

aufgewandten Mühe danke ich Herrn Glitscher verbindlichst. Die Verhältnisse in Fig. 9 sind denen der Fig. 16 bei Rukop und Zenneck nachgebildet:

$$R = 200\,\Omega, \quad L = 1\,H, \quad p = 100\,\pi.$$

Die oszillographisch beobachtete Kurve ist in Fig. 9a danebengestellt in anderen Maßstabsverhältnissen. Auch hier ist die Übereinstimmung befriedigend.

Es unterliegt hiernach wohl keinem Zweifel, daß sich auch das sonstige reiche Beobachtungsmaterial der Herren Rukop und Zenneck durch unsere Formeln theoretisch wiedergeben läßt. Die vorhandenen Abweichungen lassen sich ungezwungen auf die schematisierte Form unserer Charakteristik in Fig. 1 zurückführen. Indem man dieselbe im Sinne der punktierten Linien der Fig. 1 modifiziert, wird sich vermutlich ein noch besserer Anschluß an die Beobachtungen erzielen lassen.

Wir schließen mit einer Berechnung des Wirkungsgrades. Die im Primärkreis aufgewandte elektrische Arbeit während einer Periode ist:

$$W_1 = \int_{-T}^{+T} E x\,dt,$$

die auf den Sekundärkreis übertragene wird:

$$W_2 = \int_{-T}^{+T} V y\,dt,$$

und es bestimmt $\frac{W_2}{W_1}$ den Wirkungsgrad der Transformation. Aus Gleichung (2) und (16) ergibt sich sofort, daß nur das Glied $\frac{\mp a t}{D}$ im Ausdrucke von x bei der Bestimmung von W_1 in Betracht kommt. Mithin wird

$$(49) \quad \begin{cases} W_1 = -\frac{a A}{D}\left\{\int_0^T \cos p(t-t_0)\,t\,dt - \int_{-T}^{0} \cos p(t-t_0)\,t\,dt\right\} \\ \quad = -\frac{2 a A}{D}\cos p t_0 \int_0^T \cos p t t\,dt = \frac{4 a A}{p^2 D}\cos p t_0. \end{cases}$$

Nach Gleichung (29) andererseits läßt sich die Bestimmung von W_2 auf den bereits bekannten Wert von $\bar{y}^2$ zurückführen durch die Bemerkung, daß Selbstinduktion und Kapazität wattlos wirken. Man erhält auf diese Weise für W_2 ersichtlich die im Kondensatorkreis während einer Periode entwickelte Joulesche Wärme. Rechnerisch zeigt sich dies so: Indem man (29) mit y multipliziert und über eine Periode integriert, ergibt sich:

$$W_2 = \int_{-T}^{+T} V y\, dt = L\varrho \int_{-T}^{+T} y^2\, dt = 2TL\varrho\bar{y}^2.$$

Da nach (27) $L\varrho = R$ ist, bedeutet dies in der Tat nichts anderes als die Joulesche Wärme für eine Periode.

Schreibt man noch $T = \frac{\pi}{p}$ und faßt speziell einen solchen Wert von q ins Auge, der einem Maximum des effektiven Stromes entspricht, so ergibt sich nach (48)

$$W_2 = \frac{\pi^2 a^2}{4Lp^2} \cdot \frac{\pi\varrho}{p\eta} \frac{\mathfrak{Ctg}\,\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Hier ist nach (35) der Faktor $\frac{\pi\varrho}{p\eta}$ gleich 4; vernachlässigt man noch η^2 gegen ξ^2, was zumal für die höheren Ordnungen stets zulässig ist, so findet man schließlich:

$$W_2 = \frac{\pi^2 a^2}{Lp^2\xi^2}\,\mathfrak{Ctg}\,\eta. \tag{50}$$

Mithin ergibt sich für den Wirkungsgrad aus (49) und (50):

$$\frac{W_2}{W_1} = \left(\frac{\pi}{2\xi}\right)^2 \frac{a}{A}\,\frac{D}{L}\,\frac{\mathfrak{Ctg}\,\eta}{\cos pt_0}. \tag{51}$$

Bei der Transformation auf die dreifache Frequenz ist nach Gleichung (40) angenähert $\frac{\pi}{2\xi}$ gleich $\frac{1}{3}$, also

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1}{9}\,\frac{a}{A}\,\frac{D}{L}\,\frac{\mathfrak{Ctg}\,\eta}{\cos pt_0}. \tag{52}$$

Der Wirkungsgrad hängt also in erster Linie von dem Verhältnis $\frac{a}{A}$, d. h. von der Beschaffenheit des Lichtbogens ab. Mit wachsendem Widerstande R des Kondensatorkreises wird er schlechter, indem η mit R wächst, also $\mathfrak{Ctg}\,\eta$ abnimmt. Von der Selbstinduktion L ist der Wirkungsgrad bei kleinem η unabhängig; in diesem Falle ist nämlich $\mathfrak{Ctg}\,\eta$ angenähert gleich $\frac{1}{\eta}$ und es hebt sich in dem Produkte ηL nach der Bedeutung von η die Selbstinduktion L heraus. Für große η dagegen wird $\mathfrak{Ctg}\,\eta = 1$; in diesem Falle ist die Abhängigkeit von L gegeben durch das Verhältnis $\frac{D}{L}$; der Wirkungsgrad läßt sich also durch Verkleinerung von L verbessern. Daß der Wirkungsgrad schließlich mit $\cos pt_0 = 0$ ins Unendliche wachsen muß, ist klar, da ja in diesem Falle die aufgewandte Energie W_1 verschwindet. Es ist dies derselbe Fall, den wir bei der Diskussion der Gleichung (43) in der Form $\sin pt_0 = 1$ hervorgehoben haben als Grenzfall, von welchem ab unsere Darstellung der Vorgänge versagen muß.

Untersuchungen über die Funktionen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben.

Von **Arthur Rauber.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 4. Juli 1914

Vorwort.

Der Verfasser hat in seiner Inanguraldissertation (München 1913) einen Weg eingeschlagen, welcher zu einer Lösung der Bewegungsgleichungen des dreiachsigen festen Kreisels führt. Die gesuchten Größen [Komponenten der Drehgeschwindigkeit und Richtungskosinusse eines körperfesten Achsenkreuzes gegen ein raumfestes] werden dargestellt durch dreifach-unendliche Reihen nach Potenzen der Schwerpunktskoordinaten [in dieser Arbeit: Gleichung (3)]; die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$, $G^{(i)}_{lmn}$ usw. dieser Entwickelungen sind eindeutige stetige Funktionen für alle reellen Werte der Zeit t. Diese Art der Darstellung ist begründet durch einen Satz von Poincaré über die Abhängigkeit der Lösungen eines Differentialsystemes von Parametern. Die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ usw. sind mittels rekurrierender Formeln durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Integration bestimmt und werden aus elliptischen Elementarfunktionen, die in Grenzfällen in zyklometrische übergehen, aufgebaut. Soweit ist das Problem in der Dissertation des Verfassers geführt und in den Abschnitten 1, 2 und 3 dieser Arbeit ist der Weg — mit einigen Zusätzen — zusammen-

fassend bezeichnet. In den folgenden Abschnitten wird die Untersuchung vornehmlich für reelle t weitergeführt und zwar wird nach vorbereitenden Sätzen in 4 und 5 im 6. Abschnitt gezeigt, daß durch eine endliche Anzahl der obenbezeichneten Entwickelungen (Funktionselemente) die gesuchten Größen sich darstellen lassen für beliebig große, endliche Zeiten, für beliebige endliche Schwerpunktskoordinaten, beliebige Massenverteilung und beliebige Anfangsbedingungen. Alle Funktionselemente sind durch die gleichen rekurrierenden Formeln bestimmt, nur die Moduln und Konstanten der Elementarfunktionen sind verschieden.

Die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ usw. lassen sich, wie im 7. und 8. Abschnitt gezeigt wird, in einer für alle reellen t gültigen, von Integralen freien Form darstellen durch eine gewisse Art von trigonometrischen Reihen: die Koeffizienten dieser Entwickelungen sind explizit und eindeutig durch die bereits berechneten bestimmt und zwar durch die Operationen der Addition und Multiplikation.

Wir können also den geometrisch-mechanischen Vorgang der Kreiselbewegung in allen Fällen beschreiben.

Zur Erforschung der analytischen Eigenschaften unserer Funktionselemente im komplexen Bereiche von t sind noch sehr weitgehende Untersuchungen notwendig. Ein Beitrag wird im 9. Abschnitt gegeben: Die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ haben nach dem formalen Aufbau an gewissen Punkten polare und logarithmisch-polare Singularitäten; der rein polare Hauptteil dieser Funktionen wird durch endliche Reihen von Θ-Quotienten dargestellt, die alle singulären Punkte umfassen. Die Koeffizienten dieser Reihen sind Funktionen von t, die an jenen Stellen regulär sind.

[Die elliptischen Funktionen in dieser Arbeit sind nach der Definition Jacobis behandelt.]

I. Die Differentialgleichungen des Kreisels und ihre Lösung.

Ein „dreiachsiger fester Kreisel“ ist ein starrer Körper, der an einem seiner Punkte festgehalten ist, für diesen Punkt ein dreiachsiges Trägheitsellipsoid besitzt und unter der Wirkung der Erdschwere sich bewegt.

Es sei

M = Maße des Kreisels.

T_1, T_2, T_3 = Hauptträgheitsachsen bezüglich des festen Punktes; sie bilden das körperfeste Achsenkreuz x, y, z.

r_1, r_2, r_3 = Komponenten der Drehgeschwindigkeit im System xyz.

x_0, y_0, z_0 = Koordinaten des Schwerpunktes.

a_i, β_i, γ_i = Richtungskosinusse der Achsen xyz gegen ein raumfestes Achsenkreuz $\xi\eta\zeta$, entsprechend dem Schema

$i = 1, 2, 3$

		x	y	z	Körperfest
Raumfest	ξ	a_1	a_2	a_3	
	η	β_1	β_2	β_3	
	ζ	γ_1	γ_2	γ_3	

g = Beschleunigung der Schwere in Richtung $-\zeta$.

t = Zeit.

Wir setzen fest, daß

$$T_3 > T_2 > T_1 > 0 \tag{1}$$

und benützen die Bezeichnungen:

$$\mu_1 = \frac{T_2 - T_3}{T_1}; \quad \mu_2 = \frac{T_3 - T_1}{T_2}; \quad \mu_3 = \frac{T_1 - T_2}{T_3},$$

so daß

$$\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0$$
$$\sigma_1 = Mgx_0; \quad \sigma_2 = Mgy_0; \quad \sigma_3 = Mgz_0;$$

[die Größen T, μ, σ sind reell], dann erhalten wir die Differentialgleichungen des dreiachsigen festen Kreisels in der Form:

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt} &= \mu_1 r_2 r_3 + \frac{1}{T_1}(\sigma_2\gamma_3 - \sigma_3\gamma_2) \\ \frac{dr_2}{dt} &= \mu_2 r_3 r_1 + \frac{1}{T_2}(\sigma_3\gamma_1 - \sigma_1\gamma_3) \\ \frac{dr_3}{dt} &= \mu_3 r_1 r_2 + \frac{1}{T_3}(\sigma_1\gamma_2 - \sigma_2\gamma_1) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 r_3 - \gamma_3 r_2 \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_3 r_1 - \gamma_1 r_3 \\ \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_1 r_2 - \gamma_2 r_1 \end{aligned} \tag{2a}$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$(r_i)_{t=0} = r_i(0); \quad (\gamma_i)_{t=0} = \gamma_i(0); \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Größen α_i und β_i genügen ebenfalls den Gleichungen (2a); sie unterscheiden sich von den γ_i und voneinander nur durch die Anfangsbedingungen. Die gegebenen Anfangswerte von α_i und β_i seien $\alpha_i(0)$ und $\beta_i(0)$.

Außerdem bestehen die Orthogonalitätsbedingungen:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad \text{usw.} \qquad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \quad \text{usw.}$$

Die gesuchten Größen sind:

$$r_i, \ \gamma_i, \ \alpha_i, \ \beta_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

sie sind durch die Differentialgleichungen (2) und (2a) abhängig von den Variabeln

$$t,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ r_i(0),\ \gamma_i(0),\ \alpha_i(0),\ \beta_i(0).$$

Die Differentialgleichungen (2) und (2a) sind nach dem gegenwärtigen Stande der Analysis dann gelöst, wenn wir für die gesuchten Größen Entwickelungen nach Funktionen der Variabeln angeben, die in einem gewissen Bereiche der Variabeln konvergieren und zugleich zeigen, daß und wie diese Entwickelungen bis zu jedem endlichen Werte der Variabeln fortgesetzt werden können, so daß wir die Möglichkeit geboten sehen, die gesuchten Größen an allen Stellen der für die Zwecke der Analysis komplexen, für die Zwecke der Mechanik reellen Variabeln nach ihrem Verhalten zu prüfen und ihren Verlauf zu untersuchen. Welche Art von Funktionen, nach denen diese Entwickelungen fortschreiten sollen, zu wählen ist, wird zunächst davon abhängen, welche von den Variabeln eine Hauptrolle spielen sollen und welche eine nebensächliche; außerdem wird man von den Funktionen verlangen, daß sie einen möglichst großen Gültigkeitsbereich ihrer Variabeln besitzen und daß auch den Entwickelungen für die gesuchten Größen ein möglichst großer Gültigkeitsbereich in den Variabeln gegeben wird.

Eine Methode zur Darstellung der gesuchten Funktionen r_i, γ_i, α_i, β_i hat der Verfasser in seiner Inauguraldissertation (München 1913) ausführlich erörtert; sie stützt sich auf einen Satz von Poincaré über die Abhängigkeit der Lösungen eines Differentialsystemes von Parametern (vgl. Diss. S. 7). Nach dieser Untersuchung sind die gesuchten Größen darstellbar in einem gewissen Bereiche der Variabeln in der Form:

$$\left.\begin{aligned} r_i &= \sum_0^\infty{}^l \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R_{lmn}^{(i)} \\ \gamma_i &= \sum_0^\infty{}^l \sum_0^\infty{}^m \sum_0^\infty{}^n \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n G_{lmn}^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (3)$$

Dieselbe Form haben α_i und β_i, nur ist für $G_{lmn}^{(i)}$ zu schreiben $A_{lmn}^{(i)}$ und $B_{lmn}^{(i)}$.

Die Koeffizienten $R^{(i)}_{000}$, $G^{(i)}_{000}$ usw. sind die Lösungen der Differentialsysteme (2) und (2a), wenn $\sigma_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ gesetzt wird.

Die übrigen Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ usw. sind definiert durch die linearen Differentialsysteme:

$$\begin{aligned} \frac{dR^{(i)}_{lmn}}{dt} &= \mu_i [R^{(i+1)}_{lmn} R^{(i+2)}_{000} + R^{(i+2)}_{lmn} R^{(i+1)}_{000}] + \Re^{(i)}_{lmn} \\ \frac{dG^{(i)}_{lmn}}{dt} &= G^{(i+1)}_{lmn} R^{(i+2)}_{000} - G^{(i+2)}_{lmn} R^{(i+1)}_{000} + \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn} \\ & \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4}$$

[Hier wie in den folgenden Formeln ist bei den Indizes i, $i+1$, $i+2$ die Zahlenfolge 1, 2, 3, 4, 5 zu ersetzen durch 1, 2, 3, 1, 2.]

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \Re^{(i)}_{lmn} = \mu_i \Big[& R^{(i+1)}_{l-1,m,n} R^{(i+2)}_{1,0,0} + \cdots + R^{(i+1)}_{0,m,n} R^{(i+2)}_{l,0,0} \\ & + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ & + R^{(i+1)}_{0,0,n} R^{(i+2)}_{l,m,0} + \cdots + R^{(i+1)}_{0,0,1} R^{(i+2)}_{l,m,n-1} \Big] \\ & + \frac{1}{T_i} D^{(i)}_{lmn}, \quad \text{wobei} \\ D^{(1)}_{lmn} &= G^{(3)}_{l,m-1,n} - G^{(2)}_{l,m,n-1} \\ D^{(2)}_{lmn} &= G^{(1)}_{l,m,n-1} - G^{(3)}_{l-1,m,n} \\ D^{(3)}_{lmn} &= G^{(2)}_{l-1,m,n} - G^{(1)}_{l,m-1,n}. \end{aligned} \tag{5}$$

In der eckigen Klammer steht die Summe aller Glieder $(R^{(i+1)}_{abc} R^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma})$, so daß $a + \alpha = l$, $b + \beta = m$, $c + \gamma = n$; ausgenommen $(a = l, b = m, c = n)$ und $(\alpha = l, \beta = m, \gamma = n) \cdot a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sind nie negativ.

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn} = & G^{(i+1)}_{l-1,m,n} R^{(i+2)}_{1,0,0} + \cdots + G^{(i+1)}_{0,m,n} R^{(i+2)}_{l,0,0} + \cdots \\ & + G^{(i+1)}_{0,0,n} R^{(i+2)}_{l,m,0} + \cdots + G^{(i+1)}_{0,0,0} R^{(i+2)}_{lmn} \\ & - G^{(i+2)}_{l-1,m,n} R^{(i+1)}_{1,0,0} - \cdots - G^{(i+2)}_{0,m,n} R^{(i+1)}_{l,0,0} - \cdots \\ & - G^{(i+2)}_{0,0,n} R^{(i+2)}_{1,m,0} - \cdots - G^{(i+2)}_{0,0,0} R^{(i+1)}_{l,m,n}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Hier steht die Summe aller Glieder

$$G^{(i+1)}_{abc}\, R^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma} - G^{(i+2)}_{abc}\, R^{(i+1)}_{\alpha\beta\gamma},$$

so daß $a + \alpha = l$, $b + \beta = m$, $c + \gamma = n$ ausgenommen $(a = l,\ b = m,\ c = n)$.

Wir bezeichnen nun mit $R^{(i)}_j$ und $G^{(i)}_j (i = 1, 2, 3;\ j = \text{I, II, III})$ die Fundamentalsysteme von partikulären Lösungen der homogenen Gleichung (4), d. h. der Gleichungen, in welchen $\mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}$ und $\mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}$ durch Null ersetzt sind; mit ΔR und ΔG die Determinanten dieser Fundamentalsysteme und mit $\Delta R^{(i)}_j$ und $\Delta G^{(i)}_j$ die zu $R^{(i)}_j$ und $G^{(i)}_j$ gehörigen Unterdeterminanten.

Dann erhalten die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ die Form:

$$\begin{aligned} R^{(i)}_{lmn} &= \sum_{\text{I}}^{\text{III}j} R^{(i)}_j P^{(j)}_{lmn} \\ G^{(i)}_{lmn} &= \sum_{\text{I}}^{\text{III}j} G^{(i)}_j \Gamma^{(j)}_{lmn} \end{aligned} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} P^{(j)}_{lmn} &= \int_0^t \sum_1^{3i} \frac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R}\, \mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}\, dt \\ \Gamma^{(j)}_{lmn} &= \int_0^t \sum_1^{3i} \frac{\Delta G^{(i)}_j}{\Delta G}\, \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}\, dt \end{aligned} \qquad j = \text{I, II, III.} \qquad (7)$$

Die Funktionen

$$R^{(i)}_{000},\ G^{(i)}_{000},\ A^{(i)}_{000},\ B^{i}_{000},\ R^{(i)}_j,\ G^{(i)}_j,\ \frac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R},\ \frac{\Delta G^{(i)}_j}{\Delta G}$$

bezeichnen wir als die Elementarfunktionen; ihre Werte werden wir sogleich angeben. Die Gleichungen zur Bestimmung der $A^{(i)}_{lmn}$ und $B^{(i)}_{lmn}$ haben dieselbe Form wie die der $G^{(i)}_{lmn}$, nur sind die G-Zeichen durch die A- und B-Zeichen zu ersetzen.

2. Die Elementarfunktionen.

Die Elementarfunktionen entnehmen wir der Dissertation und stellen ihre Werte in dieser Liste zusammen. Es ist:

$$R^{(1)}_{000} = P_1\, cn(at+b); \quad R^{(2)}_{000} = P_2\, sn(at+b);$$
$$R^{(3)}_{000} = P_3\, dn(at+b).$$

$$P_1^2 = \frac{-\mu_1 r_2^2(0) + \mu_2 r_1^2(0)}{\mu_2}; \quad P_2^2 = \frac{\mu_1 r_2^2(0) - \mu_2 r_1^2(0)}{\mu_1};$$
$$P_3^2 = \frac{-\mu_3 r_2^2(0) + \mu_2 r_3^2(0)}{\mu_2}; \tag{8}$$

$$a^2 = \mu_1(\mu_3 r_2^2(0) - \mu_2 r_3^2(0)); \quad sn^2(b) = \frac{\mu_1 r_2^2(0)}{\mu_1 r_2^2(0) - \mu_2 r_1^2(0)} (<1)$$
$$(\text{Modul})\, k^2 = \frac{\mu_3(\mu_1 r_2^2(0) - \mu_2 r_1^2(0))}{\mu_1(\mu_3 r_2^2(0) - \mu_2 r_3^2(0))}.$$

Diese Funktionen, also auch alle anderen, die aus ihnen abgeleitet sind, gelten für diejenigen Anfangsbedingungen $r_i(0)$, für welche das $k^2 < 1$ wird. In allen Fällen, in denen diese letzte Formel ein $k^2 > 1$ ergeben würde, ist zu setzen:

$$R^{(1)}_{000} = P_1\, dn(at+b); \quad R^{(3)}_{000} = P_3\, cn(at+b);$$

dann vertauschen sich bei μ_i und $r_i(0)$ die Indizes 1 und 3, so daß wieder $k^2 < 1$ wird. Dann vertauschen sich auch bei allen $R^{(i)}$, $G^{(i)}$ usw. Funktionen die Indizes 1 und 3.

Wird $k^2 = 1$, so gehen die elliptischen Funktionen, ebenso wie für $k^2 = 0$, in zyklometrische über, so daß alle folgenden Betrachtungen vereinfacht werden.

Ferner ist:

$$G^{(i)}_{000} = \Gamma_{\mathrm{I}} G^{(i)}_{\mathrm{I}} + \Gamma_{\mathrm{II}} G^{(i)}_{\mathrm{II}} + \Gamma_{\mathrm{III}} G^{(i)}_{\mathrm{III}}$$
$$A^{(i)}_{000} = A_{\mathrm{I}} G^{(i)}_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} G^{(i)}_{\mathrm{II}} + A_{\mathrm{III}} G^{(i)}_{\mathrm{III}} \quad i = 1, 2, 3, \tag{8a}$$
$$B^{(i)}_{000} = B_{\mathrm{I}} G^{(i)}_{\mathrm{I}} + B_{\mathrm{II}} G^{(i)}_{\mathrm{II}} + B_{\mathrm{III}} G^{(i)}_{\mathrm{III}}$$

wobei

$$\Gamma_j = \frac{1}{\Delta G}\left(\gamma_1(0)\,\Delta G_j^{(1)} + \gamma_2(0)\,\Delta G_j^{(2)} + \gamma_3(0)\,\Delta G_j^{(3)}\right)_{t=0}$$
$$j = \text{I, II, III.}$$

Entsprechende Formeln bestimmen die A_j und B_j.
Die Fundamentalsysteme $R_j^{(i)}$ und $G_j^{(i)}$ haben diese Werte:

$$\begin{aligned}
R_{\text{I}}^{(1)} &= \varrho_1\, sn(\tau)\, dn(\tau) \qquad \tau = at + b\\
R_{\text{II}}^{(1)} &= \varrho_1\left[sn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_2 + \frac{k'^2}{cn(\tau)}\right]\\
R_{\text{III}}^{(1)} &= \varrho_1\, sn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_3\\
R_{\text{I}}^{(2)} &= \varrho_2\, cn(\tau)\, dn(\tau)\\
R_{\text{II}}^{(2)} &= \varrho_2\, cn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_2\\
R_{\text{III}}^{(2)} &= \varrho_2\, cn(\tau)\, dn(\tau)\, Z_3\\
R_{\text{I}}^{(3)} &= \varrho_3\, sn(\tau)\, cn(\tau)\\
R_{\text{II}}^{(3)} &= \varrho_3\, sn(\tau)\, cn(\tau)\, Z_2\\
R_{\text{III}}^{(3)} &= \varrho_3\left[sn(\tau)\, cn(\tau)\, Z_3 - \frac{k'^2}{k^2\, dn(\tau)}\right],
\end{aligned} \tag{9}$$

wobei

$$\varrho_1 = -i\sqrt{\mu_1};\quad \varrho_2 = \sqrt{\mu_2};\quad \varrho_3 = -ik\sqrt{\mu_3};$$
$$Z_1 = \delta_1\tau + Z(\tau);\quad Z_2 = \delta_2\tau + Z(\tau - K);$$
$$Z_3 = \delta_3\tau + Z(\tau - K - iK');$$
$$\delta_1 = \frac{-1-k^2}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};\quad \delta_2 = \frac{2k^2-1}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};$$
$$\delta_3 = \frac{2-k^2}{3} - 2\frac{N_3}{N_1};$$
$$Z(\tau) = \frac{d}{d\tau}\ln\Theta_1(\tau);\quad N_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i}{d\tau^i}\,\Theta_1(\tau)\right]_{\tau=0}.$$

Ferner

$$\begin{aligned}
G_{\text{I}}^{(1)} &= i\frac{k}{k'}\, cn(i\omega + K)\, cn(\tau)\\
G_{\text{II}}^{(1)} &= \frac{\Theta_0(\tau - i\omega)\,\Theta_3(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\, e^{\Omega\tau}\\
G_{\text{III}}^{(1)} &= \frac{\Theta_0(\tau + i\omega)\,\Theta_3(0)}{\Theta_0(\tau)\,\Theta_3(i\omega)}\, e^{-\Omega\tau}
\end{aligned} \tag{9a}$$

$$G_{\mathrm{I}}^{(2)} = ksn(i\omega + K)sn(\tau) \tag{9a}$$

$$G_{\mathrm{II}}^{(2)} = i\frac{\Theta_3(\tau - i\omega)\Theta_0(0)}{\Theta_0(\tau)\Theta_3(i\omega)}e^{\Omega\tau}$$

$$G_{\mathrm{III}}^{(2)} = -i\frac{\Theta_3(\tau + i\omega)\Theta_0(0)}{\Theta_0(\tau)\Theta_3(i\omega)}e^{-\Omega\tau}$$

$$G_{\mathrm{I}}^{(3)} = \frac{1}{k'}dn(i\omega + K)dn(\tau)$$

$$G_{\mathrm{II}}^{(3)} = -i\frac{\Theta_1(\tau - i\omega)\Theta_2(0)}{\Theta_0(\tau)\Theta_3(i\omega)}e^{\Omega\tau}$$

$$G_{\mathrm{III}}^{(3)} = i\frac{\Theta_1(\tau + i\omega)\Theta_2(0)}{\Theta_0(\tau)\Theta_3(i\omega)}e^{-\Omega\tau},$$

wobei

$$sn(i\omega) = +\sqrt{\frac{-T_1(T_2 - T_3)}{T_3(T_1 - T_2)}}; \quad 0 < i\omega < iK'$$

$$\Omega = \left[\frac{d}{d\tau}ln\,\Theta_0(\tau)\right]_{\tau=0} + iP_3 dn(i\omega).$$

Schließlich haben die Determinanten diese Werte:

$$\Delta R = -k\varrho_1\varrho_2\varrho_3\frac{k'^4}{k^2}$$

$$\Delta R_{\mathrm{I}}^{(1)} = -\varrho_2\varrho_3\frac{k'^2}{k^2}cn(\tau)Z_2$$

$$\Delta R_{\mathrm{II}}^{(1)} = \varrho_2\varrho_3\frac{k'^2}{k^2}cn(\tau)$$

$$\Delta R_{\mathrm{III}}^{(1)} = 0$$

$$\Delta R_{\mathrm{I}}^{(2)} = \varrho_1\varrho_3 k'^2 sn(\tau)\left[\frac{k'^2}{k^2}Z_1 - \frac{i\pi}{2K}\right] \tag{10}$$

$$\Delta R_{\mathrm{II}}^{(2)} = -\varrho_1\varrho_3\frac{k'^2}{k^2}sn(\tau)$$

$$\Delta R_{\mathrm{III}}^{(2)} = \varrho_1\varrho_3 k'^2 sn(\tau)$$

$$\Delta R_{\mathrm{I}}^{(3)} = \varrho_1\varrho_2 k'^2 dn(\tau)Z_3$$

$$\Delta R_{\mathrm{II}}^{(3)} = 0$$

$$\Delta R_{\mathrm{III}}^{(3)} = -\varrho_1\varrho_2 k'^2 dn(\tau)$$

und

$$
\begin{aligned}
\Delta G &= -2i \\
\Delta G_{\mathrm{I}}^{(1)} &= 2\frac{k}{k'}\,cn(i\omega+K)cn(\tau) \\
\Delta G_{\mathrm{II}}^{(1)} &= -i\,\frac{\Theta_3(0)}{\Theta_3(i\omega)}\,\frac{\Theta_0(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\,e^{-\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{III}}^{(1)} &= -i\,\frac{\Theta_3(0)}{\Theta_3(i\omega)}\,\frac{\Theta_0(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\,e^{\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{I}}^{(2)} &= -2iksn(i\omega+K)sn(\tau) \\
\Delta G_{\mathrm{II}}^{(2)} &= -\frac{\Theta_0(0)}{\Theta_3(i\omega)}\,\frac{\Theta_3(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\,e^{-\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{III}}^{(2)} &= \frac{\Theta_0(0)}{\Theta_3(i\omega)}\,\frac{\Theta_3(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\,e^{\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{I}}^{(3)} &= -2i\frac{1}{k}\,dn(i\omega+K)dn(\tau) \\
\Delta G_{\mathrm{II}}^{(3)} &= \frac{\Theta_2(0)}{\Theta_3(i\omega)}\,\frac{\Theta_1(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\,e^{-\Omega\tau} \\
\Delta G_{\mathrm{III}}^{(3)} &= -\frac{\Theta_2(0)}{\Theta_3(i\omega)}\,\frac{\Theta_1(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\,e^{\Omega\tau}.
\end{aligned}
\tag{10a}
$$

3. Allgemeine Eigenschaften der Reihen (3).

[Um unsere Auseinandersetzungen kürzer fassen zu können, schicken wir eine Bemerkung voraus: Die $A_{lmn}^{(i)}$ und $B_{lmn}^{(i)}$ unterscheiden sich von den $G_{lmn}^{(i)}$ nur dadurch, daß in ihnen die Parameter A_j bzw. B_j teilweise an die Stelle von Γ_j treten, wie man aus den Formeln (8a) erkennt. Wenn wir also in der Folge allgemeine Sätze über $G_{lmn}^{(i)}$ aufstellen, die für alle Werte ihrer Parameter gelten, so gelten dieselben Sätze auch für $A_{lmn}^{(i)}$ und $B_{lmn}^{(i)}$.] Die Elementarfunktionen sind eindeutige analytische Funktionen von $\tau(=at+b)$, die nur in den Punkten $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ (m, m' = ganze Zahlen) singuläre Stellen und zwar Pole besitzen. Sie können also in jedem von den genannten verschiedenen Punkte durch eine Reihe nach positiven Potenzen von τ (oder auch t) dargestellt

werden, deren Konvergenzkreis durch den nächstgelegenen singulären Punkt geht. Aus diesen Funktionen werden die $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Integration, eine endliche Anzahl mal nach Rekursionsformeln wiederholt, abgeleitet. Sie sind also eindeutig bestimmt und sind stetige Funktionen von t, die nur an den Punkten $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ singuläre Stellen haben. In jedem regulären Punkte können die $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch Taylorsche Reihen dargestellt werden. Welche Darstellung in der Umgebung eines singulären Punktes anzuwenden ist, muß erst die Untersuchung auseinandersetzen; so viel läßt sich im voraus übersehen, daß an jenen Stellen nur ein polares und logarithmisches Unendlichwerden eintreten kann.

In den Fällen $k = 0$ und $k = 1$ gehen die elliptischen Elementarfunktionen in zyklometrische über; die Singularitäten bleiben für $k = 1$ erhalten, für $k = 0$ verschwinden sie aus dem endlichen Bereiche. Dieser Fall $k = 0$ kann übrigens nur eintreten, wenn wenigstens eine der Größen μ_i verschwindet: dann ist aber die Beziehung (1) nicht mehr erfüllt. Wir erwähnen den Fall $k = 0$ deshalb, weil er ein Grenzfall ist, dem der allgemeine sich stetig nähern kann.

Über das Konvergenzgebiet der Funktionselemente (3) läßt sich folgende Aussage machen [vgl. S. 7—12 der Diss.]:

Es besteht in allen Fällen $0 < k < 1$ eine Beziehung $f(t, \sigma) = 0$, wobei $\sigma_i < \sigma$; die σ_i können komplexe Werte annehmen, t soll auf die reelle Achse beschränkt sein. Die genaue Form von $f(t, \sigma)$ ist uns hier noch unbekannt, doch kennen wir eine wichtige Eigenschaft: es wird bei beliebigen Anfangsbedingungen und Massenverteilungen des Kreisels jedem endlichen t ein bestimmtes σ zugeordnet, so daß für diese Variabeln die Reihen sicher noch konvergieren: zu großem t gehört ein kleines σ, zu kleinen t ein großes σ.

Da die Reihen (3) für alle reellen endlichen t, wenn σ passend bestimmt ist, konvergieren, so folgt, daß die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ für alle reellen endlichen t selbst endlich bleiben; d. h. es gibt positive endliche Zahlen R und G, so daß

$$R^{(i)}_{lmn} \leq R; \quad G^{(i)}_{lmn} < G \tag{11}$$

für alle lmn und alle reellen t.

Die Fortsetzung der Funktionselemente für r_i und γ_i ist auf zwei Wegen möglich, nämlich durch Fortsetzung in den Variabeln σ_i und durch Fortsetzung in der Variabeln t. Einfacher auszuführen ist die Fortsetzung in t, bei einmalig fest gewähltem σ. Über diesen Punkt werden wir weiter unten sprechen (im 6. Abschnitt).

Zwischen den Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ bestehen einige algebraische Beziehungen, die sich aus den algebraischen Integralen der Differentialsysteme (2)(2ª) ableiten lassen. Diese Differentialsysteme besitzen bekanntlich in dem allgemeinen Falle, der durch Gleichung (1) definiert ist, nur drei algebraische Integrale, nämlich

$$\begin{aligned}
&1) \quad T_1 r_1^2 + T_2 r_2^2 + T_3 r_3^2 + 2(\sigma_1\gamma_1 + \sigma_2\gamma_2 + \sigma_3\gamma_3) = h \\
&2) \quad T_1 r_1\gamma_1 + T_2 r_2\gamma_2 + T_3 r_3\gamma_3 = c \\
&3) \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Größen h und c sind unabhängig von t.

Nun haben wir die Anfangswerte $r_i(0)$ und $\gamma_i(0)$ in die Funktionen $R^{(i)}_{000}$ und $G^{(i)}_{000}$ aufgenommen und festgesetzt [Gleichung (7)], daß die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ für $t = 0$ verschwinden. Es ist also:

$$\begin{aligned}
\sum_1^3{}^i (T_i R^{(i)}_{000} G^{(i)}_{000})_{t=0} &= c \\
\sum_1^3{}^i (G^{(i)}_{000})^2_{t=0} &= 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Die Integrale 2) und 3) bleiben ungeändert für $\sigma_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Ihnen genügen also die Funktionen $R^{(i)}_{000}$ und $G^{(i)}_{000}$ für alle t, d. h. es ist

$$\begin{aligned}
\sum_1^3{}^i T_i R^{(i)}_{000} G^{(i)}_{000} &= c \\
\sum_1^3{}^i (G^{(i)}_{000})^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{14}$$

Wir ersetzen in Gleichung (12) die r_i und γ_i durch ihre Entwickelungen (3) und erhalten mit Rücksicht auf (14) die Beziehungen:

$$\sum_1^3{}^i T_i \left[\sum_0^\infty{}^{lmn} \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(i)}_{lmn} \sum_0^\infty{}^{lmn} \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n G^{(i)}_{lmn} - R^{(i)}_{000} G^{(i)}_{000} \right] = 0$$

$$\sum_1^3{}^i \left[\left(\sum_0^\infty{}^{lmn} \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n G^{(i)}_{lmn} \right)^2 - (G^{(i)}_{000})^2 \right] = 0.$$

Diese Gleichungen bestehen für unendlich viele $\sigma_i\,(i=1,2,3)$; also muß der Koeffizient des allgemeinen Gliedes $\sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n$ auf der linken Seite verschwinden; d. h. es ist:

$$\begin{aligned} \sum_1^3{}^i T_i \, {}'\sum_0^{l,m,n}{}^{\lambda\mu\nu} R^{(i)}_{l-\lambda,\, m-\mu,\, n-\nu} G^{(i)}_{\lambda\mu\nu} &= 0 \\ \sum_1^3{}^i \, {}'\sum_0^{lmn}{}^{\lambda\mu\nu} G^{(i)}_{l-\lambda,\, m-\mu,\, n-\nu} G^{(i)}_{\lambda\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Dabei deutet das Zeichen ' vor den zweiten Summen an, daß der Fall ausgeschlossen ist, in dem gleichzeitig $l = \lambda = 0$, $m = \mu = 0$, $n = \nu = 0$. In diesem Falle gelten die Gleichungen (14).

4. Satz über das Verschwinden der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ im Punkte $t = 0$.

Mittels der Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch Potenzreihen wollen wir eine Formel über das Verschwinden dieser Funktionen im Punkte $t = 0$ ableiten. Diese Formel wird uns weiter unten nützlich sein, bei der Untersuchung über den Gültigkeitsbereich der r_i und γ_i für die Variabeln t, σ_1, σ_2, σ_3.

Es ist:

$$R^{(i)}_{000} = t^{\nu r^{(i)}_{000}} \cdot r^{(i)}_{000\,|\,0} \left(1 + \sum_1^\infty{}^k t^k r^{(i)}_{000\,|\,k} \right)$$

usw.

$$R_j^{(i)} = t^{vr_j^{(i)}} \cdot r_{j\,0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k r_{j\,k}^{(i)}\right) \tag{16}$$

usw.

$$\frac{\Delta R_j^{(i)}}{\Delta R} = t^{v\delta r_j^{(i)}} \cdot \delta r_{j|0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k \delta r_{j\,k}^{(i)}\right)$$

usw.

Die Exponenten $vr_{0\,0\,0}^{(i)}$ usw. sind ganze Zahlen; sie bezeichnen die Ordnung des Verschwindens der Funktion im Punkte $t = 0$. Es gibt eine ganze Zahl $\nu > 0$, so daß

$$\{vr_{0\,0\,0}^{(i)},\ vg_{0\,0\,0}^{(i)},\ vr_j^{(i)},\ vg_j^{(i)},\ v\delta r_j^{(i)},\ v\delta g_j^{(i)}\} > \nu. \tag{17}$$

Die $r_{0\,0\,0\ k}^{(i)}$ usw. sind von t unabhängige Größen. Es ist

$$\{r_{0\,0\,0|0}^{(i)},\ g_{0\,0\,0|0}^{(i)},\ r_{j|0}^{(i)},\ g_{j|0}^{(i)},\ \delta r_{j|0}^{(i)},\ \delta g_{j\,0}^{(i)}\} \gtrless 0.$$

Aus den Gleichungen (5), (6), (7), (16) ergeben sich dann die Formeln

$$\begin{aligned} R_{lmn}^{(i)} &= t^{vr_{lmn}^{(i)}} \cdot r_{lmn|0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k r_{lmn|k}^{(i)}\right) \\ G_{lmn}^{(i)} &= t^{vg_{lmn}^{(i)}} \cdot g_{lmn\ 0}^{(i)} \left(1 + \sum_1^\infty{}_k\, t^k g_{lmn\ k}^{(i)}\right), \end{aligned} \tag{18}$$

wobei

$$\{r_{lmn\ 0}^{(i)};\ g_{lmn|0}^{(i)}\} \gtrless 0.$$

Entsprechende Entwickelungen bestehen für $\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)}$, $P_{lmn}^{(j)}$ usw. Es sei

$$l + m + n = P;\ R_{lmn}^{(i)} = R_P^{(i)} \text{ usw.}$$

Dann beweisen wir folgenden Satz:
Wenn die Formeln

$$\begin{aligned} vr_x^{(i)} &\geqq \nu + 2x - 1 \\ vg_x^{(i)} &\geqq \nu + 2x \end{aligned} \tag{19}$$

bestehen für

$$x = 1, 2, 3, \ldots, P-1,$$

so gelten auch die Formeln:

$$\begin{aligned} vr_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P - 1 \\ vg_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P. \end{aligned} \tag{20}$$

Der Beweis ist so: Infolge der Beziehungen (19) kommt aus Gleichung (5)

$$v\mathfrak{r}_P^{(i)} \geqq \nu + 2P - 2$$

und, wenn die erste der Gleichung (20), welche der zweiten selbständig vorangeht, bewiesen ist:

$$v\mathfrak{g}_P^{(i)} > \nu + 2P - 1,$$

dann folgt aus Gleichung (7) und (17)

$$\begin{aligned} v\varrho_P^{(j)} &\geqq \nu + 2P - 1 \\ v\gamma_P^{(j)} &> \nu + 2P, \end{aligned}$$

also wird nach Gleichung (6) und (17)

$$\begin{aligned} vr_P^{(i)} &> \nu + 2P - 1 \\ vg_P^{(i)} &\geqq \nu + 2P, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die Beziehungen (19) gelten für $x = 1, 2$, folglich gelten die Formeln (20) für alle P.

Den Fall, in dem $\nu = 0$ und nicht sämtliche

$$vr_{lmn}^{(i)}[l + m + n = P] > 2P - 1,$$

sowie nicht sämtliche $vg_{lmn}^{(i)} > 2P$ sind, bezeichnen wir als den normalen Fall.

Eine Folgerung ziehen wir aus der eben abgeleiteten Formel:

Es sei $\nu = 0$; alle $vr_P^{(i)} > 2P - 1$, alle $vg_P^{(i)} > 2P$ } jedoch endlich.

Wir betrachten die Folgen:

$$\begin{aligned} &vr_P^{(i)},\ vr_{P+1}^{(i)},\ vr_{P+2}^{(i)},\ \ldots,\ vr_{P+\alpha+1}^{(i)} \\ &vg_P^{(i)},\ vg_{P+1}^{(i)},\ vg_{P+2}^{(i)},\ \ldots,\ vg_{P+\beta+1}^{(i)}. \end{aligned}$$

Wenn nun die Beziehungen bestehen

$$vr^{(i)}_{P+\xi+1} - vr^{(i)}_{P+\xi} < 2$$
$$vg^{(i)}_{P+\eta+1} - vr^{(i)}_{P+\eta} < 2$$

für alle

$$\xi = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha$$
$$\eta = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta,$$

so sind α und β endliche Zahlen.

Denn die normalen $vr^{(i)}_{P+\xi}$ und $vg^{(i)}_{P+\eta}$ wachsen um 2, wenn ξ und η um 1 zunehmen, während die $vr^{(i)}_{P+\xi}$ und $vg^{(i)}_{P+\eta}$ in dem angenommenen Falle nur um 1 wachsen; also müssen die normalen Werte den endlichen Vorsprung der wirklichen Werte nach einer endlichen Anzahl von Schritten einholen.

5. Das Konvergenzgebiet der Funktionen r_i und γ_i für die Variabeln t, σ_1, σ_2, σ_3 [1]).

Für die Definition des Konvergenzgebietes von r_i und γ_i betrachten wir in deren Entwickelungen (3) alle Glieder

$$\sigma_1^l\, \sigma_2^m\, \sigma_3^n\, R^{(i)}_{l\,m\,n}$$

usw., für welche $l + m + n = P$ als gleichberechtigt und bezeichnen:

$$\left.\begin{array}{c} \sigma_1^P R^{(i)}_{P\,0\,0} + \sigma_1^{P-1}\sigma_2 R^{(i)}_{P-1,\,1,\,0} + \cdots \\ + \cdots + \sigma_1^l \sigma_2^m \sigma_3^n R^{(i)}_{l\,m\,n}\,[l + m + n = P] + \\ + \cdots + \sigma_3^P R^{(i)}_{0\,0\,P} \end{array}\right\} = \sum{}^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 R^{(i)}). \qquad (21)$$

usw.

Wir definieren ferner eine Zahl η durch die Gleichung:

$$\eta = 1 + \frac{1+\varepsilon}{P} + \zeta, \qquad (22)$$

wobei

$$\varepsilon > 0$$
$$\zeta \geq 0;$$

[1]) Diese Betrachtung gilt für alle Fälle $0 \leq k \leq 1$.

diese Größe ζ dient dazu, die Konvergenz der Reihen gewissermaßen zu regulieren; je größer ζ ist, desto besser ist die Konvergenz. Das Konvergenzgebiet der Funktionen r_i und γ_i, $\mathfrak{K}$ ist dann bestimmt als dasjenige Gebiet der Variabeln $t, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, welches folgenden Gebilden gemeinsam ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sum^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 R^{(i)})}{\sum^{P+1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 R^{(i)})} &= \eta \\ \frac{\sum^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 G^{(i)})}{\sum^{P+1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 G^{(i)})} &= \eta \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } P > P^*$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \eta\sum^{P+1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 R^{(i)}) - \sum^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 R^{(i)}) &= 0 \\ \eta\sum^{P+1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 G^{(i)}) - \sum^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 G^{(i)}) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } P > P^*. \tag{23}$$

Mit diesen Gebilden werden wir uns in einer anderen Arbeit eingehend zu beschäftigen haben.

Mittels der Ergebnisse des 4. Abschnittes können wir eine Aussage über $\mathfrak{K}$ machen, die uns über dessen Verhalten belehrt, wenn t der Null sich nähert.

Es ist nämlich für

$$0 < t < \left|\frac{iK' - b}{a}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} |R^{(i)}_{lmn}| &< t^{2P-1}\,|r^{*(i)}_{lmn\,0}\left(1 + \left|\sum_1^\infty{}_k t^k r^{*(i)}_{lmn\,k}\right|\right) \\ |G^{(i)}_{lmn}| &\leq t^{2P}\,|g^{*(i)}_{lmn\,0}|\left(1 + \left|\sum_1^\infty{}_k t^k g^{*(i)}_{lmn\,k}\right|\right), \end{aligned}\right. \tag{24}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} r^{*(i)}_{lmn\,0} &= \text{wirkl. Koeff. } r^{(i)}_{lmn\,0}, && \text{wenn } vr^{(i)}_{lmn} = 2P-1 \\ &= 1, && \text{wenn } vr^{(i)}_{lmn} > 2P-1 \\ g^{*(i)}_{lmn\,0} &= \text{wirkl. Koeff. } g^{(i)}_{lmn\,0}, && \text{wenn } vg^{(i)}_{lmn} = 2P \\ &= 1, && \text{wenn } vg^{(i)}_{lmn} > 2P. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $r^{(i)}_{lmn\ k}$ sind so zu bestimmen, daß $r^{(i)}_{lmn\ 0} \cdot r^{(i)}_{lmn\ k}$ gleich ist dem Koeffizienten des Gliedes t^{2P-1+k} in der wirklichen Potenzreihe (18) von $R^{(i)}_{lmn}$; in der gleichen Weise sind die $g^{(i)}_{lmn\ k}$ zu bestimmen.

Die in Gleichung (24) rechts stehenden majoranten Funktionen bleiben endlich für alle t des Bereiches, wie groß auch lmn werden mögen; dies gilt um so mehr für die Koeffizienten. Denn für die Reihen (18) gelten die Beziehungen (11) und diesen Reihen ist in (24) ein oder kein Glied hinzugefügt.

Wir können nun positive endliche Konstante $c_P > 0$ und positive Funktionen $\vartheta_P(t)$ bestimmen, die für $t=0$ verschwinden und im angegebenen Bereiche endlich bleiben (als solche Funktionen können wir z. B. aus Geraden Polygonzüge bilden), so daß

$$|R^{(i)}_{lmn}| < t^{2P-1} c_P(1 + \vartheta_P(t))$$
$$|G^{(i)}_{lmn}| < t^{2P} c_P(1 + \vartheta_P(t)).$$

Dann wird:

$$|\sum^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 R^{(i)})| \leq t^{2P-1} c_P(1+\vartheta_P(t)) \sum^P(|\sigma_1||\sigma_2||\sigma_3|1)$$
$$|\sum^P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 G^{(i)}) \leq t^{2P} c_P(1+\vartheta_P(t)) \sum^P(|\sigma_1||\sigma_2||\sigma_3|1).$$

Diese majoranten Funktionen bilden majorante Reihen M_1, deren Konvergenzgebiet $\mathfrak{K}_1$ innerhalb des Gebietes $\mathfrak{K}$ liegt. $\mathfrak{K}_1$ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\eta t^2 \frac{c_{P+1}(1+\vartheta_{P+1}(t))}{c_P(1+\vartheta_P(t))} \sum^{P+1}(|\sigma_1||\sigma_2||\sigma_3|1) - \sum^P(|\sigma_1||\sigma_2||\sigma_3|1) = 0$$
$$\text{für } P > P^*. \tag{25}$$

Aus dieser Gleichung können wir sofort erfahren, wie t sich verhalten muß, wenn $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ beliebig große, aber endliche Werte annehmen.

Denn es gibt eine positive Zahl C, so daß

$$c_P(1+\vartheta_P(t)) < C \text{ für alle } P$$

und wir erhalten so ein Gebiet $\mathfrak{K}_2$, das innerhalb $\mathfrak{K}_1$ liegt und bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\eta t^2 \sum^{P+1}(|\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ 1) - \sum^{P}(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\ 1) = 0 \quad \text{für } P > P^*. \tag{26}$$

Nun sei

$$\sigma_i \leq \sigma \qquad i = 1, 2, 3,$$

dann finden wir ein Gebiet $\mathfrak{K}_3$ innerhalb $\mathfrak{K}_2$, bestimmt durch die Gleichung:

$$\eta t^2 \sigma (1+2(P+1)+\tfrac{1}{2}(P+1)P) - (1+2P+\tfrac{1}{2}P(P-1)) = 0. \tag{27}$$

Wir bezeichnen:

$$\frac{1+2(P+1)+\frac{1}{2}(P+1)P}{1+2P+\frac{1}{2}P(P-1)} = p.$$

p bleibt endlich für alle P und es ist $\lim_{P=\infty} p = 1$.

Gleichung (27) lautet also

$$\eta t^2 \sigma p = 1. \tag{28}$$

Das Gebiet $\mathfrak{K}_3$ hat also die Eigenschaft, daß zu jedem beliebig großen aber endlichen σ ein endliches t gehört, das von den Parametern $T_1 T_2 T_3 r_i(0) \gamma_i(0)$ unabhängig ist.

[Daß die genaue Beziehung zwischen σ_i und t, die sich durch die Gleichung (23) ergibt, von den eben genannten Parametern nicht unabhängig ist, läßt sich in Kürze so einsehen: $I^{(i)}_{lmn}$ ist eine homogene Funktion in $\Gamma_\mathrm{I}\Gamma_\mathrm{II}\Gamma_\mathrm{III}$ vom Grade $P-1$ und $G^{(i)}_{lmn}$ eine homogene Funktion in $\Gamma_\mathrm{I}\Gamma_\mathrm{II}\Gamma_\mathrm{III}$ vom Grade P. In Gleichung (23) können sich also diese Größen $\Gamma_\mathrm{I}\Gamma_\mathrm{II}\Gamma_\mathrm{III}$ nicht vollständig wegheben. Die Γ_j sind eindeutig umkehrbare lineare Funktionen von $\gamma_i(0)$. Also ist $\mathfrak{K}$ abhängig von $\gamma_i(0)$.]

Die Reihen, deren Konvergenzgebiet wir eben betrachteten, sind also konvergent für große σ_i und gewisse t; sie sind um so mehr konvergent für kleine σ_i. Wir fassen das Ergebnis dieser Betrachtung zusammen:

Die Reihen für r_i und γ_i in Gleichung (3) haben, bei beliebigen Anfangsbedingungen, die Eigenschaft, daß zu allen endlichen $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ ein endliches t gehört,

so daß sie für diese Variabeln konvergieren; dieses t ist abhängig von den Parametern T_1, T_2, T_3, $r_i(0)$, $\gamma_i(0)$, bleibt jedoch oberhalb einer Größe, die von diesen Parametern frei ist.

6. Fortsetzung der Funktionselemente für r_i, γ_i, α_i, β_i.

Wir können jetzt die Fortsetzung der in Gleichung (3) angegebenen Funktionselemente bis zu jedem endlichen Werte der reellen Variabeln t bei beliebigen, endlichen σ_i ausführen.

Es seien also die Trägheitsachsen T_i und die Anfangsbedingungen $r_i(0)$ usw. gegeben; wir wünschen den Verlauf der Funktionen r_i, γ_i, α_i, β_i für $0 < \sigma_i < \sigma$; $0 < t < T$ kennen zu lernen, d. h. wir wollen den Ablauf der Bewegung eines gewissen Kreiselsystems mit festem Trägheitsellipsoid und festen Anfangsbedingungen bei variabeln Schwerpunktskoordinaten in einem gewissen Zeitabschnitte untersuchen. (Für den Fall des einzelnen Kreisels sind auch die Schwerpunktskoordinaten σ_i festgelegt.)

Wir bilden die ersten Funktionselemente [Gleichung (3)], sei es aus elliptischen oder aus zyklometrischen Elementarfunktionen und berechnen das zu σ gehörige t_1; den günstigsten Wert gibt das Gebilde $\mathfrak{K}$; die Gebilde $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3$ geben weniger günstige Werte, doch sind sie einfacher zu behandeln. So erkennen wir den Verlauf von r_i usw. für alle $|\sigma_i \leq \sigma$ und $0 < t \leq t_1$. Wir benützen den Zustand für $t = t_1$ als neue Anfangsbedingungen $r_i'(0)$; $\gamma_i'(0)$ usw., bilden zum zweiten Male die Funktionselemente (3) und berechnen mit den neuen Parametern $r_i'(0)$ usw. das zu σ gehörige t_2'; so erhalten wir den Verlauf von r_i usw. für $\sigma_i < \sigma$; $0 < t' < t_2'$, d. h. für $t_1 < t < t_2$. So fahren wir fort und erhalten n-Funktionselemente, die alle in derselben Weise nach den Formeln (5), (6), (7) aufgebaut sind. Die Elementarfunktionen sind immer elliptische Funktionen, doch mit verschiedenen Moduln und Konstanten, in den Grenzfällen zyklometrische Funktionen. Die n-Funktionselemente

gelten für $\sigma_i < \sigma$ und je für $0 < t < t_1$; $t_1 < t < t_2$; . . . . $t_{n-1} \leq t \leq t_n$.

Da nach Gleichung (28) alle t_j oberhalb einer endlichen Größe bleiben, so muß nach einer endlichen Zahl n von Schritten die endliche Zahl T erreicht werden.

7. Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ mit $G^{(i)}_{lmn}$ in einem Streifen der t-Ebene, welcher die ganze reelle Achse enthält.

Zu der geometrisch-mechanischen Betrachtung der Kreiselbewegung, d. h. zur Untersuchung der Funktionen r_i und γ_i usw. für reelle t ist es erwünscht, die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ in einer solchen Form dargestellt zu haben, die für alle reellen t gilt und zugleich durch einfache Operationen sich aufbauen läßt. Eine solche Darstellungsform läßt sich in der Tat angeben, wie die folgende Betrachtung zeigt.

Die Elementarfunktionen

$$R^{(i)}_{000}\,;\ G^{(i)}_{000};\ R^{(i)}_{j};\ G^{(i)}_{j};\ \frac{\Delta R^{(i)}_{j}}{\Delta R};\ \frac{\Delta G^{(i)}_{j}}{\Delta G}$$

sind Aggregate von

1. Funktionen der Variablen t mit der reellen Periode

$$\Pi_1 = \frac{4K}{a};$$

es sind dies die Funktionen

$$cn(\tau),\ sn(\tau),\ dn(\tau),\ \frac{\Theta_\alpha(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)};\ \frac{\Theta_\alpha(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)};\ \frac{\dot\Theta_\alpha(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\ (\alpha=1,2,3), \quad (29)$$

wobei

$$\dot\Theta(\tau) = \frac{d}{d\tau}\Theta(\tau);\ \ \tau = at+b;\ \ i = \sqrt{-1},$$

2. Funktionen mit der reellen Periode

$$\Pi_2 = \frac{2i\pi}{\Omega \cdot a};$$

es sind die Funktionen $e^{\Omega\tau}$ und $e^{-\Omega\tau}$,

3. der säkularen Funktion τ.

Jede der in 1 genannten Funktionen ist darstellbar in der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty p} c_p e^{piaat}$, wobei $a = \frac{\pi}{2K}$. Eine solche Darstellung ist möglich in jedem Streifen der t-Ebene, parallel zur reellen Achse, der die Punkte $t = \frac{1}{a}(iK' + 2mK + 2m'iK' - b)$ vermeidet. Für unsere Zwecke benutzen wir den Streifen, welcher die reelle Achse in sich enthält. Seine Grenzpunkte sind also die Punkte $t = \frac{1}{a}(\pm iK' + 2mK - b)$. In diesem Falle kann, wenn es zweckmäßig erscheint, die eben angegebene Reihe zerlegt werden in die beiden Reihen

$$\sum_{0}^{\infty p} c'_p \cos(paat) + \sum_{1}^{\infty p} c''_p \sin(paat).$$

Der Streifen hat immer eine angebbare endliche Breite. Denn a und b sind endliche reelle Zahlen; iK' hat den kleinsten Wert für $k = 1$, nämlich $\frac{i\pi}{2}$: es wächst stetig bei abnehmendem k und es ist $\lim_{k=0} iK' = i\infty$.

Aus den Elementarfunktionen werden durch die vorgeschriebenen Operationen [Gleichung (5), (6), (7)] die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ abgeleitet als Aggregate von Funktionen mit der Periode H_1, solchen mit der Periode H_2 und von säkularen Funktionen. Diese Aggregate ordnen wir und erhalten die Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty p} e^{piaat} \sum_{-Q}^{+Q q} e^{q\Omega at} \sum_{0}^{+S s} t^s c_{pqs}. \tag{30}$$

Dabei sind die c_{pqs} unabhängig von t: Q und S sind endliche ganze Zahlen, die von lmn abhängen.

In dieser Reihe können die Glieder e^{piaat} und $e^{q\Omega at}$ in cos- und sin-Glieder zerlegt und diese geordnet werden.

Im einzelnen gestaltet sich diese Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ so: Die Elementarfunktionen haben bereits die

Form (30); dabei ist für die Funktionen $R_j^{(i)}$ und $\frac{\Delta R_j^{(i)}}{\Delta R}$ die Zahl $Q = 0$, für $G_j^{(i)}$ und $\frac{\Delta G_j^{(i)}}{\Delta G}$ ist $S = 0$. Die Werte der Koeffizienten c_{pqs} werden wir unten in einer Liste angeben. Für die Funktionen $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ und die zwischen ihnen vermittelnden Funktionen $\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)}$ und $\mathfrak{G}_{lmn}^{(i)}$ [Störungsfunktionen] sowie $P_{lmn}^{(j)}$ und $\Gamma_{lmn}^{(j)}$ finden wir durch den Schluß von P auf $P+1$ (wobei $P = l+m+n$) folgende Werte:

Für

$$\begin{aligned}
R_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P-2; \quad S = 6P-3 \\
G_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P+1; \quad S = 6P-2 \\
\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P-2; \quad S = 6P-6 \\
\mathfrak{G}_{lmn}^{(i)} &: Q = 3P-1; \quad S = 6P-3 \\
P_{lmn}^{(j)} &: Q = 3P-2; \quad S = 6P-4 \\
\Gamma_{lmn}^{(j)} &: Q = 3P \quad\ ; \quad S = 6P-2.
\end{aligned} \tag{31}$$

Die Koeffizienten c_{pqs} werden durch diese Gleichungen bestimmt [die Bezeichnung ist so, daß der kleine Buchstabe Koeffizient der durch den großen versinnbildlichten Funktion ist]:

$$\mathfrak{r}_{lmn\,|\,pqs}^{(i)} = \mu_i \sum_{\alpha\beta\gamma} \sum_{\lambda\mu\nu} r_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\;\;p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}^{(i+1)} r_{\alpha\beta\gamma\,|\,\lambda\mu\nu}^{(i+2)} + \frac{1}{T_i} d_{lmn}^{(i)} \quad \text{(vgl. Gleichung (5))}$$

$\varrho_{lmn\;\;pqs}^{(j)}$ [wenn nicht gleichzeitig $p = 0,\ q = 0$]

$$= \frac{\varrho'_{pqs}}{piaa + q\Omega a} + \sum_1^{S-s} (-1)^\nu \frac{(s+\nu)!}{s!} \frac{\varrho'_{p,q,s+\nu}}{(piaa + q\Omega a)^{\nu+1}},$$

wobei

$$\varrho'_{pqs} = \varrho'^{(j)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_1^3 i \sum_{\lambda\mu\nu} \mathfrak{r}_{lmn\,|\,p-\lambda,\,q-\mu,\,s-\nu}^{(i)} \cdot \delta r_{j\,|\,\lambda\mu\nu}^{(i)}$$

$$\varrho_{lmn\;\;pqs}^{(j)}[p=0,\,q=0] = \frac{\varrho'_{p,q,s-1}}{s}$$

$$[p=0,\,q=0,\,s=0] = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-Q}^{+Q} \varrho_{lmn\;\;p,q,s=0}^{(j)} \tag{32}$$

$$\gamma^{(i)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} j \sum^{\lambda\mu\nu} \varrho^{(j)}_{lmn\,|\,p-\lambda,q-\mu,s-\nu}\, \gamma^{(i)}_{j\,|\,\lambda\mu\nu}$$

$$g^{(i)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum^{\alpha\beta\gamma}\sum^{\lambda\mu\nu}\Big[\underset{\text{vgl. Gl. (5a)}}{g^{(i+1)}_{l-\alpha,m-\beta,n-\gamma\,|\,p-\lambda,q-\mu,s-\nu}\,\gamma^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma\,|\,\lambda\mu\nu} - g^{(i+2)}_{l-\alpha,m-\beta,n-\gamma\,|\,p-\lambda,q-\mu,s-\nu}\,\gamma^{(i+1)}_{\alpha\beta\gamma\,|\,\lambda\mu\nu}}\Big]$$

$\gamma'^{(j)}_{lmn\;pqs}$ [wenn nicht gleichzeitig $p=0,\ q=0$]

$$= \frac{\gamma'^{(j)}_{pqs-1}}{pi\alpha a + q\Omega a} + \sum_{1}^{s-s} {}^{\nu}(-1)^{\nu}\,\frac{(s+\nu)!}{s!}\,\frac{\gamma'^{(j)}_{lmn\,|\,p,q,s+\nu}}{(pi\alpha a+q\Omega a)^{\nu+1}},$$

wobei

$$\gamma'^{(j)}_{lmn\;pqs} = \sum_{1}^{3} i \sum^{\lambda\mu\nu} g^{(i)}_{lmn\;p-\lambda,q-\mu,s-\nu}\,\delta g^{(i)}_{j\;\lambda\mu\nu}$$

$$\gamma^{(j)}_{lmn\,|\,pqs}[p=0,\ q=0] = \gamma'^{(j)}_{lmn\,|\,p,q,s-1}$$

$$[p=0,\ q=0,\ s=0] = -\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{p}\sum_{-Q}^{+Q} {}^{q}\,\gamma^{(i)}_{lmn\,|\,p,q,s=0} \qquad (32\,\mathrm{a})$$

$$g^{(i)}_{lmn\,|\,pqs} = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} j \sum^{\lambda\mu\nu} \gamma^{(i)}_{lmn\,|\,p-\lambda,q-\mu,s-\nu}\, g^{(i)}_{j\,|\,\lambda\mu\nu}.$$

In dieser Weise lassen sich also die Koeffizienten $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ [entsprechend auch $A^{(i)}_{lmn}$ und $B^{(i)}_{lmn}$] in einer Form darstellen, die für alle reellen t gilt, frei von Integralen ist und zu ihrem Aufbau nur die Operationen der Addition und Multiplikation erfordert.

8. Die Entwickelungen der Elementarfunktionen.

Zur Ausführung dieser Darstellung der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ müssen wir die Entwickelungen der Elementarfunktionen in der oben besprochenen Form kennen. Um diese zu erhalten, stellen wir zunächst die Entwickelungen der in (29, 1) genannten Funktionen zusammen. Sie haben alle die Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{p} c_p e^{pi\alpha at}, \qquad \text{wobei} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2K}$$

und wir brauchen nur die Koeffizienten c_p für die einzelnen Funktionen angeben; wir werden immer nur das Zeichen schreiben, das an die Stelle von c treten soll. Die Koeffizienten für die nicht angegebenen Werte von p verschwinden.

Es sei

$$\tau = at + b;\ \beta = e^{\pi i a b};\ \varepsilon = \pi i a K';\ \vartheta = \dot{\Theta}_1(0),$$

dann ist für

$$\begin{aligned}
sn(\tau)^{1}) : a^{(1)}[p = 2r+1] &= \frac{a\,\Theta_0(0)}{\sqrt{k}\,\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin\varepsilon} \\
cn(\tau) : a^{(2)}[p = 2r+1] &= \frac{a\sqrt{k'}\,\Theta_2(0)}{\sqrt{k}\,\vartheta}\cdot\frac{\beta}{\cos\varepsilon} \\
dn(\tau) : a^{(3)}[p = 2r] &= \frac{a\sqrt{k'}\,\Theta_3(0)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\cos\varepsilon} \\
\frac{\Theta_0(\tau + i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : b^{(1)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_1(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega + \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_0(\tau - i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : d^{(1)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_1(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega - \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_1(\tau + i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : b^{(2)}[p = 2r+1] &= \frac{a\,\Theta_0(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega + \varepsilon)} \qquad (33) \\
\frac{\Theta_1(\tau - i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : d^{(2)}[p = 2r+1] &= \frac{-a\,\Theta_0(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\sin(ai\omega - \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_3(\tau + i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : b^{(3)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_2(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\cos(ai\omega + \varepsilon)} \\
\frac{\Theta_3(\tau - i\omega)}{\Theta_0(\tau)} : d^{(3)}[p = 2r] &= \frac{a\,\Theta_2(i\omega)}{\vartheta}\,\frac{\beta}{\cos(ai\omega - \varepsilon)} \\
\frac{\dot{\Theta}_1(\tau)^{2})}{\Theta_0(\tau)} : c^{(1)} &= -a\sqrt{k}\,a^{(1)}\cot\varepsilon \\
\frac{\dot{\Theta}_2(\tau)}{\Theta_0(\tau)} : c^{(2)} &= a\sqrt{\frac{k}{k'}}\,a^{(2)}\ \mathrm{tang}\ \varepsilon \\
\frac{\dot{\Theta}_3(\tau)}{\Theta_0(\tau)} : c^{(3)} &= a\,\frac{1}{\sqrt{k'}}\,a^{(3)}\ \mathrm{tang}\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

---

[1]) Die Entwickelung der doppeltperiodischen Funktionen zweiter Art in Reihen von zyklometrischen Funktionen wurde bekanntlich bereits von Jacobi und Hermite ausgeführt. Literaturangaben über andere Bearbeitungen dieses Gegenstandes finden sich in dem Werke: Krause, Theorie der doppeltperiodischen Funktionen einer veränderlichen Größe (Leipzig 1895—1897). Von neueren Arbeiten sei nur eine genannt: Teixeira, Sur le developpement des fonctions doublement periodiques (Crelles Journal, Bd. 125 (1903), S. 301 ff.).

[2]) Die Funktion

$$\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_1(\tau)}$$

hat nur Pole an den Stellen $\tau = 2iK' + 2mK + 2m'iK'$, es gilt also die Entwickelung

$$\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_1(\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty p} \delta_p e^{p i a \tau} \tag{I}$$

in dem Parallelstreifen zur reellen Achse mit den Grenzpunkten $\tau = \pm 2iK' + 2mK$.

Ferner gilt die Entwickelung

$$\frac{\dot{\Theta}_1(\tau)}{\Theta_0(\tau)} = \sum_{-\infty}^{+\infty p} d_p e^{p i a \tau} \tag{II}$$

in dem Streifen mit den Grenzpunkten $\tau = \pm iK' + 2mK$.

Wir setzen in Gleichung (I) $\tau = \tau' + iK'$ und erhalten:

$$-\frac{i\pi}{2K}\sqrt{k}\,sn(\tau') + \frac{\dot{\Theta}_1(\tau')}{\Theta_0(\tau')} = \sum_{-\infty}^{+\infty p} \delta_p e^{p i a (\tau' + iK')} \tag{III}$$

Diese Entwickelung gilt im Parallelstreifen zur reellen Achse mit den Grenzpunkten $\tau' = iK' + 2mK$ und $\tau' = -3iK' + 2mK$.

Die Entwickelung von $sn(\tau')$ (vgl. Gleichung (17)) gilt in demselben Bereiche wie (II). In eben diesem Gebiete erhalten wir durch Vergleichung von (II) und (III), wenn wir statt τ' wieder τ schreiben, die Beziehung:

$$\frac{-i\pi}{2K}\cdot\sqrt{k}\sum_{-\infty}^{+\infty p} a_p^{(1)} e^{p i a \tau} + \sum_{-\infty}^{+\infty p} d_p e^{p i a \tau} = \sum_{-\infty}^{+\infty p} \delta_p e^{p i a (\tau + iK')} \tag{IV}$$

und erhalten jetzt die notwendigen Gleichungen zur Berechnung von d_p und δ_p. Nämlich aus (I) und (II):

$$\delta_{-p} = \delta_p; \quad d_{-p} = d_p$$

$$\text{aus (IV):} \quad -ia\sqrt{k}\,a_p^{(1)} + d_p = \delta_p e^{-paK'} \tag{V}$$

$$(\text{da } a_{-p}^{(1)} = -a_p^{(1)}) \quad +ia\sqrt{k}\,a_p^{(1)} + d_{-p} = \delta_{-p} e^{+paK'}$$

und hieraus finden wir:

$$d_p = -ia\sqrt{k}\,a_p^{(1)}\,\frac{e^{ipaiK} + e^{-ipaiK'}}{e^{ipaiK'} - e^{-ipaiK'}} = -a\sqrt{k}\,a_p^{(1)}\cot(paiK'). \tag{VI}$$

Nach derselben Methode sind die Entwickelungen von

$$\frac{\Theta_2(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \quad \text{und} \quad \frac{\dot{\Theta}_3(\tau)}{\Theta_0(\tau)}$$

berechnet.

Mit diesen Formeln werden die Koeffizienten c_{pqs} [Gleichung (30)] für die Elementarfunktionen nach den Gleichungen (8), (9), (10) berechnet.

Die Koeffizienten für

$$R_{000}^{(i)};\ G_{000}^{(i)};\ G_j^{(i)};\ \frac{\Delta G_j^{(i)}}{\Delta G}$$

lassen sich sofort ablesen, nur die Koeffizienten für

$$R_j^{(i)} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta R_j^{(i)}}{\Delta R}$$

erfordern eine kleine Umrechnung, darum geben wir diese an. Die Art der Angabe ist dieselbe wie oben; alle $r_{j\,pqs}^{(i)}$ und $\delta r_{j\,pqs}^{(i)}$ für $q \gtrless 0$ sind Null, ebenso für die nicht angegebenen Werte von s. Es ist also für:

$$\begin{aligned}
R_{\mathrm{I}}^{(1)} : r_{\mathrm{I}}^{(1)} \quad & [s=0] = -\varrho_1 piaa_p^{(2)} \\
R_{\mathrm{II}}^{(1)} : r_{\mathrm{II}}^{(1)} \quad & [s=0] = \varrho_1 k^2 \sum_{-\infty}^{+\infty n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} a_{p-n}^{(3)} c_n^{(1)} + \sqrt{k'} a_{p-n}^{(1)} c_n^{(3)} \right) \\
& \qquad - \varrho_1 \delta_2 bpiaa_p^{(2)} \\
& [s=1] = -\varrho_1 \delta_2 apiaa_p^{(2)} \\
R_{\mathrm{III}}^{(1)} : r_{\mathrm{III}}^{(1)} \quad & [s=0] = \varrho_1 pa^2 a_p^{(2)} + \varrho_1 \sqrt{k'} \sum_{-\infty}^{+\infty n} a_{p-n}^{(1)} c_n^{(3)} \\
& \qquad - \varrho_1 \delta_3 bpiaa_p^{(2)} \\
& [s=1] = -\varrho_1 \delta_3 apiaa_p^{(2)} \\
R_{\mathrm{I}}^{(2)} : r_{\mathrm{I}}^{(2)} \quad & [s=0] = \varrho_2 piaa_p^{(1)} \\
R_{\mathrm{II}}^{(2)} : r_{\mathrm{II}}^{(2)} \quad & [s=0] = \varrho_2 \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty n} a_{p-n}^{(3)} c_n^{(2)} + \varrho_2 \delta_2 bpiaa_p^{(1)} \qquad (34) \\
& [s=1] = \varrho_2 \delta_2 apiaa_p^{(1)} \\
R_{\mathrm{III}}^{(2)} : r_{\mathrm{III}}^{(2)} \quad & [s=0] = -\varrho_2 pa^2 a_p^{(1)} + \varrho_2 \sqrt{k'} \sum_{-\infty}^{+\infty n} a_{p-n}^{(2)} c_n^{(3)} \\
& \qquad + \varrho_2 \delta_3 bpiaa_p^{(1)} \\
& [s=1] = \varrho_2 \delta_3 apiaa_p^{(1)} \\
R_{\mathrm{I}}^{(3)} : r_{\mathrm{I}}^{(3)} \quad & [s=0] = -\varrho_3 k^2 piaa_p^{(3)}
\end{aligned}$$

$$R_{\mathrm{II}}^{(3)} : r_{\mathrm{II}}^{(3)} \quad [s=0] = \varrho_3 \sqrt{\frac{k'}{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty n} a_{p-n}^{(1)} c_p^{(2)} - \varrho_3 \delta_3 b k^2 p i a a_p^{(3)}$$

$$[s=1] = -\varrho_3 \delta_3 a k^2 p i a a_p^{(3)}$$

$$R_{\mathrm{III}}^{(3)} : r_{\mathrm{III}}^{(3)} \quad [s=0] = \varrho_3 k^2 p a^2 a_p^{(3)} + \varrho_3 \frac{1}{k^2 \sqrt{k}} \sum_{-\infty}^{+\infty n} (k'^2 a_{p-n}^{(2)} c_n^{(1)}$$

$$+ \sqrt{k'} a_{p-n}^{(1)} c_n^{(2)}) - \varrho_3 \delta_3 b k^2 p i a a_p^{(3)}$$

$$[s=1] = -\varrho_3 \delta_3 a k^2 p i a a_p^{(3)}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{I}}^{(1)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{I}}^{(1)} \quad [s=0] = -\frac{1}{\Delta R} \varrho_2 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} \left(\sqrt{\frac{k'}{k}} c_p^{(2)} - \delta_2 b a_p^{(2)} \right)$$

$$[s=1] = -\frac{1}{\Delta R} \varrho_2 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} \delta_2 a a_p^{(2)}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{II}}^{(1)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{II}}^{(1)} \quad [s=0] = -\frac{1}{\Delta R} \varrho_2 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} a_p^{(2)}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{III}}^{(1)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{III}}^{(1)} \qquad 0$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{I}}^{(2)} \quad [s=0] = -\frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 k'^2 \left(i a a_p^{(1)} + \delta_1 b a_p^{(1)} - \frac{k'^2}{k^2} \sqrt{\frac{1}{k}} c_p^{(1)} \right)$$

$$[s=1] = \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 \delta_1 a a_p^{(1)}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{II}}^{(2)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{II}}^{(2)} \quad [s=0] = -\frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 \frac{k'^2}{k^2} a_p^{(1)} \tag{35}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{III}}^{(2)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{III}}^{(2)} \quad [s=0] = \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_3 k'^2 a_p^{(1)}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{I}}^{(3)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{I}}^{(3)} \quad [s=0] = \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_2 k'^2 (i a a_p^{(3)} + \delta_3 b a_p^{(3)} + \sqrt{k'} c_p^{(3)})$$

$$[s=1] = \frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_2 k'^2 \delta_3 a a_p^{(3)}$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{II}}^{(3)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{II}}^{(3)} \qquad \equiv 0$$

$$\frac{\Delta R_{\mathrm{III}}^{(3)}}{\Delta R} : \delta r_{\mathrm{III}}^{(3)} \quad [s=0] = -\frac{1}{\Delta R} \varrho_1 \varrho_2 k'^2 a_p^{(3)}.$$

9. Darstellung des polaren Teiles von $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ durch Θ-Quotienten.

Wir haben bereits hervorgehoben, daß die singulären Stellen der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ in den Punkten $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ liegen. Es sei s einer dieser Punkte; dann besteht jede der genannten Funktionen in der Umgebung von s aus einem

regulären Teile:

$$\sum_0^\infty{}_n\, a_n(\tau - s)^n,$$

einem polaren Teile:

$$\sum_1^C{}_\varkappa\, b_\varkappa(\tau - s)^{-\varkappa},$$

einem logarithmisch-polaren Teile:

$$\sum_0^{C'}{}_\varkappa \sum_1^L{}_\lambda\, c_{\varkappa\lambda}(\tau - s)^{-\varkappa}[ln(\tau - s)]^\lambda,$$

dabei sind C, C' und L ganze positive Zahlen, die von lmn abhängen. Der reguläre und der polare Teil sind eindeutig, der logarithmisch-polare Teil ist mehrdeutig.

Der Untersuchung der Koeffizienten a, b, c (sie sind abhängig von T_1, T_2, T_3, $r_i(0)$, $\gamma_i(0)$) muß eine solche formale Darstellung der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ vorangehen, welche die Punkte s besonders hervorhebt Wir werden hier zeigen, daß der polare Teil, wenn wir einen Abschnitt des regulären Teiles hinzunehmen, durch endliche Reihen von Θ-Quotienten dargestellt werden kann, die in der ganzen komplexen Ebene des $\tau(t)$ gelten.

Wir schicken die Erörterung einiger Funktionen voraus, die bei der Darstellung der $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ auftreten und deren Darstellungsformeln uns dort nützlich sein werden.

Es sei

$$f_1(\tau) = \frac{d^{\varkappa+\lambda}}{d\tau^{\varkappa+\lambda}}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau + \mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right)\frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\left(\frac{\Theta_\beta(\tau + \nu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right)$$

$$\alpha = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\quad \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

μ und ν ganze positive oder negative Zahlen; $i = +\sqrt{-1}$; ω reell und zwar $0 < \omega < K'$.

$f_1(\tau)$ ist eine doppeltperiodische Funktion erster oder zweiter Art mit einem Pole von der Ordnung $2\varkappa + \lambda + 2$ an den Stellen $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$.

Die Multiplikatoren sind:

$$\mu_{2K} = \{\alpha\beta\}_{2K}$$
$$\mu_{2iK'} = \{\alpha\beta\}_{2iK'} \cdot e^{-\frac{i\pi}{K}(\mu+\nu)i\omega}$$

wobei

$$\{\alpha\beta\}_{2K} = \pm 1; \quad \{\alpha\beta\}_{2iK'} = \pm 1.$$

Je nachdem diese Multiplikatoren der Bedingung

$$\pi(\mu + \nu)\omega + Kln\{\alpha\beta\}_{2iK'} - iK'ln\{\alpha\beta\}_{2K} = 0^{1}) \quad \text{(I)}$$

genügen oder nicht, gehört $f_1(\tau)$ in verschiedene Darstellungsklassen. Wir haben 4 Fälle zu betrachten:

1. $\{\alpha\beta\}_{2K} = 1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = 1$, dann lautet Gleichung (I):
$$\pi(\mu + \nu)\omega = 0; \text{ d. h. } \mu + \nu = 0,$$
$f_1(\tau)$ ist eine doppeltperiodische Funktion erster Art.

2. $\{\alpha\beta\}_{2K} = +1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = -1$, also
$\pi(\mu + \nu)\omega + i\pi K = 0$; d. h. $\mu + \nu = 0$ und $K = 0$,
dieser Fall ist unmöglich.

3. $\{\alpha\beta\}_{2K} = -1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = -1$, also
$\pi(\mu + \nu)\omega - i\pi K + K'\pi = 0$; d. h. $K = 0$ usw.,
dieser Fall ist unmöglich.

4. $\{\alpha\beta\}_{2K} = -1$; $\{\alpha\beta\}_{2iK'} = +1$, also
$\pi(\mu + \nu)\omega + K'\pi = 0$; d. h. $(\mu + \nu)\omega + K' = 0$,
dieser Fall ist unmöglich, da $0 < \omega < K'$.

$f_1(\tau)$ ist also eine doppeltperiodische Funktion erster Art, wenn Gleichung (I) erfüllt ist, oder eine der zweiten Art und zwar der Hermiteschen Klasse, wenn Gleichung (I) nicht erfüllt ist.

---

[1]) Hauptwert des ln.

Wir betrachten eine zweite Funktion

$$f_2(\tau) = \frac{d^{\varkappa+\lambda}}{d\tau^{\varkappa+\lambda}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right)\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right).$$

Sie hat einen Pol von der Ordnung $2\varkappa+\lambda+2$ an den Stellen $\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$ und ist eine doppeltperiodische Funktion zweiter Art von der Klasse Hermites.

Eine dritte Funktion

$$f_3(\tau) = \frac{d^{\varkappa+\lambda}}{d\tau^{\varkappa+\lambda}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right)\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right)$$

hat dieselben Singularitäten wie die vorangehenden und ist doppeltperiodisch der ersten Art. Die Funktionen $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ lassen sich nach der Theorie der elliptischen Funktionen in anderen Formen darstellen, so daß ihr Verhalten an den singulären Stellen zu deutlicherem Ausdruck kommt.

Es sei in der Umgebung des Punktes $\tau = iK'$:

$$\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)} = \frac{\vartheta_\alpha(\mu)}{\tau - iK'} + \vartheta_\alpha(\mu)_0 + \vartheta_\alpha(\mu)_1(\tau - iK') + \vartheta_\alpha(\mu)_2(\tau - iK')^2 + \cdots$$

$$\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right) = (-1)^{\varkappa}\frac{\vartheta_\alpha(\mu)\cdot\varkappa!}{(\tau - iK')^{\varkappa+1}} + \varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)_\varkappa + \frac{(\varkappa+1)!}{1!}\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+1}(\tau - iK') + \cdots$$

$$\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)} = \frac{\vartheta}{\tau - iK'} + \vartheta_0 + \vartheta_1\cdot(\tau - iK') + \vartheta_2\cdot(\tau - iK')^2 + \cdots$$

$$\frac{d^{\varkappa}}{d\tau^{\varkappa}}\left(\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right) = (-1)^{\varkappa}\cdot\frac{\varkappa!\,\vartheta}{(\tau - iK')^{\varkappa+1}} + \varkappa!\,\vartheta_\varkappa + \frac{(\varkappa+1)!}{1!}\vartheta_{\varkappa+1}\cdot(\tau - iK') + \cdots$$

Dann gestaltet sich die Darstellung von $f_1(\tau)$ so:

$$f_1(\tau) = \sum_0^{2\varkappa+\lambda+1} c^{(\alpha,\beta;\,\mu,\nu)}_{\varkappa,\lambda,\xi}\frac{d^{\xi}}{d\tau^{\xi}}\left(\frac{\Theta_{(\alpha\beta)}(\tau+(\mu+\nu)i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right) \qquad (36)$$

wobei

$$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha);\ (1, 2) = 3;\ (2, 3) = 1;\ (3, 1) = 2$$
$$(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 0;\ (1, 0) = 1;\ (2, 0) = 2;\ (3, 0) = 3$$

diese Formel (36) gilt für den Fall, daß nicht gleichzeitig $\mu + \nu = 0$; $(\alpha\beta) = 0$.

Wenn diese beiden Bedingungen erfüllt sind, ist:

$$f_1(\tau) = d^{(\alpha;\,\mu,\nu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,0} + \sum_1^{2\varkappa+\lambda+1} d^{(\alpha;\,\mu,\nu)}_{\varkappa,\lambda\,|\,\xi} \frac{d^\xi}{d\tau^\xi}\left(\frac{\dot\Theta_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{36a}$$

(das Residum verschwindet).

Die Konstanten c und d sind durch folgende Gleichungen bestimmt, die sich durch Gegenüberstellung der Laurentschen Reihen ergeben.

(Die Indices $(\alpha, \beta;\ \mu, \nu)$ sowie $\varkappa$, λ werden wir hier nicht schreiben.)

$$c_{2\varkappa+\lambda+1}(2\varkappa+\lambda+1)!\,\vartheta_{(\alpha\beta)}(\mu+\nu) = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)$$
$$c_\xi[\xi = 2\varkappa+\lambda \text{ bis } \varkappa+\lambda+1] = 0$$
$$c_{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\,\vartheta_{(\alpha\beta)}(\mu+\nu) = (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_\varkappa$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$c_\varkappa \cdot \varkappa!\ \vartheta_{(\alpha\beta)}(\mu+\nu) = (-1)^\varkappa(\varkappa+\lambda)!\,\frac{(\varkappa+\lambda)}{\lambda!}\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_{\varkappa+\lambda} + \varkappa!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)_\varkappa\vartheta_\beta(\nu)$$

usw.

$$d_{2\varkappa+\lambda+1}\cdot(2\varkappa+\lambda+1)!\,\vartheta = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu) \qquad [\alpha = \beta;\ \mu = -\nu]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\,\vartheta = (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_\varkappa$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d_0 + \sum_1^{2\varkappa+\lambda+1} d_\xi\cdot\xi!\,\vartheta_\xi = (-1)^{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\,\frac{(2\varkappa+\lambda+1)!}{(\varkappa+\lambda+1)!}\,\vartheta_\alpha(\mu)\vartheta_\beta(\nu)_{\varkappa+\lambda+1}$$
$$(-1)^\varkappa\,\varkappa!\,\frac{(2\varkappa+1)!}{(\varkappa+1)!}\,\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+1}\vartheta_\beta(\nu)$$
$$+ (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+\lambda}\vartheta_\beta(\nu)_\varkappa.$$

Die Funktion $f_2(\tau)$ läßt sich so schreiben:

$$f_2(\tau) = \sum_{0}^{2\varkappa+\lambda+1\,\xi} a^{(\alpha,\omega)}_{\varkappa,\lambda\,\xi} \frac{d^\xi}{d\tau^\xi}\left(\frac{\Theta_\alpha(\tau+\mu i\omega)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{37}$$

wobei

$$a_{2\varkappa+\lambda+1}(2\varkappa+\lambda+1)!\,\vartheta_\alpha(\mu) = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta\cdot\vartheta_\alpha(\mu)$$

. . . . . .

$$a_\varkappa\cdot\varkappa!\,\vartheta_\alpha(\mu) = (-1)^\lambda(\varkappa+\lambda)!\frac{(\varkappa+\lambda)!}{\lambda!}\vartheta\cdot\vartheta_\alpha(\mu)_{\varkappa+\lambda} + \varkappa!\,\varkappa!\,\vartheta_\varkappa\cdot\vartheta_\alpha(\mu)$$

usw.

Endlich ist

$$f_3(\tau) = b_{\varkappa,\lambda\,|\,0} + \sum_{1}^{2\varkappa+\lambda+1\,\xi} b_{\varkappa,\lambda\,|\,\xi}\frac{d^\xi}{d\tau^\xi}\left(\frac{\dot\Theta_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)}\right) \tag{38}$$

wobei

$$b_{2\varkappa+\lambda+1}(2\varkappa+\lambda+1)! = -(\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta$$

. . . . . .

$$b_0 + \sum_{1}^{2\varkappa+\lambda+1\,\xi} b_\xi\cdot\xi!\,\vartheta_\xi = (-1)^{\varkappa+\lambda}(\varkappa+\lambda)!\frac{(2\varkappa+\lambda+1)!}{(\varkappa+\lambda+1)!}\vartheta\cdot\vartheta_{\varkappa+\lambda+1} - (-1)^\varkappa\cdot\varkappa!\frac{(2\varkappa+1)!}{(\varkappa+1)!}\vartheta_{\varkappa+1}\cdot\vartheta + (\varkappa+\lambda)!\,\varkappa!\,\vartheta_{\varkappa+\lambda}\vartheta_\varkappa.$$

Nach dieser Vorbereitung führen wir den formalen Aufbau des polaren Hauptteiles der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ aus.

Die Elementarfunktionen schreiben wir in einer allgemeineren Form, die später einen besseren Überblick über die wesentlichen Punkte gewährt. Nämlich:

$$\begin{aligned} R^{(i)}_{000} &= \sum_{1}^{3\,e} r^{(i)}_{000\,|\,e}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \\ R^{(i)}_{j} &= \sum_{1}^{3\,e} r^{(i)}_{j\,|\,e}\frac{d}{d\tau}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \end{aligned} \tag{39}$$

$\dfrac{\Delta R^{(i)}_j}{\Delta R}$ erhält dieselbe Form wie $R^{(i)}_{000}$ mit den Koeffizienten $\delta r^{(i)}_{j\,e}$.

Ferner:

$$G^{(i)}_{000} = \sum_{1}^{3\,e} g^{(i)}_{000\;e\;0}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} + \sum_{0}^{3\,e} g^{(i)}_{000\;e,1}\frac{\Theta_e(\tau+i\omega)}{\Theta_0(\tau)} + \sum_{0}^{3\,e} g^{(i)}_{000\;e,-1}\frac{\Theta_e(\tau-i\omega)}{\Theta_0(\tau)}. \tag{39a}$$

Dieselbe Form erhält $G_j^{(i)}$, mit den Koeffizienten $g_{j,e}^{(i)}$ usw. und $\frac{\Delta G_j^{(i)}}{\Delta G}$, mit den Koeffizienten $\delta g_{j,e}^{(i)}$ usw.

Die aus den Elementarfunktionen abgeleiteten Funktionen $\mathfrak{R}_{lmn}^{(i)}$, $\mathfrak{G}_{lmn}^{(i)}$, $P_{lmn}^{(j)}$, $\Gamma_{lmn}^{(j)}$, $R_{lmn}^{(i)}$, $G_{lmn}^{(i)}$ erhalten die gemeinsame Form:

$$\left\{\begin{aligned} & c_{lmn}^{(i)} + \sum_1^C{}^{\varkappa} c_{lmn\,,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\dot{\Theta}_0(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + \sum_1^3{}^{e} \sum_0^C{}^{\varkappa} c_{lmn\;\,e,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\Theta_e(\tau)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + \sum_0^3{}^{e} \sum_1^N{}^{\nu} \sum_0^C{}^{\varkappa} c_{lmn\;\,e,\nu,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\Theta_e(\tau + \nu i\omega)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + \sum_0^3{}^{e} \sum_1^N{}^{\nu} \sum_0^C{}^{\varkappa} c_{lmn\;\,e,-\nu,\varkappa}^{(i)} \frac{d^\varkappa}{d\tau^\varkappa}\frac{\Theta_e(\tau - \nu i\omega)}{\Theta_0(\tau)} \\ & \quad + L\ [\text{logarithmisch-polarer Teil und regulärer Teil}]. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Die Koeffizienten c, die wir für die einzelnen Funktionen mit dem entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen werden, sind Funktionen von $t(\tau)$; sie sind an den Stellen

$$\tau = iK' + 2mK + 2m'iK'$$

regulär, haben jedoch Pole an den Stellen

$$\tau = 2mK + 2m'iK',\ \tau = K + 2mK + 2m'iK'$$

und

$$\tau = K + iK' + 2mK + 2m'iK'.$$

Diese Singularitäten der c müssen sich mit entgegengesetzten in L aufheben.

Die Zahlen C und N sind abhängig von $l + m + n$.

Die Elementarfunktionen haben bereits die — sehr vereinfachte — Form (40).

Wir setzen $l + m + n = P$; $\alpha + \beta + \gamma = A$.

Wir leiten nun die Funktionen $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ in der Form (49) ab, unter der Voraussetzung, daß alle $R_{l-\alpha,m-\beta,n-\gamma}^{(i)}$, $G_{l-\alpha,m-\beta,n-\gamma}^{(i)}$, wobei nicht gleichzeitig $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, bekannt sind und zwar in der Form (40).

Dabei ist

$$\begin{aligned} &\text{für } R^{(i)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma}: C = 5(P-A)-3;\ N = 3(P-A)-2 \\ &\text{für } G^{(i)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma}: C = 5(P-A)-1;\ N = 3(P-A)+1. \end{aligned} \tag{41}$$

Die Funktionen $\mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}$ und $\mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}$ enthalten dann nach Gleichung (5) eine Summe von Produkten von Funktionen der Form (40); diese werden mit den Formeln für $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$ [Gleichung (36), (37), (38)] umgewandelt, so daß sie beide wiederum die Form (40) erhalten. Es wird dabei

$$\begin{aligned} &\text{für } \mathfrak{R}^{(i)}_{lmn}: C = 5P-5;\ N = 3P-2 \\ &\text{für } \mathfrak{G}^{(i)}_{lmn}: C = 5P-2;\ N = 3P-1. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Koeffizienten werden durch Formeln dieser Art berechnet (hier treten die Größen $c^{(\alpha\beta\gamma\,\mu\nu)}_{\varkappa,\lambda\,\xi}$ usw. auf):

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}^{(i)}_{lmn} &= \sum{}^{\alpha\beta\gamma}\, r^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma}\, r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma} \\ &+ \sum{}^{\varkappa+\lambda,\varkappa} \sum{}^{\alpha\beta\gamma}\, r^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma|\varkappa+\lambda}\, r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\,\varkappa} \cdot b_{\varkappa,\lambda|0} \\ &+ \sum{}^{e} \sum{}^{\nu} \sum{}^{\varkappa+\lambda,\varkappa} \sum{}^{\alpha\beta\gamma}\, r^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,e,\,\nu,\,\varkappa+\lambda} \cdot r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\,e,\,-\nu,\,\varkappa} d_{\varkappa,\lambda\,0} \\ &+ \frac{1}{T_i}\, d^{(i)}_{lmn} \quad \text{[vgl. Gleichung (5)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^{(i)}_{lmn\,\varkappa+5P-5} &= \sum{}^{\alpha\beta\gamma}\, r^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,\varkappa+\lambda} \cdot r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\,\varkappa} \cdot b_{\varkappa,\lambda\,\varkappa+\lambda+1} \\ &+ \sum_{1}^{3} {}^{e} \sum{}^{\alpha\beta\gamma}\, r^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,e,\,\varkappa+\lambda}\, r^{(i+2)}_{\alpha,\beta,\gamma\,e,\,\varkappa} \cdot d^{(e,0)}_{\varkappa,\varkappa,\varkappa+\lambda+1} \\ &+ \sum_{0}^{3} {}^{e} \sum{}^{\nu} \sum{}^{\alpha\beta\gamma}\, r^{(i+1)}_{l-\alpha,\,m-\beta,\,n-\gamma\,e,\,\nu,\,\varkappa+\lambda}\, r^{(i+2)}_{\alpha\beta\gamma\,e,\,-\nu,\,\varkappa} d^{(e,\nu,-\nu)}_{\varkappa,\lambda\,\varkappa+\lambda+1} \end{aligned} \tag{43}$$

wobei

$$\varkappa + \lambda = 5(P-A) - 3;\ \varkappa = 5A - 3 \text{ usw.}$$

Nach Vorschrift der Gleichung (7) werden mittels der Gleichung (39) die Integranden von $P^{(j)}_{lmn}$ und $\Gamma^{(j)}_{lmn}$ in derselben Form (40) abgeleitet und daraus durch partielle Integration, eine endliche Anzahl mal ausgeführt, die Funktionen $P^{(j)}_{lmn}$ und $\Gamma^{(j)}_{lmn}$ selbst gewonnen. Dabei entstehen Glieder des polaren Teiles nur durch Integration von Gliedern der Form $c_\varkappa \dfrac{d^\varkappa f}{d\tau^\varkappa}$, wenn $\varkappa > 1$.

Die letztgenannten Funktionen erhalten also wiederum die Form (40) und zwar ist

$$\begin{aligned} &\text{für } P^{(i)}_{lmn} : C = 5P - 5;\ N = 3P - 2 \\ &\text{für } \Gamma^{(i)}_{lmn} : C = 5P - 2;\ N = 3P. \end{aligned} \tag{44}$$

Schließlich geben die Gleichungen (6) die gesuchten Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ wiederum in der Form (40) und es ist

$$\begin{aligned} &\text{für } R^{(i)}_{lmn} : C = 5P - 3;\ N = 3P - 2 \\ &\text{für } G^{(i)}_{lmn} : C = 5P - 1;\ N = 5P + 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Gleichungen (45) sind dieselben wie Gleichung (41), wenn $P - A$ an die Stelle von P tritt.

Für $P = 1$ lassen sich die Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$ leicht in der Form (40) darstellen; nach unserer Auseinandersetzung haben sie also für alle $P = 1, 2, 3 \ldots$ diese Form (40).

Wir haben diese Betrachtung kurz gefaßt; die Ausführung ins einzelne verlangt die Mitteilung längerer Formeln. Das Wesentliche ist gezeigt: die Form der Funktionen $R^{(i)}_{lmn}$ und $G^{(i)}_{lmn}$, insbesondere ihrer polaren Hauptteile und die Möglichkeit und Methode, diese aufzubauen.

Eine eingehende Untersuchung über das Verhalten der Funktionen an den singulären Stellen müssen wir für eine andere Arbeit vorbehalten.

Inhalt.

		Seite
	Vorwort	287
1.	Die Differentialgleichungen des Kreisels und ihre Lösung	289
2.	Die Elementarfunktionen	294
3.	Allgemeine Eigenschaften der Reihen (3)	297
4.	Satz über das Verschwinden der Funktionen $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ im Punkte $t = 0$	300
5.	Das Konvergenzgebiet der Funktionselemente (3) für die Variabelen t, σ_1, σ_2, σ_3	303
6.	Fortsetzung der Funktionselemente für r_i, γ_i, α_i, β_i	307
7.	Darstellung der $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ in einem Streifen der t-Ebene, welcher die ganze reelle Achse enthält	308
8.	Die Entwickelungen der Elementarfunktionen	311
9.	Darstellung des polaren Teiles von $R_{lmn}^{(i)}$ und $G_{lmn}^{(i)}$ durch Θ-Quotienten	316

Interferenzaufnahme eines Graphitkristalles und Ermittlung des Achsenverhältnisses von Graphit.

Von **P. P. Ewald.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 4. Juli 1914.

Untersucht wurde mit der Laue-Friedrich-Knipping-schen Anordnung ein kleiner Graphitkristall (2×2 mm, etwa 0,1 mm dick), der mir durch freundliche Vermittelung von Herrn Prof. H. du Bois zur Verfügung stand. Es war ein von Herrn Washburn wegen seiner Homogeneität zu elektrischen Widerstandsmessungen benutztes Stück amerikanischen Ursprungs.

Das Interferenzbild zeigt hexagonale Symmetrie und weist zweimal sechs besonders intensive Flecke auf, durch welche offenbar die Haupt- resp. Zwischenachsen zu legen sind. Im ganzen sind 15 verschiedene — d. h. nicht durch Symmetrie gleichwertige — Flecken zu sehen, die meist sehr schwach sind. (Dies ist bei der geringen Dicke des Stückes trotz der Exposition von 25 Stunden bei 4 Milliampère nicht verwunderlich.) Das Bild zeigt eine gewisse Ähnlichkeit mit dem des Diamanten, darin daß der Winkelraum der Interferenzstrahlen auffallend groß ist. Ob Interferenzen auch vor dem Kristall (entgegen dem Primärstrahl) auftreten, wurde nicht mit Sicherheit festgestellt. Nach Einordnung der Flecke in das Interferenzschema der hexagonalen Kristalle erhalten die intensiven Flecke auf der Haupt- und Zwischenachse die Indices $2\bar{1}11$ resp. 3032.

Bei der Bezifferung der Flecke muß beachtet werden, daß das Achsenverhältnis $\frac{c}{a}$ bei Graphit unbekannt ist, und daß sein Wert von Einfluß auf die Fleckenindices ist. Der Fleck z. B., der mit einem gewissen Wert von $\frac{c}{a}$ die Indices $2\bar{1}11$ hat, läßt sich als $21\bar{1}2$ erklären, wenn $\frac{c}{a}$ doppelt so groß genommen wird. Durch die Wahl der Fleckenindices nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit wird also das Achsenverhältnis mitbestimmt. So wird hier für $\frac{c}{a}$ der Wert 1,63 gefunden. Es darf vielleicht bemerkt werden, daß hier zum ersten Male mittels Röntgenstrahlen die Bestimmung eines Achsenverhältnisses vorgenommen worden ist, das sich auf goniometrischem Wege wegen mangelnder Ausbildung von Kristallflächen nicht ermitteln läßt.

Die Durchstrahlung mit Röntgenstrahlen ist eine physikalische Untersuchungsmethode, die — im Gegensatz etwa zur Untersuchung der optischen Eigenschaften — einen vollkommenen Ersatz der goniometrischen Ausmessung bietet. Umfang sowohl wie Bestimmtheit des Resultats sind bei beiden Methoden gleich, weil das Inteferenzbild nichts anderes ist als eine Projektion der wichtigsten Kristallflächen.

Das Achsenverhältnis 1.63 ist das häufigste im hexagonalen System. Es erlangt hier durch seine Beziehung zu einer theoretisch naheliegenden Struktur für Graphit erhöhte Bedeutung. Es wurde nämlich am Anfang der Untersuchung vermutet, daß Graphit ebenso wie Diamant mit tetraederförmigen Kohleatomen aufgebaut sei. In der Tat lassen sich nur zwei Gitter aufbauen, in denen jedes Atom von 4 gleich entfernten Nachbarn in regelmäßiger Weise umgeben ist. Das eine Gitter ist das reguläre Gitter des Diamanten, das zweite ein hexagonal holoedrisches Gitter (bestehend aus 4 hexagonalen Bravaisschen Gittern), das dem Graphit wohl zukommen könnte. Hierfür

schien auch der Umstand zu sprechen, daß das Achsenverhältnis des theoretischen Gitters

$$\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1{,}633$$

innerhalb der Grenzen der Meßgenauigkeit mit dem vom Interferenzbild ermittelten Verhältnis übereinstimmt.

Leider ergibt jedoch die genaue Diskussion des Interferenzbildes die Unmöglichkeit, dem Graphit die genannte Struktur unterzulegen. Es müßten sonst nämlich eine Reihe von Flecken auftreten, deren Wellenlänge in den kleinen, von den beiden intensiven Flecken bestimmten Bereich fällt, und deren Intensität durch die Struktur ebenso betont wird, wie bei den starken Flecken; von diesen Flecken fehlt jedoch jede Spur. Es gelang nicht, den wahren Aufbau zu ermitteln und es kann daher aus diesem Teil der Untersuchung nur das Resultat abgeleitet werden, daß in Graphit **nicht** wie in Diamant jedes Atom in den 4 Valenzrichtungen von gleichwertigen Nachbarn umgeben ist.

Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen.

Von **Ernst Wagner**

nach Versuchen gemeinsam mit Joh. Brentano.

Mit 2 Tafeln.

Vorgelegt von Röntgen in der Sitzung am 7. November 1914.

Die photographischen Spektralaufnahmen, wie sie in besonders vollendeter Weise M. de Broglie[1]) erhielt, zeigen, neben den Fluoreszenzlinien des Antikathodenmetalles, im Bereich der kurzen Wellen zwei merkwürdige, kontinuierliche Banden mit scharf nach den langen Wellen hin begrenzten Bandkanten. Ihr im allgemeinen kontinuierliches Auftreten ist zweifellos dem kontinuierlichen (Brems-) Spektrum der Röntgenstrahlen zuzuschreiben[2]), die besondere Struktur der Banden jedoch deutet auf eine Eigenschaft der empfindlichen Schicht hin, zumal die Banden ihren spektralen Platz behalten trotz Änderung des Antikathodenmetalles. Die Herren Bragg und Siegbahn[3])

[1]) Journ. de phys. 1914, févr. et avril.

[2]) Herr H. Seemann veröffentlicht soeben Versuche (Phys. Ztschr. XV. p. 749, 1914), auf Grund deren er die kontinuierlichen Banden im Platinspektrum im wesentlichen in ein Linienspektrum aufgelöst zu haben meint. Es ist mir indessen kaum zweifelhaft, daß die bekannte fehlerhafte Struktur der Steinsalzkristalle in Verbindung mit der von Seemann verwandten Methode des feststehenden Kristalles diese „Spektrallinien" hervorgebracht hat, während andererseits Strukturfehler des Kristalles gerade bei der von uns angewandten Methode des drehenden Kristalles fast unschädlich gemacht werden. In der Tat lösten wir wirkliche Dupletts von solcher Ordnung der Feinheit noch auf, wie die von Seemann fälschlich erhaltenen.

[3]) C. R. 158, p. 1494, 1914.

haben in diesem Sinne vermutet, daß die zwei Banden dem Silber und Brom der empfindlichen Schicht zuzuschreiben seien.

Im folgenden sind Versuche mitgeteilt, die diese Vermutung bestätigen, sowie sich daran anschließende über Absorptionsspektren von Metallen; endlich ist eine einfache Beziehung zwischen dem Absorptions- und Emissionsspektrum gewonnen worden.

§ 1. Zur Erzeugung des Spektrums stand uns ein in der Institutswerkstätte nach der bewährten Methode von J. Herweg[1]) und de Broglie[2]) konstruierter exakter Apparat zur Verfügung, der eine im Winkelmaß gleichmäßig fortschreitende Hin- und Herschwenkung des Kristalles mittels zweifacher Schneckenübersetzung erlaubte.

Der Antrieb erfolgte mit Elektromotor; die Umkehrung des Drehsinnes bewirkte ein elektrischer Umschalter und geeignet angebrachte Kontakte. Der Schwenkungsbereich des Kristalles, d. i. der gewünschte spektrale Bezirk, konnte durch Verstellung der erwähnten Kontakte den Versuchszwecken angepaßt werden. Die Dauer einer Hin- resp. Herschwenkung über ca. 10° betrug nur ca. 1 min.

Der verstellbare Bleispalt (meist 0,4 mm geöffnet) stand 12 cm von der Drehachse entfernt, in der die „reflektierende" Fläche des ausgewählten Steinsalzspaltstückes (2 × 2 cm) lag. Ein zweiter weiterer Spalt stand 7 cm vom ersten entfernt in der Richtung nach der Drehachse. Die Kassette konnte variabel aufgestellt werden, so daß die empfindliche Schicht im mittleren Teil des exponierten Spektrums ebenfalls die Entfernung von ca. 12 cm von der Drehachse hatte und annähernd senkrecht zu den Strahlen verlief, die den mittleren Spektralteil erzeugen.

Als Röhre wurde eine Intensivröhre von E. Gundelach mit Wolframantikathode benutzt; sie wurde betrieben mit dem sogenannten Idealapparat (Hochspannungsgleichrichter) von Reiniger, Gebbert und Schall, in den meisten Fällen mit 4—5 Milliampère.

[1]) Bericht d. Deutschen Physik. Ges. 1914, p. 73.
[2]) C. R. 1913. Journ. de phys. IV, 1914, p. 102.

Die Einstellung des Brennfleckes auf der Antikathode in die Richtung: Drehachse—Spalt kann leicht mit Hilfe eines Leuchtschirmes geschehen.

§ 2. Zur Orientierung ist auf Fig. 1 ein so erhaltenes Spektrum nach ca. 7 Stunden Expositionsdauer wiedergegeben bei weicher Röhre.

O ist der überstrahlte Treffpunkt der primären Strahlen; von hier aus erstreckt sich das Spektrum im Sinne von Null an wachsender Wellenlängen über die zwei kontinuierlichen Banden mit den Kanten A und B zu den langen Wellen des Wolfram (mit Verunreinigungen?) -Linienspektrums, das nur zum Teil auf die Platte kam.

Von A bis B sind es ca. 0,36 $\mathring{A}$. Die obere Hälfte des Spektrums war durch ein 1,4 mm dickes Aluminiumblech abgedeckt, das einen Zentimeter vor der Platte stand. Man bemerkt sehr deutlich die kräftige Absorptionswirkung des Aluminiums im Gebiet der längeren Wellen, so daß die Linien und die Bandkante B völlig verschwunden sind, während die harte kontinuierliche Strahlung der A-Bande noch durchdringt. Dieser Absorptionsversuch bringt ferner noch den für die Ausmessung der Wellenlängen wichtigen Nachweis, daß die Strahlung der schwachen Bandkante A_1 deutlich erheblich härter ist als die der kräftigen Kante B daneben; denn diese ist völlig, jene relativ wenig absorbiert. Zweifellos ist A_1 die zweite Ordnung von A, da auch die hierfür nötige Beziehung: OA angenähert $= \frac{1}{2} OA_1$ gut erfüllt ist (vgl. unten die Wellenlängenberechnung). In A (resp. A_1) haben wir die hypothetische Silberwirkung, in B die Bromwirkung zu sehen.

§ 3. Wenn diese Vermutung richtig ist, so war zu erwarten, daß ein passendes Metall, statt in der empfindlichen Schicht anwesend zu sein, eine ähnliche Bande erzeugen werde, wenn es sehr dicht etwa als Folie auf der empfindlichen Schicht liegt. Damit aber keine Absorptionsnebenwirkung der Folie störte, wurde die photographische Platte umgekehrt, so daß die Schicht durch das Glas hindurch exponiert wurde.

Dicht auf die Schicht waren zwei Lagen im ganzen 0,03 mm dicke, reine Zinnfolie glatt aufgedrückt. Fig. 2 zeigt die Aufnahme: man erkennt in der Tat neben der Silberbandkante *A* das Auftreten einer neuen „Zinnbande" *C*, deren Kante ein wenig nach den kurzen Wellen verschoben ist und die in ihrem ganzen Verlauf (Bandkante im langwelligen Bereich der Bande) ein völliges Analogon zu den zwei der empfindlichen Schicht eigentümlichen Banden zu bilden scheint.

Das Spektrum I auf Fig. 2 zeigt im Vergleich mit Spektrum I auf Fig. 1 eine starke Absorption der längeren Wellen, was offenbar eine Folge der Absorption in der 1,5 mm dicken Glasplatte ist. Übrigens war auch im Versuch auf Fig. 2 die Hälfte II des Spektrums mit 1,4 mm dickem Aluminium abgedeckt gewesen.

§ 4. Rührt die Zinnbande her von ausgelösten sekundären Röntgenstrahlen oder von Elektronenstrahlen? Zur Entscheidung dieser Frage wurde in der vorigen Versuchsanordnung zwischen die empfindliche Schicht und die Zinnfolie ein dünnes Aluminiumblech gebracht, das so dick gewählt wurde (0,1 mm), daß Elektronenstrahlen es nicht, Röntgenstrahlen es leicht durchdringen konnten. Zum schärferen und unmittelbaren Vergleich der Wirksamkeit des Aluminiums war aus dem Aluminiumblech ein schmales Fenster längs einer Hälfte des Spektrums (bei *F* Fig. 3) herausgeschnitten.

Da die so gewonnene Aufnahme (Fig. 3) keine Schwächung der Zinnbande *C* hinter dem Aluminium bemerken läßt, so muß dieselbe verursacht sein durch die starke sekundäre oder fluoreszierende Röntgenstrahlung, die im Zinn durch die spektral zerlegten Primärstrahlen ausgelöst wird. Aus den Versuchen Ch. Barklas[1]), ganz direkt aber aus den jüngsten Experimenten M. de Broglies[2]) mittels Kristallspektralanalyse wissen wir, daß die durch Röntgenstrahlen (gleichwie durch Kathodenstrahlen) in den Metallen erregte Fluoreszenzstrahlung nur eine einzige

[1]) Ch. Barkla, Phil. Mag. und Starks Jahrbuch 5.

[2]) M. de Broglie, C. R. 25. Mai und 15. Juni 1914, p. 1785.

(resp. einige wenige) homogene Wellenlängen besitzt. Daß die „Zinnbande" sich gleichwohl über einen spektralen Bereich erstreckt, ist natürlich darin begründet, daß dieser Bereich lediglich den spektralen Anregungsbereich zur monochromatischen Fluoreszenzstrahlung darstellt. Wie man erkennt — und wie nach Barkla[1]) bekannt —, setzt die Erregung der Fluoreszenz plötzlich und mit maximaler Stärke bei der längsten Wellenlänge jenes Bereiches ein (sie sei benannt die „charakteristische Erregungswellenlänge"), und es scheint sich die Erregungsfähigkeit mit kürzeren Wellen immer mehr zu verlieren.

§ 5. Bemerkenswert ist die große Intensität der erregten Zinnstrahlung im Vergleich zu der sie erregenden Primärstrahlung (vgl. Fig. 2), soweit sich ein Intensitätsvergleich aus den Schwärzungen beurteilen läßt, was wegen der Verschiedenheit der Wellenlängen nicht ohne weiteres erlaubt ist. Bedenkt man, daß nur die Hälfte der Zinnstrahlung die empfindliche Schicht trifft, so scheint die Zinnstrahlung an der Bandkante von der Größenordnung der erregenden selbst zu sein.

Aus Energiegründen muß daher die Primärstrahlung eine sehr erhebliche Absorption im Zinn erleiden, und zwar muß dieselbe den gleichen spektralen Intensitätsverlauf zeigen wie die Emission der Fluoreszenzbande. Dieser aus Barklas und Sadlers Versuchen[2]) wohlbekannte Zusammenhang der beiden Erscheinungen tritt sehr anschaulich zutage, wenn man die Fluoreszenzbande *C* des Zinns auf Fig. 2 vergleicht mit dem Resultat eines auf Fig. 4 vorliegenden Absorptionsversuches an Zinnfolie, die in zwei verschiedenen Dicken (0,015 u. 0,04 mm) längs des Spektrums und in einigen Zentimetern Abstand vor der empfindlichen Schicht stand. Besonders markant ist die identische spektrale Lage der Bandkanten der Fluoreszenzemission *C* auf Fig. 2 und der Absorption *C* auf Fig. 4, aber auch der gesamte Intensitätsverlauf der Banden ist völlig gleich. Man kann aus diesem Sachverhalt experimentellen Nutzen

[1]) Ch. Barkla und Sadler, Phil. Mag. 17, p. 739.
[2]) Barkla, Starks Jahrbuch 1910, p. 12.

ziehen; wenn es sich etwa um Aufsuchung der Bandkante der Absorption handelt, kann die Methode der Fluoreszensemission z. B. da zum Ziel führen, wo sich dünne Absorptionsschichten nicht herstellen lassen.

§ 6. Auf Grund der Erfahrungen am Zinn konnte durch einen einfachen Absorptionsversuch nachgewiesen werden, daß die hypothetische Silberbande *A* wirklich dem Silber in der empfindlichen Schicht zuzuschreiben ist. Es wurde eine 0,013 mm dicke, schmale Folie reinen Silbers längs der Hälfte des Spektrums einen Zentimeter vor der photographischen Platte zur Absorption angebracht. Fig. 5 zeigt das Ergebnis; *a* ist das Absorptionsspektrum, *b* ist das normale Vergleichsspektrum. Man erkennt, daß auf dem Absorptionsspektrum die charakteristische Silberbandkante fast ganz verschwunden ist, indem die selektive Absorption im Silber außen genau am gleichen spektralen Ort gerade die umgekehrte photographische Wirkung ausgeübt hat wie die selektiv-verstärkende des Silbers innerhalb der Schicht. Man vergleiche die nicht selektiv absorbierende Wirkung des Aluminiums auf Fig. 1.

Ein Versuch von derselben Beweiskraft wie der eben am Silber mitgeteilte, ist uns am Brom vorerst noch nicht völlig gelungen. Die aus *BrK* in feinster Zerteilung hergestellte Absorptionsschicht war leider zu schwach absorbierend ausgefallen, so daß nur mit Wahrscheinlichkeit aus dem Versuch die Bande *B* (Fig. 1) als eine Bromwirkung zu folgern ist. Definitive Versuche sind beabsichtigt, wenn auch nach den unten mitgeteilten einfachen und strengen spektralen Gesetzmäßigkeiten nicht an einer wirklichen Bromwirkung gezweifelt werden kann.

§ 7. Die Einwirkung der Röntgenstrahlen auf die photographische Schicht beruht hiernach im Gebiete der meistens verwandten kürzeren Wellen (so auf fast allen Laue-Photogrammen etc.) auf der höchst eigenartigen Fluoreszenz der *Ag*- resp. *Br*-Atome, die eine sehr erhöhte Empfindlichkeit (Sensibilisierung) bedingen. Die Schwärzung im kontinuierlichen Spektrum stellt infolgedessen auch nicht annähernd den

wahren Intensitätsverlauf des Spektrums der Röntgenstrahlen dar. Ob die von Bragg[1]) und Moseley und Darwin[2]) verwandte Ionisationsmethode, besonders in der angewandten Form der Verwendung schwerer Gase, nicht dieselbe selektive Fluoreszenzsensibilisation enthält, möchte ich für nicht unwahrscheinlich halten.

Es mag noch darauf hingewiesen werden, daß eine am gewünschten spektralen Ort zu erreichende künstliche Sensibilisierung nach unseren Versuchen eine leicht zu lösende Aufgabe sein muß.

§ 8. Das Stokessche Gesetz der Fluoreszenz sagt aus, daß der die Fluoreszenzstrahlung anregende resp. hierbei absorbierte primäre Spektralbereich stets kurzwelliger sei als die erregte Fluoreszenzstrahlung selbst. Nach Barkla[3]) hat sich dies Gesetz qualitativ überall auf dem Gebiet der X-Strahlung bewährt, indem der absorbierte Spektralbereich mit Einschluß der Bandkante stets ein wenig härter gefunden wurde als die erregte Fluoreszenzstrahlung. Eine quantitative Fassung des Vorganges gelingt, wenn als Absorptionswellenlänge λ_a die allein scharf zu messende und wohl auch für den physikalischen Vorgang charakteristische Wellenlänge der Bandkante eingeführt wird. Diese kann aus obigen Versuchen für Zinn, Silber und Brom gefunden werden. Die Fluoreszenzlinien λ_e sind[4]) sehr vollständig gemessen und durch eine sich über alle Elemente erstreckende, sehr einfache, innere Gesetzmäßigkeit verbunden. Es empfiehlt sich, die stärkste der Fluoreszenzlinien: die α-Linie der K-Serie, in Vergleich mit λ_a desselben Elementes zu bringen.

Der Weg, die Wellenlängen λ_a genau aus dem Plattenort und der Geometrie des Strahlenganges zu finden, war ermög-

[1]) Bragg, Proc. Roy. Soc. 88, p. 428.

[2]) Vgl. insbesonders den Verlauf des kontinuierlichen Spektrums, p. 219, Phil. Mag. 1913, Band 26.

[3]) Ch. Barkla, Phil. Mag. 16, p. 550.

[4]) Von Moseley, Phil. Mag., April 1914, Tafel p. 709.

licht im wesentlichen durch das glückliche Auftreten der Silberbandkante noch in zweiter Ordnung. Fig. 6 zeigt den Strahlengang etc. Die Primärstrahlen fallen auf den Kristall in O, sie treffen in A die Platte, die in Richtung AD steht, wo $\alpha = 84^0\,10'$ am Apparat gemessen war. AO war $= 120$ mm. In C liege die Silberbandkante erster, in D zweiter Ordnung. CD ist genau meßbar $= 21{,}6$ mm. Es muß nun aus diesen Daten der Winkel $AOC = 2\varphi_1$ gefunden werden: der doppelte streifende Einfallswinkel der Röntgenstrahlen auf die Kristallfläche, woraus dann folgt: $\lambda_a = 2d \cdot \sin\varphi_1$, wo d der Abstand benachbarter, reflektierender Elementarschichten im Kristall (NaCl) ist, nach Moseley $= 2{,}81.10^{-8}$ cm. Die Auffindung des Wertes von φ_1 unter Benutzung der zwei Relationen:

$$\lambda_a = 2\,d \sin\varphi_1$$

und

$$2\,\lambda_a = 2\,d \sin\varphi_2$$

gelingt am schnellsten durch probeweises Einsetzen von annähernd vorher bekannten Werten von φ_1 in die Gleichung:

$$\frac{CD}{OA} = \frac{\sin 2\varphi_2}{\sin(\alpha + 2\varphi_2)} - \frac{\sin 2\varphi_1}{\sin(\alpha + 2\varphi_1)}$$

und wurde ermittelt als $5^0\,0' = \varphi_1$. Hieraus folgt für den (nicht auf der Platte meßbaren) Punkt A: $AC = 20{,}8$ mm.

Für das Silber folgt daraus:

$$\lambda_a = 0{,}490.10^{-8}\text{ cm}$$

und nach Moseley:

$$\lambda_e = 0{,}560.10^{-8}\text{ cm}.$$

Indem nun der Abstand der Zinnbandkante von der benachbarten Silberbandkante $= 2{,}7$ mm gemessen wurde, folgt mit Hilfe des bekannten $AC = 20{,}8$ mm leicht:

$$\lambda_a = 0{,}425.10^{-8}\text{ cm}$$

und nach Moseley (extrapoliert):

$$\lambda_e = 0{,}488.10^{-8}\text{ cm}.$$

Für Brom wurde der Abstand der Bandkante von Br zum Ag gefunden = 19,2 mm.

Hieraus ergibt sich für Brom:

$$\lambda_a = 0{,}926.10^{-8} \text{ cm}.$$

Nach Moseley intrapoliert:

$$\lambda^e = 1{,}06.10^{-8} \text{ cm}.$$

Bilden wir das Verhältnis $\frac{\lambda_e}{\lambda_a}$ für die drei Stoffe, so finden wir für:

Ag	1,143
Sn	1,148
Br	1,145.

Wir haben hier eine überraschend exakte, quantitative Stokessche Beziehung gewonnen, die wir so formulieren können: Beim Vorgang der Fluoreszenz ist der Stokessche Sprung in den Wellenlängen der Absorption und Emission für alle Stoffe von derselben relativen Größe.

Der numerische Wert für $\frac{\lambda_e}{\lambda_a}$ kann auf einige Prozent falsch sein, da der Abstand OA nicht sehr genau bestimmt war, die Übereinstimmung dagegen der 3 obigen Werte wird hiervon nicht berührt. Trägt man die Werte der λ_a in die Tafel p. 709 von Moseley ein, so erhält man eine annähernd gerade Linie, die die genaue Fortsetzung der nur zum Teil beobachteten β-Linie der K-Serie darzustellen scheint. Es erhebt sich hier die Frage, ob diese β-Emission vielleicht nur unter Anregung durch Kathodenstrahlen wie bei Moseley statthat, dagegen fehlt — wegen der Stokesschen Regel — unter Anregung mit X-Strahlen?

Eine zweite Frage erhebt sich: ob nicht auch der L-Serienemission eine eigene, in spektraler Nachbarschaft liegende Absorptionsstelle entspricht[1]). An Gold haben wir deshalb

[1]) Dies ist nach C. Chapman, Proc. Roy. Soc. 88, p. 24 und Barkla und Collier, Phil. Mag. 23, p. 990 tatsächlich der Fall.

einen Absorptionsversuch angestellt, der jedoch nicht mit Sicherheit diese Frage entscheiden läßt. In Hinsicht auf diese Frage mag folgende Beziehung — mit allem Vorbehalt — erwähnt sein: Stellt man sich auf den für die formale Erklärung der Stokesschen Fluoreszenzregel[1]) erfolgreichen Standpunkt der Quantentheorie, wonach das Energiequantum der Schwingungen proportional ihrer Frequenz wächst, so ist das Absorptionsquantum $e_a = \frac{h}{\lambda_a}$[2]) also größer als das Emissionsquantum der K-Serie $e_e = \frac{h}{\lambda_e}$, wie wir fanden. Fragt man nun, welche Wellenlänge λ_x kann von dem Rest der durch die Fluoreszenz der K-Linie nicht ganz verbrauchten Absorptionsenergie $(e_a - e_e)$ quantengemäß noch emittiert werden, so finden wir:

$$\frac{1}{\lambda_a} = \frac{1}{\lambda_x} + \frac{1}{\lambda_e}.$$

λ_x findet sich gerade gleich der Wellenlänge der α-Linie der L-Serie nach Moseley (auf 1%).

Hiernach würde die Gesamtenergie der Ausstrahlung in den zwei Fluoreszenzserien gerade restlos gespeist sein von der Absorptionsenergie.

Bei der experimentellen Durchführung obiger Versuche habe ich mich der wertvollen und geschickten Hilfe von Herrn Dr. Joh. Brentano zu erfreuen gehabt, wofür ich ihm hier meinen aufrichtigen Dank abstatten möchte.

Herrn Geheimrat Röntgen möchte ich meinen warmen Dank aussprechen für sein Interesse an diesen Untersuchungen, sowie für die Unterstützung mit reichen Mitteln des Institutes.

München, Physikal. Institut der Universität.

Ende Juli 1914.

[1]) Vgl. A. Einstein, Ann. d. Phys. 1905, 17.

[2]) h ist die Plancksche Konstante.

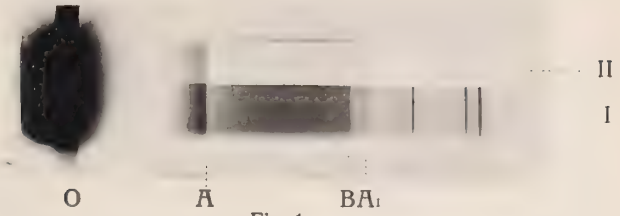


Fig. 1.

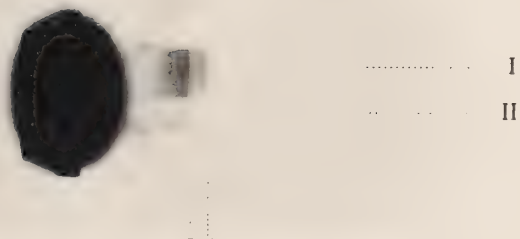


Fig. 2.

Fig. 3.

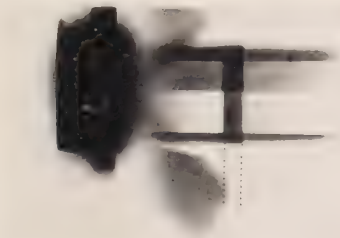


Fig. 4.

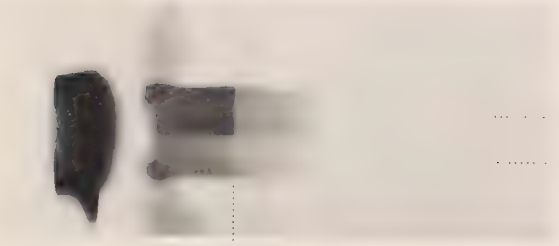
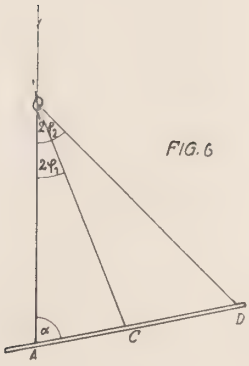


Fig. 5.



Zur Theorie der Elementvereine.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 7. November 1914.

Die folgende Untersuchung zerfällt in zwei Teile und beantwortet zwei Fragen, auf die der Verfasser bei der Bearbeitung des Artikels III D 7 (Berührungstransformationen) der Mathematischen Enzyklopädie gestoßen ist. In § 1 werden zunächst die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in $n+1$ Veränderlichen bestimmt, deren Charakteristiken gerade Linien sind, sodann werden spezielle semilineare Differentialgleichungen untersucht. (Semilinear heißen Differentialgleichungen, welche unter ihren Lösungen Elementvereine besitzen, deren Dimension, insofern man sie als Punktgebilde betrachtet, um mehr als eine Einheit niedriger als die des betreffenden Raumes ist. Einfachste Beispiele sind die in p und q linearen Differentialgleichungen des $R(x, y, z)$, bei denen ja jede der ∞^2 charakteristischen Kurven eine Lösung darstellt.)

In § 2 wird die bisher unerledigt gebliebene Frage beantwortet, wie bei gewissen daselbst genauer angegebenen Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes die Krümmungselemente sich abbilden. Für die Liesche Geradenkugeltransformation wird die Untersuchung im einzelnen durchgeführt.

§ 1. Semilineare Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken.

Durch die Untersuchungen von F. Engel[1]) und einige sich daran schließende Arbeiten ist eine bereits früher von S. Lie und A. V. Bäcklund in Angriff genommene Frage der weitergehenden Behandlung zugänglich geworden, die Frage nämlich, ob eine vorgelegte partielle und nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

unterdimensionale Lösungen besitzt. Unter Lösung ist dabei ein Verein von ∞^n Elementen zu verstehen, der die Differentialgleichung erfüllt; unterdimensional von der r^{ten} Klasse heißt die Lösung, wenn aus dem System von Gleichungen zwischen den Elementkoordinaten, das die Lösung darstellt, durch Elimination von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nicht eine einzige Gleichung zwischen den Punktkoordinaten entsteht, sondern die Anzahl der entstehenden Gleichungen $r+1$ beträgt. Ist r die höchste Klasse für eine vollständige Lösung, so bezeichnet man die gegebene Differentialgleichung als semilinear von der r^{ten} Klasse[2]).

Die folgende Betrachtung will einen Beitrag zu diesen Untersuchungen geben, in dem die Klasse einer gewissen Differentialgleichung mit geradlinigen Charakteristiken bestimmt wird. Vorausgeschickt ist die Erweiterung eines schon früher aufgestellten Satzes, der die Bestimmung aller Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken gestattet.

I. Partielle Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken.

Im $(n+2)$-dimensionalen Raum hat eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mindestens ∞^{n+1} und höchstens ∞^{2n+1} charakteristische Kurven. Es soll die Bedingung dafür

[1]) Eine neue Methode in der Invariantentheorie der Differentialgleichungen. Leipz. Berichte 1905, S. 161—232. Vgl. Math. Enz. III D 7, Liebmann, Nr. 22.

[2]) Math. Enz. II A 5, von Weber, Nr. 34.

aufgestellt werden, daß diese Kurven gerade Linien sind. Nach Engel ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die gegebenen Kurven Charakteristiken sind, folgende: Unter den Bedingungen, die sich für das Schneiden zweier unendlich benachbarten Kurven der gegebenen Schar ergeben durch Elimination der Punktkoordinaten, muß sich mindestens eine in den Differentialen der Parameter lineare befinden.

Die Geraden seien jetzt dargestellt durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 x + \varrho_1 \\ x_2 &= r_2 x + \varrho_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= r_n x + \varrho_n \\ z &= s x + \sigma \end{aligned}$$

und speziell die Geradenschar, von der verlangt wird, daß sie Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung sind, durch die Gleichungen

$$f(r_1, \ldots, r_n, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma) = 0$$

in Verbindung mit k weiteren Gleichungen zwischen den Linienkoordinaten; wir fassen die Gleichungen zusammen in die eine:

1) $$F(r_1, r_2, \ldots, r_n, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma) = f + \lambda_1 f_1 \ldots + \lambda_k f_k = 0.$$

Als Bedingung für das Schneiden ergibt sich dann:

$$dr_1\left(\frac{\partial F}{\partial r_1} - x\frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\right) + \cdots + dr_n\left(\frac{\partial F}{\partial r_n} - x\frac{\partial F}{\partial \varrho_n}\right) + ds\left(\frac{\partial F}{\partial s} - x\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right) = 0$$

in Verbindung mit den in $F = 0$ enthaltenen $k+1$ Gleichungen. Hieraus ergibt sich dann auf Grund des Engelschen Satzes, daß alle zweireihigen Determinanten der Matrix

2)
$$\begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial r_1}\frac{\partial F}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial r_n}\frac{\partial F}{\partial s} \\ \frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\frac{\partial F}{\partial \varrho_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial \varrho_n}\frac{\partial F}{\partial \sigma} \end{matrix}$$

infolge der Gleichungen (1) verschwinden müssen, und dies sind im ganzen $n - k$ Bedingungen. Ist also die Schar der Geraden $(n+1)$-gliedrig, so sind sie von selbst Charakteristiken (die zugehörige Differentialgleichung ist dann linear), ist sie $(2n+1)$-gliedrig, so sind n Bedingungen zu erfüllen; dazwischen treten alle Zwischenstufen $(0 \leq k < n)$ auf.

Wir wollen dieses Ergebnis noch geometrisch deuten, indem wir untersuchen, welche Beschaffenheit ein Komplex von $(2n+1)$-fach unendlich vielen Geraden besitzt, wenn er die Bedingung erfüllt. Es wird sich zeigen, daß die Geraden einen Tangentenkomplex bilden, d. h. daß sie aus den Tangenten einer $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit des R_{n+2} bestehen.

Zunächst ist zu bemerken, daß die Komplexgleichung

$$f(r_1, r_2, \ldots, r_n, s, \varrho_1, \ldots, \varrho_n, \sigma) = 0$$

sich durch die Substitution

$$3) \qquad \begin{aligned} r_i &= x_i', \quad \varrho_i = x_i - x x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ s &= z', \quad \sigma = z - x z' \end{aligned}$$

in die Mongesche Gleichung

$$f(x_1', \ldots, x_n', z', x_1 - x_1' x, \ldots, x_n - x_n' x, z - z' x) = 0$$

verwandelt, die zu der zugeordneten partiellen Differentialgleichung gehört. Die charakteristischen Streifen werden dann bestimmt durch das System von Gleichungen

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial s} - x\frac{\partial f}{\partial \sigma}} = \frac{dx_i}{x_i'\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - x\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)} = \frac{dz}{(p + \Sigma p_i x_i')\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} - x\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)}$$

$$= \frac{dp_i}{-\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho_i} + p_i\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)} = \frac{dp}{\Sigma x_i'\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho_i} + p\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)}$$

und es ergibt sich auf der anderen Seite die partielle Differentialgleichung durch Elimination von $z', x_1', \ldots, x_n'$ aus den Gleichungen

$$[f] = 0, \quad z' - p - p_1 x_1' - \cdots - p_n x_n' = 0$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_i}\right] + p_i \left[\frac{\partial f}{\partial s}\right] - x\left(\left[\frac{\partial f}{\partial q_i}\right] + p_i \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right]\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Einschließung in [ ] bedeutet, daß die Substitution (3) ausgeführt ist. Aus den zuletzt hingeschriebenen Gleichungen in Verbindung mit (2) folgt aber, daß die Nenner von dp_i und dp im vorigen System verschwinden, d. h. längs eines charakteristischen Streifens sind $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ konstant.

Daraus aber ergibt sich die Form der Differentialgleichung. Wir setzen sie zunächst in der Gestalt an:

$$z - px - \Sigma p_i x_i - u(x, x_1, \ldots, x_n, p, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

und erhalten für die charakteristischen Streifen das System

$$\frac{dx}{x + \frac{\partial u}{\partial p}} = \frac{dx_i}{x_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}} = \frac{dp}{-p + p - \frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{dp_i}{p_i + p_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}}.$$

Demnach muß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

sein, und die partielle Differentialgleichung hat die Form

$$z - px - p_1 x_1 - \cdots - p_n x_n = u(p, p_1, \ldots, p_n),$$

woraus folgt, daß die Charakteristiken die Tangenten der Fläche sind, deren Gleichung aus

$$z - ax - a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n = u(a, a_1, \ldots, a_n)$$

und

$$x + \frac{\partial u}{\partial a} = 0, \qquad x_i + \frac{\partial u}{\partial a_i} = 0$$

durch Elimination von $a, a_1, \ldots, a_n$ entsteht, d. h. die Charakteristiken bilden eben einen Tangentenkomplex.

Indem wir das Ergebnis zusammenfassen, erhalten wir den Satz:

Die durch die $k+1$ Gleichungen

$$f=0,\quad f_1=0,\ldots,\quad f_k=0 (0\leq k\leq n)$$

zwischen den $2n+2$ Linienkoordinaten des R_{n+2} gegebenen ∞^{2n-k+1} Geraden sind dann und nur dann die charakteristischen Kurven einer partiellen Differentialgleichung, wenn sich die Konstanten $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ so bestimmen lassen, daß

$$F=f+\lambda_1 f_1\cdots+\lambda_k f_k=0$$

ein Tangentenkomplex ist. Die Anzahl der Bedingungen hierfür ist gleich $n-k$[1]).

2. Untersuchung einer Klasse von semilinearen Gleichungen.

Schon in der früheren Untersuchung[2]) ist für den Fall des R_4 diejenige Differentialgleichung besprochen worden, deren Charakteristiken aus den Tangenten einer nicht ausgearteten Mannigfaltigkeit zweiten Grades bestehen. Die entsprechenden Differentialgleichungen gehören auch für Räume höherer Dimension zu den semilinearen und haben unterdimensionale lineare Mannigfaltigkeiten als Lösungen, wie hier gezeigt werden soll. Es handelt sich also um die partiellen Differentialgleichungen, welche durch linear gebrochene Transformationen in die Gestalt

$$4)\qquad z-p_1x_1\cdots-p_nx_n+\tfrac{1}{2}(p_1^2\cdots+p_n^2)=0$$

gebracht werden können und deren Charakteristiken die Tangenten der Mannigfaltigkeit

$$5)\qquad z+\tfrac{1}{2}(x_1^2\cdots+x_n^2)=0$$

sind. Wir schreiben sie in der Form

$$z-p_1x_1\cdots-p_kx_k-q_1y_1\cdots-q_my_m+\tfrac{1}{2}\Sigma p^2+\tfrac{1}{2}\Sigma q^2=0$$

und suchen, den Bestimmungen der Aufgabe gemäß, nach

[1]) Leipz. Berichte 1912, S. 411 (für den R_4).
[2]) A. a. O., S. 417.

m-dimensionalen linearen Lösungen, nach solchen Lösungen also, die durch ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} z &= c_1 x_1 \cdots + c_m x_m + c \\ y_1 &= b_{11} x_1 \cdots + b_{1m} x_m + b_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k &= b_{k1} x_1 \cdots + b_{km} x_m + b_k \end{aligned}$$

gegeben sind.

Um zunächst die Elementkoordinaten einer solchen m-dimensionalen Ebene zu bestimmen, sind noch diejenigen Gleichungen beizufügen, die aus

$$\begin{aligned} dz - \Sigma p\,dx - \Sigma q\,dy \quad & c_1 dx_1 \cdots + c_m dx_m \quad - p_1 dx_1 - \cdots - p_m dx_m \\ & q_1(b_{11} dx_1 \cdots + b_{1m} dx_m) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & - q_k(b_{k1} dx_1 \cdots + b_{km} dx_m) = 0 \end{aligned}$$

entstehen, wenn man die Koeffizienten der dx_i gleich Null setzt. Man erhält dann die ergänzenden Gleichungen

$$\begin{aligned} p_1 &= c_1 - q_1 b_{11} \cdots - q_k b_{k1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m &= c_m - q_1 b_{1m} \cdots - q_k b_{km}. \end{aligned}$$

Setzt man die Werte von $z, y, \ldots, y_k, p, \ldots, p_m$ in die Differentialgleichung ein und verlangt, daß sie erfüllt ist, so erhält man durch Nullsetzen der darin noch vorkommenden Koeffizienten der unabhängigen Veränderlichen $x, \ldots x_m$, $q_1 \ldots q_k$ und ihrer Produkte die Gleichungen

$$\begin{aligned} c + \tfrac{1}{2}(c_1^2 \cdots + c_m^2) &= 0 \\ - b_1 + c_1 b_{11} \cdots + c_m b_{1m} &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ - b_k + c_1 b_{k1} \cdots + c_m b_{km} &= 0 \end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned} 1 + b_{11}^2 \cdots + b_{1m}^2 &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 + b_{k1} \cdots + b_{km}^2 &= 0 \\ b_{i1} b_{j1} \cdots + b_{im} b_{jm} &= 0 \qquad (i \neq j = 1, 2, \cdots, k). \end{aligned}$$

Die ersten $k+1$ Gleichungen bestimmen c und die $b_1, \ldots, b_m$, wobei $c_1, \ldots, c_m$ ganz beliebig gewählt werden können, die weiteren $m \cdot k$ Größen sind aber noch den weiteren $\frac{k(k+1)}{2}$ Bedingungen zu unterwerfen. Es fragt sich, wenn diese Gleichungen lösbar sind, und wie groß die Mannigfaltigkeit dieser Lösungen ist.

Die Gleichungen haben, wenn man die b_{iu} durch $\sqrt{-1}\, b_{iu}$ ersetzt, die Form von Orthogonalitätsrelationen, woraus die Bedingung für die Auflösbarkeit leicht folgt.

Ist $k > m$, so denke man sich etwa

$$b_{11}, \ldots, b_{1m}$$
$$b_{21}, \ldots, b_{2m}$$
$$\ldots\ldots$$
$$b_m \ldots, b_{mm}$$

den Bedingungen gemäß bestimmt, soweit sie diese Größen und weiter keine enthalten. Die Determinante dieser m^2 Größen ist dann dem absoluten Betrage nach gleich Eins.

Dazu kommen aber noch weitere Gleichungen, z. B.

$$1 + b_{r1}^2 + b_{r2}^2 \cdots + b_{rm}^2 = 0 \qquad (r > k)$$
$$b_{11} b_{r1} \cdots + b_{1m} b_{rm} = 0$$
$$\ldots\ldots$$
$$b_{m1} b_{r1} \cdots + b_{mm} b_{rm} = 0.$$

Die letzten m Gleichungen zeigen, daß die $b_{r1}, \ldots, b_{rm}$ alle gleich Null sein müßten, weil die Determinante von Null verschieden ist, und das wäre ein Widerspruch gegen die erste Gleichung. Für $k > m$ sind also die Bedingungen nicht erfüllbar, wohl aber für $k < m$, und zwar erhält man dann gerade, der Anzahl der Gleichungen entsprechend,

$$km - k - \frac{k(k-1)}{2}$$
$$= k\left(m - \frac{k+1}{2}\right)$$

unabhängige Größen b_{ku} und im ganzen

$$m + k\left(m - \frac{k+1}{2}\right) = (k+1)\left(m - \frac{k}{2}\right)$$

unabhängige Koeffizienten.

Damit sind wir zu dem Ergebnis gelangt, daß die Differentialgleichung (4) gerade

$$\infty^{(k+1)\left(m-\frac{k}{2}\right)} \qquad (k+m=n,\ m>k)$$

lineare m-dimensionale Integralmannigfaltigkeiten enthält.

Von diesen Integralmannigfaltigkeiten (Integral-L_m) beanspruchen aber nur diejenigen ein besonderes Interesse für allgemeinere Untersuchungen, deren Punkte nicht der singulären Lösung (5) angehören, da ja bei allgemeinen Punkttransformationen die Differentialgleichung ihr Verhalten nur in der Umgebung eines Punktes allgemeiner Lage nicht ändert.

Es ist also noch zu untersuchen, welche unter den so erhaltenen Integral-L_m die Gleichung (5) identisch erfüllen. Um dies festzustellen, bilden wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_m^2 + y_1^2 \cdots + x_k^2)\\
&= \tfrac{1}{2}\{x_1^2(1 + b_{11}^2 \cdots + b_{k1}^2) \cdots + x_m^2(1 + b_{1m}^2 \cdots + b_{km}^2)\\
&\quad + 2\,x_1 x_2(b_{11}b_{12} + \cdots + b_{k1}b_{k2}) + \cdots\\
&\quad + 2\,x_1(b_1 b_{11} \cdots + b_k b_{k1}) + \cdots\\
&\quad + b_1^2 \cdots + b_k^2\}
\end{aligned}$$

und verlangen, daß er auf Grund der Beziehungen, welche die Koeffizienten erfüllen, gleich

$$-z = -(c_1 x_1 \cdots + c_m x_m + c)$$

wird.

Hieraus folgt, daß die $b_{k\mu}$ jetzt Relationen zu erfüllen haben, die aus den früheren durch Vertauschung der Reihen mit den Zeilen entstehen, und das tritt nur für $k = m$ ein[1]).

[1]) So hat die Differentialgleichung

$$z - px - qy + pq = 0,$$

deren Charakteristiken die Tangenten des Paraboloides

$$z - xy = 0$$

In diesem Fall sind aber auch die übrigen Forderungen erfüllt. In der Tat wird dann

$$b_1 b_{11} + \cdots b_k b_{k1} = c_1(-1) + c_2 \cdot 0 \cdots + c_m \cdot 0 = -c_1$$

usw. und

$$\tfrac{1}{2}(b_1^2 \cdots + b_k^2) = (-1)c_1^2 \cdots + (-1)c_m^2 + c_1 c_2 \cdot 0 + \cdots = -c.$$

Läßt man also diese singulären (nicht durch Punkte allgemeiner Lage gehenden) Integral-L_m fort, so kommt das endgültige Ergebnis:

Die partielle Differentialgleichung

$$z - p_1 x_1 \cdots - p_n x_n + \tfrac{1}{2}(p_1^2 \cdots + p_n^2) = 0$$

ist für $n > 2$ immer semilinear, sie hat im besonderen dann immer

$$\infty^\mu = \infty^{(k+1)\left(m - \frac{k}{2}\right)} \qquad (k + m = n,\ m > k)$$

m-dimensionale lineare Integralmannigfaltigkeiten L_m.

Um einige Beispiele auszuführen, geben wir die folgende Übersicht:

$n = 3$ gibt nur $m = 2$, $\mu = 3$, Klasse: $r = 1$

$n = 4$ gibt $m = 3$, $\mu = 5$, Klasse: $r = 1$

$n = 5$ gibt $m = 4$, $\mu = 14$ und $m = 3$, $\mu = 6$, Klasse: $r = 2$.

Die beiden letzteren Fälle sind insofern beachtenswert, als hier bereits die Zahl der Parameter in den unterdimensionalen Lösungen größer ist als die Anzahl der Parameter in einer vollständigen Lösung beträgt (die letztere ist gleich n) — eine Möglichkeit, auf die in früheren Untersuchungen, wie es scheint, von keiner Seite hingewiesen worden ist. In den beiden Fällen $n = 3$ und $n = 4$ gibt es außer den angegebenen Integral-L_2

sind, 2 Scharen von ∞^1 Integralgeraden, nämlich die Erzeugenden des Paraboloides. In der Tat erfüllt der Verein

$$y = c,\quad z = xc,\quad p = c$$

die Differentialgleichung.

bzw. Integral-L_3 keine weiteren unterdimensionalen Integralmannigfaltigkeiten, aus denen sich eine vollständige Lösung aufbauen läßt. Für $n = 5$ aber können aus den Integral-L_3 leicht vierdimensionale Integralmannigfaltigkeiten abgeleitet werden, die von den Integral-L_4 verschieden sind.

§ 2. Über die Transformation der Krümmungselemente.

Unter den Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes beanspruchen diejenigen ein besonderes Interesse, bei denen die charakteristischen Streifen einer bestimmten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in die Flächenelemente einer Pfaffschen Gleichung übergehen. Sie nehmen eine besondere Stellung ein, weil bei ihnen die „im allgemeinen" bestehende gegenseitige Eindeutigkeit oder doch Endlichdeutigkeit der Abbildung aufgehoben ist, insofern jedesmal den ∞^1 Flächenelementen eines charakteristischen Streifens im Bildraum nur ein Element entspricht. Auch die Liesche Geraden-Kugeltransformation gehört zu dieser Gattung[1]).

I. Allgemeine Untersuchung.

Bei derartigen Transformationen entsteht nun die Frage:

Wie werden die Krümmungselemente K' abgebildet, deren Träger die Flächenelemente der gegebenen partiellen Differentialgleichung sind?

Diesen $\infty^4 \cdot \infty^3 = \infty^7$ Krümmungselementen des einen Raumes $R(x, y, z)$ können im anderen Raum $R_1(x_1, y_1, z_1)$ nur $\infty^3 \cdot \infty^3 = \infty^6$ Krümmungselemente entsprechen, und die Vollständigkeit verlangt, daß über die Art der Zuordnung Rechenschaft gegeben wird, was hier geschehen soll.

Die aequationes directrices der Berührungstransformation seien:

[1]) Vgl. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 12 des in Anmerkung 1 genannten Artikels der Mathematischen Enzyklopädie.

1) $$z + f(x, y, x_1, z_1) = 0$$

2) $$F \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = 0.$$

Diese Transformation führt, wie wir gleich sehen werden, die je ∞^1 Flächenelemente eines charakteristischen Streifens der aus (1) in Verbindung mit

2') $$p + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad q + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

durch Elimination von x_1 und z_1 entstehenden Differentialgleichung in je ein Element der Pfaffschen Gleichung

$$dz_1 - y_1 dx_1 = 0$$

über. In der Tat erhält man zur vollständigen Aufstellung der Berührungstransformation die weiteren Gleichungen

3) $$p + \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad q + \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \lambda \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right), \quad q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} + q_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right)$$

und diese zeigen für $\lambda = 0$, daß den ∞^1 Flächenelementen des durch (1), (2) und (2') gegebenen Streifens ein ganz bestimmtes Element

$$x_1, y_1, z_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_1 = 0$$

entspricht. Für die Transformation der ausgezeichneten Krümmungselemente (K'), um die es sich im folgenden allein handelt, sind die Formeln dann leicht zu berechnen. Durch Variation der Gleichungen (1) und (2) erhält man zunächst:

$$\left(p + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(q + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \right) \delta x_1 + q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta y_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right) \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} \right) \delta y_1 = 0.$$

Die erste Gleichung ist hier identisch erfüllt, in der zweiten ist $p_1 = y_1$ zu setzen. Wir haben dann noch die vier Glei-

chungen (3) zu variieren, wobei λ gleich Null zu setzen ist, außerdem natürlich

$$q_1 = p_1 - y_1 = 0$$

und endlich

$$\delta p = r\delta x + s\delta y, \qquad \delta q = s\delta x + t\delta y$$
$$\delta p_1 = r_1\delta x_1 + s_1\delta y_1, \qquad \delta q_1 = s_1\delta x_1 + t_1\delta y_1.$$

Wir lassen δp_1 und δq_1 zunächst stehen und setzen noch

4) $$r + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = R, \qquad s + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = S, \qquad t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = T$$

und außerdem

4') $$\frac{\partial F}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{dF}{dx_1}.$$

Dann kommt

$$R\delta x + S\delta y + (\delta x_1 - \delta\lambda)\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$S\delta x + T\delta y + (\delta y_1 - \delta\lambda)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \delta p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \delta x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} - \delta\lambda \frac{dF}{dx_1} = 0$$

$$\delta q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \delta\lambda \frac{\partial f}{\partial z_1}$$

und dazu von oben

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{dF}{dx_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta y_1 = 0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y = (\delta\lambda - \delta x_1)\cdot w$$

5) $$w = \frac{T\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2S\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + R\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{RT - S^2}$$

und aus den drei letzten weiter

$$w\,\delta q_1 = \left(w - \frac{dF}{dx_1}\right)\delta x_1 - \frac{\partial f}{\partial z_1}\,\delta y_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}\,\delta p_1 + \left(w - \frac{dF}{dx_1}\right)\delta q_1 = \left(w - \frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\delta x_1$$

und, wenn man die Bedeutung von δp_1 und δq_1 berücksichtigt,

$$s_1 w = w - \frac{dF}{dx_1}$$

$$t_1 w = -\frac{\partial f}{\partial z_1}$$

6)

$$s_1\left(w - \frac{dF}{dx_1}\right) + r_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = w - \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$t_1\left(w - \frac{dF}{dx_1}\right) + s_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0.$$

Die drei ersten Gleichungen drücken (in Verbindung mit (1), (2), (4) und (5)) die Koordinaten r_1, s_1 und t_1 aus, die vierte zeigt nur, daß der Ansatz auf keinen Widerspruch führt und dient mit zum Beweis der Richtigkeit.

Damit ist die gesuchte Abbildung der ausgezeichneten Krümmungselemente vollständig gegeben, und es handelt sich jetzt nur mehr darum, das Ergebnis zu deuten.

Die Gleichungen ergeben zunächst die von vornherein selbstverständliche Tatsache, daß jedem ausgezeichneten Element des Raumes (x, y, z) auch ein ausgezeichnetes Krümmungselement K_1 des $R_1(x_1 y_1 z_1)$ entspricht, d. h. eines, dessen Träger ein Flächenelement der Pfaffschen Gleichung

$$dz_1 - y_1\,dx_1 = 0 \qquad (p = y_1,\ q_1 = 0)$$

ist; sie zeigen aber weiter, daß man im R_1 nicht alle ausgezeichneten Krümmungselemente erhält, sondern zu jedem Flächenelement der Pfaffschen Gleichung nur ∞^2, denn aus (2) und (6) folgt durch Elimination von x, y und w eine Gleichung zwischen $x_1 y_1 z_1$ und $r_1 s_1 t_1$.

So entsprechen z. B. bei der Berührungstransformation

$$z + xx_1 + yz_1 + x_1z_1 = 0$$
$$F \equiv (x + z_1) + y_1(y + x_1) = 0$$

den ausgezeichneten Krümmungselementen des $R(x, y, z)$ nur solche, die die Gleichung

$$2(r_1t_1 - s_1^2) + s_1 + 1 = 0$$

erfüllen. (Dies folgt unmittelbar aus dem weiter unten stehenden System von Gleichungen.)

Den ∞^7 ausgezeichneten Elementen K' entsprechen also unter den ∞^6 ausgezeichneten Elementen K_1' nur gewisse ∞^5 Elemente K_1''. Zu jedem solchen Element K_1'' kann man dann umgekehrt die entsprechenden Elemente K' leicht angeben. Durch ein Element K_1'' ist nämlich x, y, z und w bestimmt, also ein Flächenelement des $R(x, y, z)$ und, ihm anhängend, ∞^2 Krümmungselemente K'.

In unserem Beispiel lautet das vollständige System der Gleichungen so:

$$z + xx_1 + yz_1 + x_1z_1 = 0$$
$$x + z_1 + y_1(y + x_1) = 0$$
$$p + x_1 = 0, \quad q + z_1 = 0, \quad p_1 = y_1, \quad q_1 = 0$$
$$w = \frac{t - 2sy_1 + ry_1^2}{rt - s^2}$$
$$s_1w = w - 2y_1$$
$$f_1w = -(y + x_1)$$
$$s_1(w - 2y_1) + r_1(y + x_1) = w - y_1.$$

Liegt ein ausgezeichnetes Element K_1'' vor, so liefern die letzten Gleichungen y und w, die beiden ersten x und z, die Koordinaten r, s und t sind dann in der Tat nur noch der einen Bedingung unterworfen, daß w einen vorgeschriebenen Wert hat.

Wo aber bleiben im $R(x, y, z)$ die Bilder der anderen von den K_1'' verschiedenen ausgezeichneten Krümmungselemente K_1'?

In diesem Fall muß w unbestimmt werden, es müssen also die Gleichungen

$$R\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2S\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + T\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = 0$$

und

$$RT - S^2 = 0$$

bestehen, die sich ersetzen lassen durch

$$7) \qquad \begin{aligned} R\frac{\partial F}{\partial y} - S\frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ S\frac{\partial F}{\partial y} - T\frac{\partial F}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Elemente ist leicht festzustellen: es wird sich zeigen, daß wir einfach mit Krümmungselementen K'' der durch die partielle Differentialgleichung gegebenen Flächen zu tun haben.

In der Tat, wenn

$$z + f(x, y, x_1, z_1) = 0$$

in Verbindung mit

$$F - \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0, \quad z_1 = y(x_1), \quad y_1 = y'(x_1)$$

irgend eine Lösung ist, so bekommt man mit Anwendung der Abkürzungen (4) zur Bestimmung von r, s, t die Gleichungen

$$Rdx + Sdy + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_1 + y_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx_1 = 0$$

$$Sdx + Tdy + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx_1 + y_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx_1 = 0$$

oder

$$Rdx + Sdy + \frac{\partial F}{\partial x}dx_1 = 0$$

$$Sdx + Tdy + \frac{\partial F}{\partial y}dx_1 = 0$$

und dies führt auf die Gleichungen (7).

Den Elementen K'' entsprechen also die von den K_1'' verschiedenen Elemente K_1' und zwar ist durch ein Element K'' nur der Träger von K_1' bestimmt.

Das Ergebnis möge nun noch zusammengefaßt werden: Der Betrachtung unterworfen sind gewisse Berührungstransformationen des dreidimensionalen Raumes $R(x, y, z)$, diejenigen nämlich, welche den $\infty^3 \cdot \infty^1$ Flächenelementen E' einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die ∞^3 Flächenelemente E_1' einer Pfaffschen Gleichung des $R_1(x_1, y_1, z_1)$ zuordnen, so zwar, daß jedem charakteristischen Streifen der Differentialgleichung ein Element der Pfaffschen Gleichung entspricht.

Genauer untersucht wird die Abbildung der ∞^7 Krümmungselemente $K'(x, y, z, p, q, r, s, t)$, deren Träger die angegebenen Elemente $E'(x, y, z, p, q)$ sind, und unter denen die ∞^5 Krümmungselemente K'', welche den Lösungen der partiellen Differentialgleichung angehören, eine besondere Klasse bilden.

Ausgezeichnete Krümmungselemente K_1' des $R_1(x_1 y_1 z_1)$ sollen ferner die ∞^6 Krümmungselemente heißen, deren Träger die Flächenelemente E_1' sind.

Dann zeigt unsere Untersuchung, daß die folgenden Sätze bestehen:

1. Einem Element K', das nicht der Klasse K'' angehört, entspricht kein allgemeines Element K_1'; die Bilder K_1'' der K' sind vielmehr der Bedingung unterworfen, daß noch eine gewisse Beziehung zwischen $r_1, t_1, s_1, x_1, y_1, z_1$ besteht.

2. Jedem Element K'' mit dem Träger E' entspricht ein beliebiges Element K_1' mit dem Träger E_1'.

3. Jedem Element K_1'' mit dem Träger E_1' entsprechen ∞^2 Elemente K', deren Träger ein bestimmtes unter den ∞^1 dem Flächenelemente E_1' zugeordneten Elemente E' ist.

4. Jedem Element K_1' mit dem Träger E_1, das nicht der Klasse K_1'' angehört, entsprechen ∞^2 Elemente K'', deren Träger die Elemente E' des charakteristischen Streifens sind, dessen Bild E_1' ist.

Soviel läßt sich ganz allgemein aussagen. Will man die noch vorhandenen Unbestimmtheiten beseitigen, so werden dazu in jedem einzelnen Fall besondere Grenzübergänge nötig, die aber zu Ergebnissen von allgemeiner Bedeutung nicht führen können.

2. Die Liesche Geradenkugeltransformation.

Der Vollständigkeit halber wird hier noch angegeben, wie sich die Verhältnisse bei der Lieschen Geradenkugeltransformation[1]) gestalten.

Um die Formeln nicht zu unübersichtlich zu gestalten, gehen wir nicht von den aequationes directrices in der bei Lie angegebenen Gestalt aus, sondern wir wählen die Gestalt

$$x + x_1 z + z_1 = 0$$
$$x_1 y - z - y_1 = 0,$$

die aus der ersteren durch eine sehr einfache Transformation

$$X + iY = x$$
$$X - iY = y$$
$$Z = z$$

des Raumes der Kugeln sich ergibt.

Die Formeln für die Berührungstransformation werden dann

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4pq}}{2p}, \quad y_1 = yx_1 - z, \quad z_1 = -x - x_1 z$$

$$p_1 = -z - q_1 y, \qquad q_1 = x_1 + \frac{1}{p},$$

und es ist dann

$$w^2 = 1 + 4pq = 0$$

(bei Lie:

$$1 + P^2 + Q^2 = 0)$$

diejenige Differentialgleichung, deren charakteristische Streifen in die Flächenelemente des Bildraums übergehen, die einer

[1]) Vgl. Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen I. Leipzig 1896, S. 463.

bestimmten Pfaffschen Gleichung genügen, nämlich der Gleichung

$$dz_1 - y_1 dx_1 + x_1 dy = 0.$$

In der Tat entspricht dem charakteristischen Streifen, der durch die Gleichungen

$$x + az + c = 0$$
$$ay - z - b = 0$$
$$p = -\frac{1}{2a}, \quad q = \frac{a}{2}$$

gegeben ist, das Flächenelement

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = c, \quad p_1 = b, \quad q_1 = -a.$$

Um sodann die Elemente zweiter Ordnung zu transformieren, bedienen wir uns eines von Engel[1]) angegebenen Verfahrens, das, für andere Zwecke eingeführt, auch für die wirkliche Berechnung, also die Erweiterung einer Berührungstransformation, sich unentbehrlich erweist.

Man hat zu diesem Zweck die Gleichungen

$$dp = r dx + s dy, \quad \delta p = r \delta x + s \delta y$$
$$dq = s dx + t dy, \quad \delta q = s \delta x + t \delta y$$

zu betrachten. Aus ihnen folgt, wenn man

$$dy \delta x - dx \delta y = v$$
$$rt - s^2 = u$$

setzt,

[1]) F. Engel, Die höheren Differentialquotienten. (Leipz. Berichte 1902, S. 17—51.) § 2. (Die Elemente zweiter Ordnung im Raume). Mit diesen Elementkoordinaten läßt sich z. B. nachweisen, daß die fünf Gleichungen, die $r_1 s_1 t_1 u_1$ durch r, s, t, u ausdrücken, auf keinen Widerspruch führen, obwohl doch nur drei Größen (r, s, t bzw. $r_1 s_1 t_1$) unabhängig sind. (Vgl. die Dissertation von O. Lier, Über Flächenscharen, die durch Berührungstransformationen in Kurvenscharen überführbar sind. (Greifswald 1909), S. 3—7.)

$$dp\,\delta x - \delta p\,dx = sv$$
$$dp\,\delta y - \delta p\,dy = -rv$$
$$dq\,\delta x - \delta q\,dx = tv$$
$$dq\,\delta y - \delta q\,dy = -sv$$
$$dq\,\delta p - \delta q\,dp = uv.$$

Die zweireihigen Determinanten können dann in den Rechnungen benützt werden als homogene Größen, und es ergibt sich als Tafel, aus der die Erweiterung, d. h. die Transformation der r, s, t abzulesen ist:

	rv	sv	tv	uv	v
$r_1 v_1$	$-\frac{2yq^2}{p}$	$+\frac{2y(1+2pq)}{p}$	$-2py$	$+\frac{y^2}{p^2}$	$-w^2$
$s_1 v_1$	$-\frac{q^2}{p}$	$+\frac{1+2pq}{p}$	$-p$	$+\frac{y}{p^2}$	0
$t_1 v_1$	0	0	0	$+\frac{1}{p^2}$	0
$u_1 v_1$	$-\frac{a_2^2}{4p^3}$	$+\frac{a_2}{p}$	$-p$	0	0
v_1	$+\frac{a_1^2}{4p^3}$	$-\frac{a_1}{p}$	$+p$	0	0

Dabei sind die Abkürzungen gebraucht

$$w = +\sqrt{1+4pq}$$
$$a_1 = -w+1+2pq, \qquad a_2 = w+1+2pq.$$

Setzt man hierin w gleich Null, so ergeben die beiden letzten Zeilen

$$u_1 + 1 = r_1 t_1 - s_1^2 + 1 = 0.$$

Diese Gleichung sondert also die früher mit K_1^7 bezeichneten Elemente aus, deren Träger das Flächenelement ist

$$x_1, y_1, z_1, p_1 = y_1, \qquad q_1 = -x_1.$$

Die Elemente K'' sind hier gegeben durch

$$1 + 4pq = 0$$

in Verbingung mit

$$rq + sp = 0$$
$$sq + tp = 0,$$

woraus noch folgt

$$u = rt - s^2 = 0.$$

Wendet man diese Gleichungen an, so zeigt sich, daß die durch die Tafel bestimmten Größen der ersten Reihe sämtlich zu Null werden, also r_1, s_1 und t_1 völlig unbestimmt.

Wollte man den Grenzübergang ausführen, so wäre der Ansatz zu machen:

$$p = \frac{\varepsilon + 1}{2} e^a, \qquad q = \frac{\varepsilon - 1}{2} e^{-a}$$
$$r = -se^{2a} + \eta, \qquad t = -se^{-2a} + \zeta.$$

Je nachdem wie man dann bei festgehaltenem a und s die drei Größen ε, η und ζ zu Null übergehen läßt, erhält man ganz verschiedene Werte von r_1, s_1 und t_1.

J. H. Lamberts Stellung zum Raumproblem und zur Parallelentheorie in der Beurteilung der Zeitgenossen.

Von **K. Bopp,** Heidelberg.

Vorgelegt von S. Günther in der Sitzung am 5. Dezember 1914.

J. H. Lamberts Abhandlung „Theorie der Parallellinien" wurde bekanntlich von Paul Stäckel in ihrem entscheidenden Wert für die Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie erkannt und in seiner „Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der Nichteuklidischen Geometrie in Gemeinschaft mit Friedrich Engel herausgegeben von Paul Stäckel, Leipzig, Teubner 1895" auf den Seiten 150—208 leicht zugänglich gemacht. Leider ist das Originalmanuskript noch immer verschollen, nur über den Umfang desselben belehrt uns ein Blatt, das Lamberts Monatsbuch, welches wir demnächst mit erläuternden Anmerkungen zu veröffentlichen beabsichtigen, vorhergeht. Dort hat Lambert einen kurzen eigenhändigen Überblick über seine Manuskripte gegeben; nach demselben umfaßte das Manuskript der Parallelentheorie 53 4°-Seiten. Über das von ihm in der Herzoglichen Bibliothek zu Gotha aufgefundene Tagebuch hat Stäckel in der „Bibliotheca mathematica" vorläufig berichtet, 1899, S. 107—110 („Bemerkungen zu Lamberts Theorie der Parallellinien") und über Lamberts Arbeit und ihre Entstehung interessante Aufschlüsse gegeben. Wir möchten hier einige weitere Notizen hinzufügen als Frucht unserer eingehenden, auf P. Stäckels Anregung selbst angestellten Lambertstudien.

Lamberts Arbeit, die zu einem so wichtigen Dokumente der Erkenntnistheorie geworden, erschien posthum von Johann Bernoulli III, herausgegeben zuerst im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von J. Bernoulli und C. F. Hindenburg im 2. Stück 1786 S. 137—164 und im 3. Stück S. 325—358. Eine Rezension aus der Feder C. Leistes (Anonym. Sign.[1]) Qt.) brachte die „Allgemeine Deutsche Bibliothek" im 74 Bde. S. 174. Sie lautet: „Die Abhandlungen im zweyten Stück sind 1) Theorie der Parallellinien von J. H. Lambert. Der sel. Lambert sucht den berüchtigten 11. Grundsatz des Euklids, der doch so sehr eines Beweises bedarf, dadurch zu rechtfertigen, dass er dieses zu einem Grundsatz des Euklids macht: alle Sätze und Erklärungen solange als bloße Hypothesen gelten zu lassen, und nichts eher daraus zu beweisen, als sie selbst erwiesen sind. In sofern kann dieser 11. Grundsatz seinen Platz immer behalten, denn er ist an sich möglich, und Euklid beweiset nichts eher daraus, als bis er die Lehrsätze von den Parallelen erwiesen. Übrigens fügt Lambert sehr sinnreiche Betrachtungen hinzu, aus welchen dieser Grundsatz für sich als Folge anderer Euklidischer Sätze könne erwiesen werden" und „Allgemeine Deutsche Bibliothek" 74 Bd. 1787 S. 469 über die „Fortsetzung" (Magazin S. 325—358):

„Die zweyte [Abhandlung] ist eine Fortsetzung von Lamberts Theorie der Parallelinien. Wenn durch eine Gerade AB zwey Parallelen dD und cC rechtwinklicht gezogen werden und man zieht auf beiden Seiten der AB in beliebigen aber gleichen Entfernungen auf cC die lothrechten Linien CD und cd, so wird man, wenn bey d und D auch rechte Winkel

[1]) Den Schlüssel für die Signaturen der anonymen Rezensenten in der Allgem. Deutschen Bibliothek lieferte uns:
Parthey, Die Mitarbeiter an Fr. Nicolais Allgemeiner Deutscher Bibliothek, Berlin 1842;
Chr. Leiste (geb. 1738 zu Lotschau, gest. 21. Febr. 1815), Rektor der großen Schule zu Wolfenbüttel und Mitarbeiter Lessings am 6. Literaturbeitrag (am Problema bovinum).

sind, 2 sich deckende Parallelogramme bekommen. Es ist aber die Frage, ob bei d oder D rechte Winkel entstehen? Um das zu untersuchen, muss man 3 Hypothesen annehmen: Entweder ist D R, oder $D < R$ oder $D > R$. Jede dieser Hypothesen wird untersucht, und da auf der Richtigkeit der ersten der Beweis des Satzes sich gründet, so muss die Unrichtigkeit der beyden andern gezeigt werden. Das ist aber nicht mit der in der Geometrie erforderlichen Evidenz geschehen. Der sel. Lambert muss dies selbst bemerkt haben und vermuthlich hat er deshalb seine Methode nicht bekannt gemacht. So urtheilt auch Hr. H. [Hindenburg] in der dritten Abhandlung, wo er noch etwas über die Parallelen beybringt. Sie begreift 4 Stücke 1) Eine kurze Anzeige oder Beurtheilung der Lambert'schen Theorie, die bey dem Mangelhaften, das man nicht verkennen kann, doch noch soviel Gepräge des fruchtbaren Genies und so manche nutzbare Betrachtung enthält, dass sie immer noch verdiente bekannt gemacht zu werden." Es folgen dann weitere Rezensionen von Schriften über das Parallelenproblem.

Sehen wir so Lamberts Arbeit im Urteil der Zeit, so bieten seine eigenen Besprechungen in der „Allgemeinen deutschen Bibliothek" von einschlägigen Untersuchungen ein noch weit höheres Interesse. Stäckel hat in den vorgenannten „Bemerkungen" schon die zu Lorenz' (anonymer) Übersetzung der 6 ersten Bücher des Euklid von 1773, sowie die von K. Scherffers Schriftchen: Briefe über einen Entwurf der sphärischen Geometrie", Wien 1775, wiedergegeben. Drei weitere bringen wir hier zum Abdruck.

1. Über Scherffer, K., Institutionum geometricorum pars prior sive geometria elementaris, Wien in 4° 1770 äußert sich Lambert A. D. B. 18. Bd. I. St. S. 240: „In der Elementargeometrie hat er sich vorgesetzt in Ansehung der Ordnung dem La Caille [s. Stäckel, P., Zur Bibliographie der Parallelentheorie, B. M. 1899, Neue Folge 13, S. 47, La Caille, Nicolas Louis de, Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1741 (erwähnt bei Cammerer)]

zu folgen, ohne jedoch der Schärfe in Beweisen, welche bey den Alten so sehr gerühmt wird, etwas zu vergeben. Wir haben daher nachgesehen, wie er sich in Ansehung der bekannten Schwürigkeit bey den Parallellinien aushilft. Er sagt z. B. S. 8 die Neigung einer Linie gegen die andere sey ein einfacher Begriff und müsse eben deswegen nicht erklärt werden. Eine gerade Linie, die auf (gleicher Ebene) sich durchaus nicht gegen eine andere neigt, ist mit derselben parallel. Wird eine Perpendiculärlinie längs der Linie, auf welcher sie perpendiculär ist, fortgeschoben, so legt jeder Punkt derselben einen gleich grossen Weg zurück e. c. t. Diese Vorstellungsart hat wenigstens viel, das sich durch das Beispiel zweyer Wagenräder, zweener Reisender e. c. t. sehr fasslich machen lässt."

2. Zu Ebert J. J., Nähere Unterweisung in den philosophischen und mathematischen Wissenschaften für die oberen Klassen der Schulen und Gymnasien 1773 in 8°, Frankfurt und Leipzig bey Herlet, 36 Bogen Text und ein halber Bogen Kupferbl.[1]) in der A. D. B. 23. Bd. 2 St. 1774 S. 267/68 bemerkt Lambert: „Die Geometrie ist ebenfalls mit den Beweisen versehen und besonders findet

[1]) Die „Nähere Unterweisung" war sehr verbreitet: 2. Aufl. 1779, 3. Aufl. 1787, 4. Aufl. 1799. In der 1. Aufl. S. 51—59: Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt: S. 59—207: Die Arithmetik. S. 207 bis 333: Die Geometrie. I. Cap.: Erklärungen und Grundsätze; II. Cap.: Von den Linien, Winkeln und Figuren in Ansehung ihrer Gleichheit; III. Cap.: Von der Ausmessung der Figuren; IV. Cap.: Von der Ähnlichkeit der Figuren; V. Cap.: Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde; VI. Cap.: Von den Körpern. Nachdem Ebert I. Cap. § 10 eine erste Definition der Parallelinien gegeben, wobei er sich auf die Anschauung beruft, spricht er § 59 des II. Cap. den Satz aus: Gerade, die auf der einen Seite einer Transversalen innere Winkel bilden $= 2\,R$, sind parallel, denn sonst hätten sie mit gleichem Recht auf der andern Seite der Transversale noch einen Punkt gemein, was gegen Cap. II § 31 verstößt: Gerade schließen keinen Raum ein (Prinzip des Ptolemaeus).

Später hat J. J. Ebert den Parallelen noch eine besondere Schrift gewidmet: Programma academium de lineis parallelis, Wittenberg 1792, 4°, 14 pp.

sich der bestrittene Grundsatz der Parallellinien § 60 am behörigen Orte, wo er sich nemlich am deutlichsten begreifen lässt."

Eine wahrhaft klassische Stellungnahme zum Raumproblem aber enthält die Besprechung A. D. B. 29 Bd. S. 198 des Anonymus:

3. Über die allgemeine spekulative Philosophie", Bützow und Weimar, 6 Bogen, 1775, 8°. „Der Verfasser merkt inzwischen mit Recht an, dass ohne Rücksicht auf diese Streitigkeiten gefragt werden kann, was und wieviel der Verstand von solchen Begriffen, wie die von Zeit, Raum, Kraft e. c. t. sind, eigentlich besitze oder genauer zu reden, ob oder wiefern diese Begriffe die Dinge selbst vorstellen? Nach S. 64 wird diese Frage in eine andere aufgelöset, ob die Empfindung des Raums, soferne nemlich der Raum sich empfinden lässt, eine reine Empfindung sey? Es ist nun an dem, dass wir auf der Erdfläche den Raum zugleich mit einer Reyhe von Körpern sehen, aber von einem Bergegipfel zum andern durch die Luft durch sehen wir doch wohl nicht mehr als den Abstand, den Zwischenraum rein weg. Überdies wird der Begriff des Raumes nirgends reiner als in der Geometrie gedacht. Soweit würde also nach S. 64 dieser Begriff ein brauchbares Bild, ein richtig bedeutendes Zeichen seyn. Mit allem dem könnte er ein blosser Schein, oder wie es S. 84 heisst ein verwirrter Verstandesschein seyn. Wer dieses behauptet, wird müssen dem Copernicus nachahmen, das wahre System angeben, dessen Wirklichkeit beweisen und noch zeigen, wie sich alle Erscheinungen daraus erklären lassen, woher z. B. der Raum oder auch die Ausdehnung der Körper sich unter dem Bilde von drey Dimensionen zeigt, was in den Körpern ist, das diesen Dimensionen so genau entspricht, dass trotz aller geometrischen Schärfe und Evidenz, noch nicht das geringste hat gefunden werden können, wodurch sich dieser Schein als Schein verraten hätte?"

Man hat oft schon betont, daß mit einer scharfen und präzisen Formulierung eines Problems die Eroberung der Lö-

sung schon gewährleistet wird, und der gewaltige Fortschritt Lamberts zu C. F. Gauß hin springt in die Augen, wie seine gegensätzliche Stellung zu Kant. Die oft gekennzeichnete Skepsis Kaestners, die wir etwa mit einer Belegstelle aus dem Briefwechsel mit J. F. Pfaff belegen können, erscheint hier überwunden. Diese Briefstelle lautet: Kaestner an Pfaff, Göttingen, 2. August 1789 (Auszüge aus Briefen von J. F. Pfaff an Herzog Carl von Württemberg, F. Bouterwek, A. von Humboldt, A. G. Kaestner und Andere, Leipzig 1853) „Mit der Geschichte der Lehre von den Parallelen werden Sie am besten tun sich nicht einzulassen: man muss darüber so gar viel Unnützes lesen. Ich habe viel Zeit damit verderben müssen; weil ich aber mit den Dingen sehr bekannt bin, finde ich immer gleich, wo der Fehler steckt. Eigentlich haben wir noch keine Definition von einer geraden Linie, sondern nur Ausdrückungen des klaren Begriffs von ihr, den uns die Sinne geben." Und im 82. Bande der „Allgemeinen „Deutschen Bibliothek, S. 157 schließt Kaestner eine Rezension von Gensichen J. F., Bestätigung der Schulzeschen Theorie der Parallelen und Widerlegung der Bendavidschen Abhandlung über die Parallelen, Königsberg, 8°, 1786 in gleichem Sinne mit den Worten: „Möchten doch die Paralleltheoristen eine jetzige Plage den Geometern, wie die Cirkelquadrierer waren, erst geometrische Deutlichkeit und Evidenz durch fleissiges Studieren Euklids recht kennen lernen, ehe sie ergänzen wollen, was Euklid nicht zu ergänzen wusste."

Zwischen Kaestner und Lambert mitten drinnen steht L. Fr. Meister.[1]) Er sagt in der Besprechung von Johann Bern-

[1]) Albrecht Ludwig Friedrich Meister (1724—1788), war seit Tob. Mayers Tode und Lowitzs Fortgang 1764 Professor der angewandten Mathematik zu Göttingen. In der Abhandlung: de genesi et affectationibus figurarum planarum Novi Com. soc. reg. Gott. 1 (s. 770), welche sogar Gauß' Aufmerksamkeit erregte, hat er zum erstenmale systematisch den Gedanken durchgeführt, den Flächeninhalt von Figuren je nach dem Umlaufsinn der Kontur positiv oder negativ zu rechnen. Außerdem

hard Basedows bewiesenen Grundsätzen der reinen Mathematik: (A. D. B. 25. Bd. S. 518): „Dass zwei Triangel (oder jede andere Figuren) sich decken, wenn ihre Figuren (so nennet der Herr Verfasser ihre Gränzen) sich decken, wird hier, so wie auch von andern blos angenommen, nicht bewiesen. Es sollte aber billig geschehen, da es bei unebenen Figuren wahr oder falsch seyn kann, bei ebenen aber immer wahr ist." Ferner zu S. 23: „Denn daraus, dass in einem Dreyeck mit einem rechten Winkel die gegenüberliegende Seite grösser ist als die andern, folget gar nicht, dass kein Dreyeck zween rechte Winkel haben könnte, und dass sonst von zweyen Seiten jede die grösste unter allen Dreyen seyn müsste. In einem sphärischen Dreyeck mit einem rechten und zween spitzigen Winkeln, ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite grösser als jede der beyden andern: in einem sphärischen Dreyeck mit zween rechten und einem spitzigen Winkel ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite nicht grösser als jede der beyden andern. Hierin liegt aber kein Widerspruch, aus dem sich die Unmöglichkeit zweyer rechten Winkel in einem Dreyecke dartun liesse. Der Bürgermeister ist der Vornehmste im Rath, aber können des wegen nicht zween Bürgermeister sein, weil sonst jeder der Vornehmste seyn müsste" und zu S. 26: „Mit dem Lehrsatz von den Parallelen ist der Herr Verfasser sehr bald fertig; sie nähern sich niemals, weil sie sonst endlich zusammenlaufen müssten, als wenn es keine Linien gäbe, die sich ohne Ende näherten! Daher ist jeder Punkt der einen soweit von der andern entfernt, als jeder Punkt der andern von dieser. (Wahr! aber keine Folge des Vorhergehenden.)" (Sp.=Meister aus Göttingen nach Parthey.)

hat Meister noch viele wertvolle Arbeiten in den Comment. der Societät publizirt und 25 Jahre mit großem Erfolg neben Kaestner dozirt. Vergl. C. H. Müller, Studien zur Geschichte der Mathematik in Göttingen. Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, begründet von M. Cantor, XVII. Heft, Leipzig 1903, S. 51—143. Siehe auch Günther, Verm. Unters. z. Gesch. d. math. Wissensch., Leipzig 1876, Kap. I.

Diese noch nicht wieder ins Licht gerückten Auslassungen dreier hervorragender Denker einer großen, erkenntnistheoretisch eminent interessierten Epoche führen uns mitten hinein in das Ringen um den Begriff der geraden Linie und das große Problem der Raumauffassung, das sich nach Leibniz' Zeugnis (Nouveaux Essais Lib. IV ch. 12 p. 418, Raspes Ausgabe von 1765) herleitet aus dem klassischen Altertum: „Archimed setze voraus, die gerade Linie, von der er redet, sei eben dieselbe, von der Euklids Grundsätze reden", bis es in der Schöpfung der Nichteuklidischen Geometrie Beruhigung und Klärung fand.

Eine Eigenschaft der C. Neumannschen Konfigurationskonstante.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Dezember 1914.

Bei der Untersuchung der Konvergenz seiner für die Lösung der ersten (Dirichletschen) Randwertaufgabe der Potentialtheorie aufgestellten Reihen hat C. Neumann die Konfigurationskonstante λ eingeführt[1]). Sollen nämlich jene Reihen konvergieren, so muß die Begrenzungs- oder Randkurve (s) des ebenen Gebietes bzw. die Begrenzungs- oder Randfläche (S) des Raumgebietes, für das die Randwertaufgabe gelöst, d. h. die im Innern des Gebietes der Laplaceschen Differentialgleichung genügende und zugleich auf dem Rand vorgeschriebene Werte besitzende Funktion bestimmt werden soll, so muß die Konfigurationskonstante λ der Berandung kleiner als Eins sein.

Dabei ist

$$\lambda = 1 - \frac{\mu}{2h\pi}\begin{pmatrix} h = 1 \text{ für das ebene Problem} \\ h = 2 \text{ für das räumliche Problem} \end{pmatrix}$$

und

$$\mu = \operatorname{Min}(J_1^{\mathrm{I}} + J_2^{\mathrm{II}}),$$

und es sind unter J_1^{I} und J_2^{II} die scheinbaren Größen zu verstehen, d. h. die Sehwinkel (im Raum durch Kegelöffnungen dargestellt), unter denen das Stück $s_{\mathrm{I}}(S_{\mathrm{I}})$ der Berandung vom

[1]) Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential (Leipzig 1877), S. 172.

Randpunkt P_1 und das Reststück $s_{II}(S_{II})$ der Berandung vom Randpunkt P_2 aus erscheint. Die Erklärung verlangt, man soll P_1 und P_2 sowie die Einteilung des Randes so wählen, daß μ möglichst klein wird.

Später hat u. a. E. R. Neumann bewiesen, daß in der Ebene die Konfigurationskonstante λ der Berandung (Randkurve) sich bei Inversion (Transformation durch reziproke Radien) nicht ändert[1]) und damit gezeigt, daß die Methoden von C. Neumann auch noch auf ebene Gebiete anwendbar sind, deren Randkurve nicht überall konvex ist. Was dagegen die Konfigurationskonstante einer geschlossenen Fläche betrifft, so spricht er die Vermutung aus, daß in diesem Fall ein entsprechender Satz nicht mehr gilt, fügt aber hinzu, daß diese Frage noch nicht endgültig beantwortet sei und begründet „inwiefern diese Untersuchungen im Raum weit größere Schwierigkeiten darbieten“[2]).

Im folgenden wird nun der Beweis für diese Vermutung erbracht, d. h. es wird gezeigt:

Die Konfigurationskonstante λ' jeder aus einer geschlossenen Fläche (S) mit der Konfigurationskonstanten λ durch Inversion entstehenden Fläche (S') ist im allgemeinen von λ verschieden.

Eine Ausnahme von diesem Satz bildet, weil alle zueinander ähnlichen Flächen dasselbe λ haben, selbstverständlich die Kugel, die einzige Fläche übrigens, deren Konfigurationskonstante bekannt ist[3]).

Es genügt für den Beweis des Satzes, irgend ein Paar von Flächen anzugeben, die auseinander durch Inversion hervorgehen und deren Konfigurationskonstanten λ und λ' verschiedene Werte haben. Dem stellt sich aber ein Hindernis entgegen. So leicht es nämlich ist, für eine einfach gestaltete Fläche das gesuchte Minimum μ anzugeben, so schwer fällt jeder Versuch, in aller Strenge den Beweis zu erbringen, daß das unmittel-

[1]) Math. Annalen 55 (Leipzig 1902), S. 45 ff.
[2]) A. a. O., S. 52. [3]) A. a. O., S. 39.

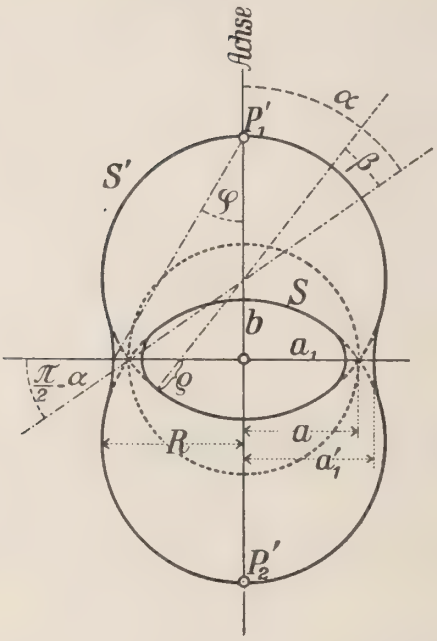
bar durch die Anschauung gefundene Punktepaar $P_1 P_2$ mit der zugehörigen Gebietsteilung S_{I}, S_{II} der Randfläche nun auch wirklich das Minimum μ liefert. So unterliegt es z. B. keinem Zweifel, daß man beim dreiachsigen Ellipsoid[1]) für P_1 und P_2 die Endpunkte der größten Achse zu wählen hat und als Grenze zwischen S_{I} und S_{II} den zur größten Achse senkrechten Hauptschnitt, wobei sich dann μ als Summe der Öffnungen der beiden Kegel ergibt, welche jenen Hauptschnitt enthalten und P_1 und P_2 als Spitzen. Aber schon der Versuch eines Nachweises, daß auf diese Weise auch nur ein relatives Minimum gewonnen wird, stößt auf große rechnerische Schwierigkeiten.

Man kann aber einen anderen Weg einschlagen, indem man nämlich für eine geeignet gewählte Fläche (S) eine untere Schranke (m) von $J_1^{\mathrm{I}} + J_2^{\mathrm{II}}$ und damit auch von μ angibt, für die durch richtig gewählte Inversion daraus abgeleitete Fläche aber eine obere Grenze oder Schranke (M') für das Minimum μ'. Ergibt sich, daß m größer als M' ist, so sind μ und μ' und damit λ und λ' sicher verschieden.

Dieses Verfahren können wir in der Tat durchführen, und zwar nehmen wir als Fläche S die Berandung des linsenförmigen konvexen Rotationskörpers, welche die Figur im Meridianschnitt darstellt. Diese Fläche besteht aus zwei Kugelhauben, welche durch die Zone einer Ringfläche verbunden sind, und hat als Symmetrieebene noch die Ebene des Schnittkreises der beiden kongruenten Kugeln, denen die Hauben angehören.

Diese Linsenfläche hat drei wesentliche Konstanten, nämlich den Radius a des Schnittkreises der Kugeln, die Länge $2b$ der Achse und den Radius ϱ des Meridiankreises der Ringfläche. Führt man statt b und ϱ die in der Figur angegebenen

[1]) A. a. O., S. 31—34 wird die Konfigurationskonstante der Ellipse bestimmt. Man erhält sie, indem man für P_1 und P_2 die Endpunkte der großen Achse nimmt und P_1 und P_2 mit den Endpunkten der kleinen Achse verbindet.



Winkel α und β ein, so ergeben sich, wenn noch der Radius der Kugeln mit R bezeichnet wird, die Zusammenhänge:

$$R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$b = a \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$$

$$R - b = a \cot \alpha$$

$$\varrho = R - \frac{R-b}{\cos(\alpha-\beta)} = a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cot\alpha}{\cos(\alpha-\beta)}\right).$$

Ist β gleich Null, so wird auch ϱ zu Null und aus der Linsenfläche wird die erweiterte (scharfrandige) Linsenfläche, die nur mehr aus zwei erweiterten Kugelhauben besteht.

Wir suchen nunmehr die verlangte untere Schranke m und stellen zuvor fest:

1. Die scheinbare Größe

$$dJ = dS\frac{\cos(n, r)}{r^2}$$

des Flächenelementes dS, gesehen von einem Randpunkt P aus, der den Abstand r von dS hat, ist bei einer konvexen Fläche immer positiv. Demnach verkleinern wir die Summe $J_1^{\mathrm{I}} + J_2^{\mathrm{II}}$ sicher, wenn wir bei der Schätzung dieser Summe für die Linsenfläche die Ringzone fortlassen.

2. Beschreibt man um dS als Mittelpunkt eine Kugel, so ist die scheinbare Größe dJ des Elementes, gesehen von einem Punkt der Kugel aus, um so kleiner, je kleiner der Abstand des Punktes von der Ebene des Elementes ist.

3. Die scheinbare Größe dJ des Elementes dS, gesehen von einem Punkte einer Kugel aus, die das Element enthält, ist um so kleiner, je weiter der Punkt von dS entfernt ist. Ist nämlich R der Radius der Kugel,

$$r = 2R\sin\varphi$$

der Abstand des Punktes P von dS, so wird

$$dJ = \frac{dS}{r^2}\cos(n, r) = \frac{dS\cdot\sin\varphi}{4R^2\sin^2\varphi} = \frac{dS}{4R^2\sin\varphi},$$

nimmt also ab, wenn φ wächst und erreicht sein Minimum für den Gegenpunkt $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ des Elementes dS.

Dies alles ist bei der Abschätzung zu berücksichtigen. Wir setzen fest, daß α kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. dJ wird dann wegen (2) verkleinert, wenn man statt P, falls dieser Punkt nicht auf derselben Kugelhaube liegt wie dS, einen Punkt Q nimmt, der auf derselben Kugelhaube oder ihrer Erweiterung liegt. Die Erweiterung kommt dann in Betracht, wenn P der Ringzone angehört. Nach (3) verkleinert man dJ weiter, wenn

man statt dS und Q ein Element und einen Punkt nimmt, die auf dieser Kugelhaube liegen, aber weiter voneinander entfernt sind, als dies für die betrachtete Fläche eintreten kann.

Demnach ist für P und dS, wenn P irgend ein Punkt der betrachteten Fläche und dS ein Element einer der beiden Kugelhauben ist, welche der Fläche angehören,

$$dJ > \frac{dS \sin \alpha}{4a^2}.$$

Jede der beiden Kugelhauben hat den Flächeninhalt

$$2\pi \cdot R^2(1 - \cos(\alpha - \beta)) = 2\pi \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}(1 - \cos(\alpha - \beta)).$$

Mit Rücksicht auf (1) folgt hieraus

$$J_1^{\mathrm{I}} + J_2^{\mathrm{II}} > \frac{4\pi a^2(1 - \cos(\alpha - \beta))}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{4a^2}$$

oder

$$\mu > \frac{\pi(1 - \cos(\alpha - \beta))}{\sin \alpha} = m(\alpha, \beta). \tag{I}$$

Wir betrachten jetzt die durch Inversion aus der Linsenfläche (S) abgeleitete Fläche (S'), wobei als Inversionszentrum der Mittelpunkt der Linsenfläche, als Inversionsradius a dient. S' besteht dann aus zwei Kugelhauben, die den schon beim Aufbau von S verwendeten Kugeln angehören, und dazu kommt eine konkave Ringzone. Für P_1' und P_2' werden die Endpunkte der Achse von S gewählt, als Trennungslinie zwischen S_{I}' und S_{II}' der Kehlkreis.

Der Radius des Kehlkreises ist bestimmt durch

$$a_1' = \frac{a^2}{a_1},$$

und es ist

$$\begin{aligned} a_1 &= \varrho + (R - b)\operatorname{tang}(\alpha - \beta) \\ &= a\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cot\alpha}{\cos(\alpha-\beta)} + \cot\alpha\operatorname{tang}(\alpha-\beta)\right) \\ &= a\left(1 - \frac{\sin\beta + \cos\alpha - \cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}\right) \\ &= a\left(1 - \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}(1-\sin\alpha) + \sin\frac{\beta}{2}\cos\alpha\right)}{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}\right). \end{aligned}$$

Nimmt man β hinreichend klein an, so ergibt sich

$$a_1 > a(1 - \beta k), \quad k = \frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Es wird also

$$a_1' < \frac{a}{1-\beta k}$$

und für den halben Öffnungswinkel φ (s. Figur) ergibt sich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{a_1'\cdot b}{a^2} < \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{1-\beta k},$$

also

$$\cos\varphi > \frac{\cos\frac{\alpha}{2}(1-\beta k)}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\alpha}{2}(-2\beta k + \beta^2 k^2)}} > \cos\frac{\alpha}{2}(1-\beta k)$$

und demnach

$$(J_1^{\mathrm{I}})' + (J_2^{\mathrm{II}})' = 4\pi(1-\cos\varphi)$$

und

$$\text{(II)} \qquad \mu' < 4\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2} + \beta k\right) = M'(\alpha, \beta).$$

Vergleichen wir jetzt die Werte m und M', so erhalten wir für $\beta = 0$

$$m(\alpha, 0) = \pi\left(\frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \pi \cdot \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$$

$$M'(\alpha, 0) = 4\pi\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nimmt man jetzt für α einen hinreichend kleinen Winkel $\left(\text{z. B. } \alpha = \frac{\pi}{3}\right)$, so wird:

$$m(\alpha, 0) > M'(\alpha, 0)$$

und es kann nachträglich β so klein gewählt werden, daß auch

$$m(\alpha, \beta) > M'(\alpha, \beta)$$

wird, also

$$\mu > \mu' \quad \text{und} \quad \lambda < \lambda'.$$

Die untersuchten Flächen haben also bei geeigneter Wahl von β sicher voneinander verschiedene Konfigurationskonstanten, was bewiesen werden sollte.

Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Dezember 1914.

Einleitung.

Stellung der Aufgabe und Gang der Lösung.

Die Bewegung paralleler geradliniger Wirbelfäden, die unendlich kleinen Querschnitt haben und in endlicher oder auch unendlicher Anzahl in einer Flüssigkeit vorhanden sind, ist von Helmholtz[1]) untersucht worden; später hat Kirchhoff[2]) die Helmholtzsche Untersuchung in eine sehr elegante Form gebracht und einige Integrale der Bewegungsgleichungen angegeben, die zur vollständigen Beschreibung der ganzen Bewegung hinreichen, wenn die Anzahl der Wirbelfäden nicht größer als drei ist.

Ein Wirbelfaden, oder wie wir unter ausschließlicher Betrachtung einer Ebene der ebenen Strömung sagen wollen, ein Wirbelpunkt bringt eine Potentialbewegung der umgebenden Flüssigkeit hervor. Sind noch weitere Wirbelpunkte vorhanden, so werden sie sich in dieser Potentialströmung bewegen, soferne man sie nicht in besonderer Weise festlegt. Physikalisch

[1]) Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55, 1858, S. 46.

[2]) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, S. 255 u. f.

geschieht dies dadurch, daß man die Wirbelbewegung durch eine Zirkulation um einen festen kleinen Körper ersetzt, das wirbelnde Flüssigkeitselement also gar nicht existieren läßt; analytisch dadurch, daß man den Wirbelpunkt als singuläre Stelle des Integrals der Potentialgleichung durch einen kleinen Kreis aus der komplexen Ebene ausschließt.

Im folgenden sind alle Wirbelpunkte beweglich. Jedes nicht wirbelnde Flüssigkeitselement bewegt sich also unter dem Einfluß des Geschwindigkeitspotentials sämtlicher Wirbelpunkte; ein Wirbelpunkt selbst aber unter dem Einfluß des Geschwindigkeitspotentials der übrigen Wirbelpunkte; denn jeder Wirbelpunkt bringt an der Stelle, wo er sich selbst befindet, zwar eine drehende, aber keine fortschreitende Bewegung hervor, obwohl letztere in unmittelbarer Nähe sogar unendlich groß wird [1]).

Helmholtz und Kirchhoff setzen voraus, daß die Wirbelbewegung in der unendlich ausgedehnten, einfachen und einfach zusammenhängenden Ebene stattfindet und daß die Flüssigkeit, von der Wirbelbewegung abgesehen, in Ruhe ist; die gesamte Strömung soll also quellenfrei, im Unendlichen in Ruhe, und außer an einzelnen Stellen auch wirbelfrei sein; die ganze Bewegung wird dann durch das von diesen Wirbelstellen bewirkte zyklische Potential geleitet.

Die von Helmholtz und Kirchhoff angenommenen Beschränkungen zu beseitigen und Beispiele für allgemeinere Bewegungen einzelner Wirbelpunkte zu geben, ist der Zweck dieser Untersuchung.

Zunächst wird angenommen, daß außer dem durch die beweglichen Wirbel hervorgebrachten Geschwindigkeitspotential noch ein weiteres additiv hinzutretendes Geschwindigkeitspotential existiert. Dieses kann stationär oder mit der Zeit veränderlich sein. Es kann sehr wohl durch im Endlichen liegende Wirbel [2]) oder Quellen hervorgerufen sein, die dann

[1]) Kirchhoff, Mechanik, S. 258.

[2]) Auch die Wirbelstärke mit der Zeit zu verändern ist unzulässig.

als fast angenommen werden müssen und aus der komplexen Ebene auszuschließen sind[1]). Bewegung im Unendlichen ist zulässig. Zweitens soll es möglich sein, daß Bewegung der Wirbel im Innern oder Äußern eines endlichen geschlossenen Gebietes vor sich geht, dessen Grenzen von der Flüssigkeit nicht überschritten werden dürfen. Wenn die Wirbel nach Lage, Stärke, Drehsinn gewisse Symmetriebedingungen erfüllen, bildet sich eine Stromlinie aus, die während der Bewegung ihre Gestalt nicht ändert und als feste Grenze genommen werden kann. Derartige Fälle, von denen das Wirbelpaar das wichtigste ist, sind von Helmholtz u. a. behandelt worden[2]). Im allgemeinen werden indessen die eingeschlossenen Wirbel zusammen mit dem gegebenen Geschwindigkeitspotential, das im Bereiche auch feste Singularitäten haben kann, eine Strömung hervorbringen, die den Rand des Bereiches überschreitet. Soll das vermieden werden, so muß noch eine weitere Potentialströmung hinzugefügt werden, die im Innern bzw. Äußern des Bereiches singularitätenfrei ist und deren Normalgeschwindigkeit am Rande des Bereiches der Normalgeschwindigkeit der vorhandenen Strömung entgegengesetzt gleich ist. Um diese Zusatzströmung zu finden, muß eine Randwertaufgabe gelöst werden; die Lösung ist für das Innere eines Bereiches eindeutig, für das Äußere tritt noch eine Zirkulation hinzu, die eine willkürliche Konstante hereinbringt[3]). Mit der Auffindung dieses Zusatzpotentials ist die zweite Erweiterung der Helmholtzschen Aufgabe auf die erste zurückgeführt.

[1]) Quellen sind ebenso wie Wirbel in der Strömung beweglich, wenn man die Quellpunkte nicht aus der komplexen Ebene ausschließt. In den in der Natur auftretenden Flüssigkeitsströmungen kommen indessen bewegliche Quellen, zum Unterschied von beweglichen Wirbeln, kaum vor.

[2]) Helmholtz, l. c., S. 48. — Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik S. 263 u. f.

[3]) Vgl. Kutta, Über eine mit den Grundlagen des Flugproblems in Beziehung stehende zweidimensionale Strömung. — Literatur: Mathematische Enkyzlopädie II, A. 7b. Burkhardt und Meyer, Potentialtheorie 17, S. 486 u. f.

Man wird im allgemeinen nicht mit Sicherheit erwarten können, daß das Zusatzpotential einwertig ist. Um uns von Strömungen, die durch mehrwertige Potentiale geleitet werden, ein Bild zu machen, bedienen wir uns Riemannscher Flächen[1]). Mit ihrer Hilfe läßt sich eine dritte Erweiterung der Helmholtz-Kirchhoffschen Aufgabe behandeln. Man kann verlangen, daß die Wirbel und die ganze Strömung sich zwar in der unendlichen Ebene bewegen können, daß aber gewisse Linien dabei nicht überschritten werden dürfen. Man kann kurz von der Strömung um ein Hindernis sprechen. In diesem Fall kann man die Ebene zu einer Riemannschen Fläche erweitern, indem man längs der Linien, welche von der Flüssigkeit nicht überschritten werden dürfen, ein zweites Blatt anheftet. In der so entstandenen Riemannschen Fläche ist nun die Randwertaufgabe zu lösen. Ob allerdings die zweiblätterige Fläche genügt oder ob eine höhere Riemannsche Fläche verwendet werden muß, um die Zusatzfunktion zu einer eindeutigen Funktion des Ortes zu machen, wird im voraus nicht immer mit Sicherheit zu entscheiden sein. Von Wichtigkeit ist noch, daß während in der Ebene alle einzelnen Wirbel von gleicher Art sind und sich nur durch 3 Konstante unterscheiden, in einer Riemannschen Fläche mit der Erweiterung des Bereiches der einwertigen Funktionen auch Wirbel besonderer Art möglich sind, neben den Wirbeln der schlichten Ebene.

Die folgenden Beispiele sind so gewählt, daß die eigentliche Lösung der Randwertaufgabe durch Anwendung des Spiegelungsprinzipes zu vermeiden ist. Außer der Bewegung eines Wirbels in einem von zwei Parallelen begrenzten Kanal ist vor allem die Bewegung eines Wirbelspaares in einer zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit zwei Verzweigungspunkten untersucht; sie führt auf die Bewegung eines Wirbels um ein geradliniges Hindernis von endlicher oder unendlicher Aus-

[1]) Es darf nicht übersehen werden, daß auch die Wirbelpunkte selbst wenigstens für das Potential, nicht für die Geschwindigkeit, Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung sind, die hier außer acht gelassen werden.

dehnung; über die sonstige Bewegung der Flüssigkeit sind mehrere Annahmen zulässig, für die das Problem der Behandlung zugänglich ist.

Bewegung einzelner Wirbel in der einfachen Ebene.

Allgemeine Sätze.

Die Geschwindigkeit, die ein Wirbelpunkt a, b in einem beliebigen Aufpunkt der unendlich ausgedehnten Ebene hervorbringt, hat die Komponenten

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{vx},$$

wenn die „Stromfunktion“

$$\psi = -\mu \lg r = -\mu \lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\ ^{1})$$

ist. Dabei ist μ eine Konstante, die als Wirbelstärke bezeichnet werden soll. ψ ist der imaginäre Teil einer Funktion w der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$; es ist nämlich, wenn noch $c = a + ib$ gesetzt wird:

$$w = -i\mu \lg (z - c) = -i\mu \lg ((x-a) + i(y-b))$$
$$= \mu \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a} - i\mu \lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Setzt man also $w = \varphi + i\psi$, so wird

$\varphi = \mu \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-a}$ das Geschwindigkeitspotential

1) $\psi = -\mu \lg \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ die Stromfunktion

$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg ((x-a) + i(y-b))$ das komplexe Potential

[1]) Kirchhoff, Mechanik, S. 298. Kirchhoff benutzt durchgehends diese Stromfunktion. Wegen der später hinzutretenden Potentialbewegung ist hier, um die beiden Summanden nicht verschieden behandeln zu müssen, das Potential stärker betont.

der durch den Wirbelpunkt erzeugten Flüssigkeitsbewegung: die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$2) \qquad \frac{dx}{dt} = u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\mu \frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

Die Größe der Geschwindigkeit ist

$$\frac{\mu}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{\mu}{r}.$$

Ihre Richtung ist durch

$$\frac{v}{u} = -\frac{x-a}{y-b} = \frac{dy}{dx}; \quad (x-a)dx + (y-b)dy = 0$$

gegeben. Die Stromlinien sind Kreise um a, b, die im positiven Sinn (gegen den Uhrzeiger) durchflossen werden, wenn μ eine positive Zahl ist.

Bemerkenswert ist noch die Beziehung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv.$$

Sind n Wirbelpunkte mit den Wirbelstärken μ_k ($k = 1, 2 \ldots n$) an den Stellen a_k, b_k vorhanden und tritt zu der durch sie bewirkten Bewegung noch eine Strömung mit dem Potential Φ und der Stromfunktion Ψ, so ist das komplexe Potential der ganzen Bewegung

$$3) \qquad \Phi + i\Psi - i\sum_1^n{}_k \mu_k \lg((x-a_k) + i(y-b_k))$$

also das Geschwindigkeitspotential

$$3a) \qquad \Phi + \sum_1^n{}_k \mu_k \operatorname{arctg} \frac{y-b_k}{x-a_k}$$

und die Stromfunktion

$$3b) \qquad \Psi - \sum_1^n{}_k \mu_k \lg \sqrt{(x-a_k)^2+(y-b_k)^2}.$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich

$$4) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \sum_1^n{}^k \mu_k \frac{y - b_k}{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2} \\ v &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \sum_1^n{}^k \mu_k \frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2}. \end{aligned}$$

Setzt man in (4) an Stelle eines beliebigen Aufpunktes x, y die Koordinaten eines Wirbelpunktes a_i, b_i ein, so erhält man

$$5) \qquad \begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} - \sum_1^n{}^{k\prime} \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2} \\ \frac{db_i}{dt} &= \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} + \sum_1^n{}^{k\prime} \mu_k \frac{a_i - a_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}. \end{aligned}$$

Weil ein Wirbelpunkt an der Stelle, wo er sich selbst befindet, keine Komponenten der Fortschreitungsgeschwindigkeit hervorbringt, ist der Wert $k = i$ aus der Summation auszuschließen, was durch den Strich (′) am Summenzeichen angedeutet werden soll. Die $2n$ Gleichungen (5) mit den $2n + 1$ Veränderlichen a_k, b_k, t bestimmen die Wirbelbahnen und den zeitlichen Verlauf der Bewegung der Wirbelpunkte. Setzt man die aus (5) als Funktionen von t berechneten Größen a_k, b_k in (3) bzw. (4) ein, so bestimmen diese Gleichungen den Verlauf der ganzen Flüssigkeitsbewegung.

Helmholtz definiert durch die Gleichungen

$$6) \qquad x_0 = \frac{\sum_1^n{}^i \mu_i a_i}{\sum_1^n{}^i \mu_i}; \quad y_0 = \frac{\sum_1^n{}^i \mu_i b_i}{\sum_1^n{}^i \mu_i}$$

den Schwerpunkt eines Wirbelsystems: unter den von Helmholtz gemachten Voraussetzungen ändert er seine Lage nicht.

Wir erhalten

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \frac{da_i}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}$$

$$- \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \sum_1^n{}^k{}' \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}.$$

Die auf der rechten Seite auftretende Doppelsumme

$$\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k{}' \mu_i \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$

ist identisch Null, weil jede Differenz $b_i - b_k$ zweimal mit verschiedenen Zeichen auftritt. Folglich ist

7) $$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}.$$

ebenso

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}.$$

Der Schwerpunkt bewegt sich in jedem Moment so, als ob den Wirbelstärken gleiche Massen in der Potentialströmung Φ verteilt wären, die Wirbelbewegung selbst aber gar nicht existierte.

Ein einzelner Wirbel, der sein eigener Schwerpunkt ist, bewegt sich nach

$$\frac{da}{dt} = \frac{dx_0}{dt} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{dy_0}{dt} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

auf einer Stromlinie der Potentialströmung mit der Geschwindigkeit, die die Strömung an dieser Stelle hätte, wenn sie nicht durch den Wirbel gestört wäre; die Bewegung aller

anderen Flüssigkeitsteilchen wird durch den Wirbel verändert. Man kann häufig in fließendem Wasser beobachten, daß ein einzelner Wirbel geradlinig in Richtung der Strömung fortschreitet, während rings um ihn das Wasser eine kreisende Bewegung hat.

Ist Φ eine lineare Funktion

$$\Phi = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

so ist die Geschwindigkeit der ursprünglichen Strömung an allen Stellen parallel und gleich groß;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = c_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = c_2.$$

Der Schwerpunkt eines Wirbelsystems, das sich in der Flüssigkeit befindet, schreitet nach (7) mit der gleichen Geschwindigkeit

$$\frac{dx_0}{dt} = c_1, \quad \frac{dy_0}{dt} = c_2$$

in der Strömung fort. Die Geschwindigkeit der einzelnen Wirbel des Systems wird nach (5)

$$\frac{da_i}{dt} = c_1 - \sum_1^{n\,\prime k} \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$
$$\frac{db_i}{dt} = c_2 + \sum_1^{n\,\prime k} \mu_k \frac{a_i - a_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}.$$

Die Relativbewegung des ganzen Wirbelsystems wird also durch die Strömung nicht geändert: das System schreitet als Ganzes mit der Geschwindigkeit der Strömung gleichmäßig fort. Auch dieser Satz läßt sich durch Beobachtungen stützen. Man kann oft in fließendem Wasser Systeme von 2 (oder mehreren) Wirbeln sehen, die längere Zeit gerade so umeinander rotieren, wie sie es der Theorie [1]) nach in stehendem Wasser tun müßten, während

[1]) Vgl. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, S. 263; Kirchhoff, Mechanik, S. 260.

gleichzeitig das ganze System ohne nennenswerte Formänderung mit der Strömung geradlinig fortschreitet.

Man kann fragen, ob es noch andere Strömungen gibt, in denen der Schwerpunkt eines Wirbelsystems auf einer Stromlinie mit der durch das Geschwindigkeitspotential bestimmten Geschwindigkeit fortschreitet. Dann muß nach (7)

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

$$\frac{dy_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i \mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

sein, also muß sowohl $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ als $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ eine lineare Funktion in x und y, folglich Φ vom 2. Grad sein. Außerdem muß Φ der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

genügen. So ergibt sich

$$\Phi = x^2 - y^2 + 2c_{12}xy + 2c_1x + 2c_2y$$

(bis auf eine additive und eine multiplikative Konstante). Die zugehörige Stromfunktion ist

$$\Psi = c_{12}(y^2 - x^2) + 2xy - 2c_2x + 2c_1y.$$

Dann ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2(x + c_{12}y + c_1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2(c_{12}x - y + c_2).$$

Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts wird nach (7)

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{1}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i 2\mu_i [x + c_{12} y + c_1]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}$$

$$= \frac{2}{\sum_1^n{}^i \mu_i} \sum_1^n{}^i [\mu_i a_i + c_{12} \mu_i b_i + c_1 \mu_i]$$

$$\frac{dx_0}{dt} = 2x_0 + 2c_{12} y_0 + 2c_1 = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Ebenso wird

$$\frac{dy_0}{dt} = 2c_{12} x_0 - 2y_0 + 2c_2 = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}.$$

Die Strömung selbst ist wohlbekannt [1]); die Flüssigkeit bewegt sich auf gleichseitigen Hyperbeln, mit gemeinsamen Asymptoten; die Potentialkurven sind ebenfalls gleichseitige Hyperbeln, die aus den Stromlinien durch Drehung um 45^0 erhalten werden. Die Strömung kann als Flüssigkeitsbewegung im Raum eines rechten Winkels betrachtet werden. Der Schwerpunkt eines Wirbelsystems in dieser Strömung beschreibt also eine gleichseitige Hyperbel; dabei werden sämtliche Stromlinien, auch die Asymptoten, deformiert. Die Randwertaufgabe der Bewegung eines Wirbelsystems im Raum eines rechten Winkels ist also damit nicht gelöst [2]).

Von den Differentialgleichungen der Wirbelbahnen (5) läßt sich stets ein Integral finden, das mit einem der von Kirchhoff angegebenen Integrale verwandt ist, wenn die überlagerte Potentialströmung stationär ist.

---

[1]) Lamb, Hydrodynamik, S. 86.

[2]) Die Bewegung eines Wirbels in einem Rechten-Winkelraum unter der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit sonst in Ruhe ist, ist übrigens bekannt. Lamb, S. 266 u. 267. Demnach bietet es auch keine Schwierigkeiten, wenigstens die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Wirbels aufzustellen, der sich in einer Hyperbelströmung innerhalb eines rechten Winkels befindet.

Setzt man

$$Q = \sum_1^{n\,i} \mu_i [\Psi]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \sum_1^{n\,i} \mu_i \Psi_i$$

so ist

$$\frac{\partial Q}{\partial a_i} = \mu_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial a_i} = \mu_i \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = -\mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_i} = \mu_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial b_i} = \mu_i \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} = \mu_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}}.$$

Setzt man ferner

$$P = -\sum_1^{n\,i} \sum_1^{n\,k}{}' \mu_i \mu_k \lg \sqrt{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$

so ist

$$\frac{\partial P}{\partial a_i} = -\mu_i \sum_1^{n\,k}{}' \mu_k \frac{a_i - a_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial b_i} = -\mu_i \sum_1^{n\,k}{}' \mu_k \frac{b_i - b_k}{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2}.$$

Dann gehen die Gleichungen (5) über in

$$\mu_i \frac{da_i}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial b_i} + \frac{\partial P}{\partial b_i}$$

$$\mu_i \frac{db_i}{dt} = -\frac{\partial Q}{\partial a_i} - \frac{\partial P}{\partial a_i}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial (P+Q)}{\partial a_i} da_i + \frac{\partial (P+Q)}{\partial b_i} db_i = 0,$$

also auch

$$\sum_1^{n\,i} \frac{\partial (P+Q)}{\partial a_i} da_i + \sum_1^{n\,i} \frac{\partial (P+Q)}{\partial b_i} db_i = 0.$$

Dieser Ausdruck ist ein vollständiges Differential; also ist

8) $$P + Q = \text{const.} \quad \text{oder}$$

$$\sum_1^n{}^{i} \mu_i [\Psi]_{\substack{x=a_i \\ y=b_i}} - \sum_1^n{}^{i} \sum_1^n{}^{k\prime} \mu_i \mu_k \lg \sqrt{(a_i - a_k)^2 + (b_i - b_k)^2} = \text{const.}$$

ein Integral der Differentialgleichungen der Wirbelbahnen.

Es muß noch bemerkt werden, daß ein System von Wirbelpunkten, das in einem Moment symmetrisch ist, immer symmetrisch bleibt, weil die symmetrische Lage auch symmetrische Geschwindigkeiten zur Folge hat. Hieran ändert sich auch nichts, wenn dem Wirbelsystem eine weitere wirbelfreie Strömung mit gleicher Symmetrieachse überlagert ist.

Die Gleichung (8) wenden wir auf die Bewegung eines Wirbelpaares an, das sich in einer zur X Achse symmetrischen stationären Strömung bewegt. Es sei

$$a_1 = a_2 = a; \quad b_1 = -b_2 = b$$

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}} = \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}}; \quad \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = -\left[\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}.$$

Also ist bis auf eine willkürliche additive Konstante

$$[\Psi]_{\substack{x=a \\ y=b}} = -[\Psi]_{\substack{x=a \\ y=-b}}$$

oder einfacher

$$\Psi(a, b) = -\Psi(a, -b).$$

Setzt man

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = -1,$$

so wird aus (8)

$$\Psi(a, b) - \Psi(a, -b) + \lg 2b = \text{const.}$$

oder

9) $$2\Psi(a, b) + \lg b = \text{const.}$$

Das ist die Gleichung der Wirbelbahn in der positiven Halbebene in endlicher Form. Damit ist die Bahn eines einzelnen Wirbels gefunden, der sich in einer be-

liebigen durch eine feste Wand begrenzten stationären Strömung bewegt. Die Untersuchung des zeitlichen Verlaufs erfordert eine Elimination und eine Quadratur.

Es seien weiter in einer symmetrischen Strömung mit dem komplexen Potential

$$W = \Phi + i\Psi$$

zwei symmetrische Wirbel mit den komplexen Potentialen

$$w_1 = \varphi_1 + i\psi_1 \quad \text{und} \quad w_2 = \varphi_2 + i\psi_2$$

an den Stellen a, b und $a, -b$ vorhanden.

Dann ist

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}; \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}$$

$$\left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}; \quad \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = -\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}.$$

Der untere Wirbel bewegt sich im Strömungsfeld des Potentials und des oberen Wirbels; also ist

$$\frac{da}{dt} = \left[\frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial x}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}; \quad -\frac{db}{dt} = \left[\frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{d(W + w_1)}{dz} = \frac{\partial(W + w_1)}{\partial x} = \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial x} + i\frac{\partial(\Psi + \psi_1)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial x} - i\frac{\partial(\Phi + \varphi_1)}{\partial y}.$$

Also

$$\left[\frac{d(W + w_1)}{dz}\right]_{\substack{x=a \\ y=-b}} = \frac{da}{dt} + i\frac{db}{dt}. \tag{10}$$

Diese Gleichung gibt die Geschwindigkeitskomponenten des Wirbels selbst, dessen Potential auf der linken Seite differentiiert wird; sie gilt auf Riemannschen

Flächen geradeso wie in der einfachen Ebene. Ihre Anwendung vereinfacht die Aufstellung der Differentialgleichungen der Wirbelbahnen wesentlich.

Verhalten der Wirbelbahnen bei der konformen Abbildung.

Aus jedem System von Wirbelpunkten samt der zugehörigen Strömung geht durch jede beliebige konforme Abbildung ein neues hervor; ob jedoch aus den Wirbelbahnen des alten Systems auch die Wirbelbahnen des Bildes hervorgehen, bedarf der Untersuchung.

Die Bahn eines Wirbels hat in jedem Punkt die Richtung der Stromlinie derjenigen Flüssigkeitsströmung, die durch Weglassung dieses Wirbels entsteht. Die Bedingung dafür, daß aus einem Linienelement einer Wirbelbahn bei der Abbildung wieder ein Linienelement der Bahn des Bildwirbels hervorgeht, ist die, daß die Strömung, die in der Bildebene durch Weglassung eines Wirbels entsteht, durch konforme Abbildung aus der Strömung entsteht, die man durch Weglassnng des entsprechenden Wirbels in der gegebenen Strömung erhält. Hiezu ist vor allem notwendig, daß die Abbildung ein-eindeutig ist, gleichgültig ob als Beziehung zwischen einfachen Ebenen oder Riemannschen Flächen. Ferner dürfen durch die Abbildung keine neuen Singularitäten hereingebracht werden; da insbesondere im Feld eines Wirbels der unendlich ferne Punkt die Eigenschaften eines Wirbelpunktes hat, um den die Strömung zirkuliert, darf ihm bei der Abbildung kein im Endlichen gelegener Punkt entsprechen.

Aus diesem Grund ist z. B. die Inversion $z = \frac{1}{\zeta}$ auszuschließen. Aus einem Wirbel mit dem komplexen Potential

$$w = -i\mu \lg (z - c)$$

geht durch Inversion ein Wirbelpaar

$$w = -i\mu \lg \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\gamma}\right) = -i\mu \lg \frac{\gamma - \zeta}{\gamma \zeta} = -i\mu [\lg(\gamma - \zeta) - \lg \zeta - \lg \gamma]$$

hervor, das aus einem festen Wirbel an der Stelle $\zeta = 0$ und einem beweglichen Wirbel an der Stelle $\zeta = \gamma$ besteht. $i\mu \lg \gamma$ tritt als additive Konstante zu dem Potential und ist ohne Einfluß auf die entstehende Strömung.

Ein Wirbelpaar geht durch Inversion wieder in ein Wirbelpaar über: die Singularität im Punkt $\zeta = 0$ verschwindet jedoch nur deshalb, weil dort zwei gleich starke Wirbel von entgegengesetztem Umlaufssinn auftreten. Läßt man in der gegebenen Ebene den einen Wirbel weg, um seine Bahnrichtung im Feld des anderen zu bekommen, so verschwindet in der Bildebene außer dem Bildwirbel auch der eine der Wirbel im Nullpunkt; infolgedessen tritt der andere Wirbel im Nullpunkt wieder auf und beeinflußt die Strömung.

Aus einem Element der Bahnkurve eines Wirbels geht also dann ein Element der Bahnkurve in der Bildebene hervor, wenn die Abbildung ein-eindeutig und singularitätenfrei ist und wenn der unendlich ferne Punkt bei der Abbildung in Ruhe bleibt.

Daraus folgt indessen noch nicht notwendig, daß die ganzen Bahnkurven bei der Abbildung einander entsprechen.

In der gegebenen Ebene ist die Geschwindigkeit eines Wirbelpunktes:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial n},$$

wo ds das Linienelement der Bahnkurve, $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$ den Differentialquotient des Potentials φ', welches aus dem Gesamtpotential der Strömung durch Weglassung des Potentials des betrachteten Wirbels entsteht, in Richtung der Normalen der Potentialflächen, also der Bahnkurve bedeutet. Diese Gleichung bleibt bei der konformen Abbildung nicht erhalten. Denn ds ändert sich um einen Faktor, den Maßstab der Abbildung $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$; um den reziproken Wert dieses Faktors ändert sich $\frac{\partial \varphi'}{\partial n}$. Wenn

also $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$ nicht etwa den Wert 1 hat, geht die Bahngeschwindigkeit eines Wirbels nicht in die Bahngeschwindigkeit des Bildwirbels über.

Wenn also ein Wirbel der gegebenen Ebene in einer unendlich kleinen Zeit ein Linienelement seiner Bahn durchläuft, so wird der Bildwirbel in einer anderen unendlich kleinen Zeit das Bild dieses Linienelementes durchlaufen. Betrachtet man die gleichzeitigen unendlich kleinen Ortsänderungen sämtlicher Wirbel des gegebenen Systems, so wird das System der Bildwirbel nur dann gleichzeitig in die Bildpunkte der gegebenen Wirbel einrücken können, wenn der Faktor, um den sich die Geschwindigkeit der Wirbel in ihrer Bahn bei der Abbildung ändert, für sämtliche Wirbel den gleichen Wert hat. Es muß also der Maßstab der Abbildung an sämtlichen Punkten, an denen sich die Wirbel des Systems gleichzeitig befinden, immer denselben Wert haben. Diese Bedingung wird nur in besonderen Fällen erfüllt sein; z. B. in folgendem:

Es seien nur 2 gleichstarke Wirbel von entgegengesetzter Drehrichtung vorhanden, die sich in einer zur Mittelsenkrechten der beiden Wirbelpunkte, etwa der X Achse, symmetrischen Strömung befinden. Bildet man die Strömung mittels einer Funktion, die zur selben Geraden symmetrisch ist, ab, so hat auch $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$ an symmetrisch gelegenen Punkten denselben Wert. Wenn also eine symmetrische Strömung mit zwei Wirbeln durch konforme Abbildung in eine neue symmetrische Strömung übergeführt wird, und wenn die früheren Voraussetzungen erfüllt sind, so geht die Wirbelbahn eines jeden der gegebenen Wirbel durch die konforme Abbildung in die des Bildwirbels über; jedoch befindet sich ein Wirbel der gegebenen Strömung und sein Bild zu entsprechenden Zeiten nicht in entsprechenden Punkten.

Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der Bewegung sind dann nach (5) Eliminationen und eine Quadratur nötig.

Bewegung eines Wirbels in einem von 2 Parallelen begrenzten Kanal.

Wenn sich ein Wirbel in einer von einer Geraden begrenzten Halbebene befindet, kann man die Normalkomponente der Strömung an der Geraden dadurch zum Verschwinden bringen, daß man einen zweiten Wirbel in der anderen Halbebene hinzufügt, der nach Lage und Umlaufssinn das Spiegelbild des gegebenen Wirbels ist. So entsteht im einfachsten Fall das Wirbelpaar. Beide Wirbel bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit parallel der Geraden fort, nämlich mit der Geschwindigkeit, die die von jedem Wirbel hervorgerufene Strömung am Orte des anderen Wirbels hat.

Befindet sich ein Wirbel in einem von zwei Parallelen begrenzten Kanal, so genügt es nicht, den Wirbel an beiden Seiten zu spiegeln; denn jedes dieser Spiegelbilder macht zwar die Normalkomponente der Strömung auf der einen Seite zu Null, hat aber ein Überströmen der anderen Seite zur Folge. Vollständig auf das Innere des Kanals beschränkt wird die Strömung erst, wenn man die unendlich vielen Spiegelbilder hinzunimmt, die durch fortwährendes Widerspiegeln an beiden Seiten des Kanals entstehen.

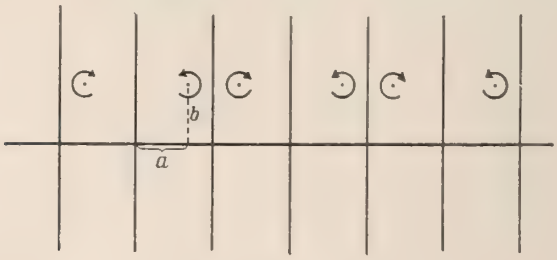


Fig. 1.

Ist π die Breite des Kanals und sind a, b die Koordinaten des Wirbels, so sind $a + 2k\pi, b$ die Koordinaten der Spiegelbilder von gleichem, $2k\pi - a, b$ die der Spiegelbilder von entgegengesetztem Umlaufssinn.

Das Geschwindigkeitspotential wird

$$\varphi = \mu \sum_{-\infty}^{\infty k} \left[\operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-(2k\pi+a)} - \operatorname{arctg} \frac{y-b}{x-(2k\pi-a)} \right].$$

Ordnet man die Wirbel nach der Entfernung von dem Aufpunkt x, y an, so nehmen die Reihenglieder fortwährend ab (natürlich ist immer der kleinste Wert des arctg zu nehmen); zugleich haben die Glieder abwechselnde Vorzeichen; die Reihe ist also sicher konvergent.

Die Geschwindigkeitskomponenten sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u = -\mu \sum_{-\infty}^{\infty k} \left[\frac{y-b}{(x-(2k\pi+a))^2+(y-b)^2} - \frac{y-b}{(x-(2k\pi-a))^2+(y-b)^2} \right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = \mu \sum_{-\infty}^{\infty k} \left[\frac{x-(2\pi k+a)}{(x \quad (2k\pi+a))^2+(y-b)^2} - \frac{x-(2k\pi-a)}{(x-(2k\pi-a))^2+(y-b)^2} \right].$$

Über die Konvergenz dieser Reihen gilt dasselbe wie oben.

An der Stelle $x = a$, $y = b$ bringt der dort selbst befindliche Wirbel keine Geschwindigkeitskomponente hervor; es wird also

$$\frac{da}{dt} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = 0$$

$$\frac{db}{dt} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right]_{\substack{x=a \\ y=b}} = -\frac{\mu}{2a} + \mu \sum_{-\infty}^{\infty k}{}' \left[\frac{-1}{2k\pi} - \frac{1}{2a-2k\pi} \right]$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi} \left[\frac{1}{a} + \sum_{-\infty}^{+\infty k}{}' \left(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{k} \right) \right].$$

Die rechte Seite von $\frac{db}{dt}$ ist eine einfach periodische Funktion, die an allen Stellen $a = k\pi$, wo k eine beliebige ganze positive oder negative Zahl einschließlich Null ist, einen einfachen Pol hat; und zwar ist

$$v = \frac{db}{dt} = -\frac{\mu}{2} \operatorname{cotg} a \,^{1}).$$

[1]) Vgl. z. B. Burkhardt, Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, S. 144 u. f.

Der Wirbel bewegt sich parallel den Wänden des Kanals; Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit hängt von seiner Entfernung von den beiden Wänden ab. In der Mitte des Kanals ist die Geschwindigkeit Null; sie wächst immer rascher, je näher der Wirbel einer der beiden Wände liegt; die Richtung, in der der Wirbel fortschreitet, ist dieselbe, in der sich die Flüssigkeit zwischen dem Wirbelpunkt und der näher gelegenen Wand bewegt.

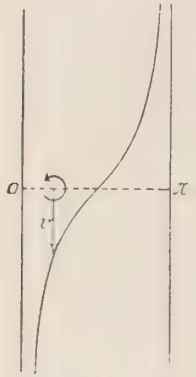


Fig. 2.
Schaulinie der Geschwindigkeitsverteilung in einem Kanal.

Wenn man den Kanal mit einem neben ihm liegenden Spiegelbild zusammenfaßt und die trennende Wand entfernt, so entsteht ein Kanal von doppelter Breite 2π, in dem sich ein zur Mittellinie symmetrisches Wirbelpaar befindet. Sind die Wirbel von den Wänden um ein Viertel der Kanalbreite entfernt, so bleiben sie in Ruhe; es herrscht ein übrigens sehr unstabiles Gleichgewicht; rücken sie sich näher, so bewegen sie sich in derselben Richtung wie ein Wirbelpaar im freien Raum mit um so größerer Geschwindigkeit, je kleiner ihre Entfernung ist; rücken sie den Wänden näher, so kehrt sich die Fortschreitungsrichtung um, der Einfluß der benachbarten Wand überwiegt den Einfluß des anderen Wirbels.

Der ganzen Bewegung kann man noch eine geradlinige fortschreitende Bewegung von gleichmäßiger Geschwindigkeit im ganzen Kanal überlagern, ohne daß dadurch die Relativbewegung des Wirbelsystems gestört wird.

In ganz ähnlicher Weise läßt sich die Bewegung eines Wirbels im Innern eines Rechtecks untersuchen. Die Geschwindigkeitskomponenten sind durch elliptische Funktionen ausdrückbar, die in der Partialbruchentwicklung auftreten. Auch die Bahnkurve selbst ist in sehr einfacher Weise durch elliptische Funktionen darzustellen.

Fälle von Wirbelbewegung in der zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit einem im Endlichen liegenden Verzweigungspunkt.

a) Ein Wirbel in ruhender Flüssigkeit.

Aus einem Wirbel mit dem komplexen Potential

$$w = -i\mu \lg (z - c)$$

geht durch konforme Abbildung mittels der Gleichung

$$z = \sqrt{\zeta}, \quad c = \sqrt{\gamma},$$

wo $\zeta = \xi + i\eta$, $\gamma = \alpha + i\beta$ ist, ein neuer Wirbel mit dem komplexen Potential

11) $$w = -i\mu \lg (\sqrt{\zeta} - \sqrt{\gamma})$$

hervor. Diese Gleichung (11) definiert eine Strömung, die in der zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit den Verzweigungspunkten $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$, in der $\sqrt{\zeta}$ eine eindeutige Funktion des Ortes wird, ebenfalls eindeutig ist; die Funktion w hat 2 wesentlich singuläre Stellen, um die herum die Strömung zyklisch wird, nämlich die Stelle $\zeta = \infty$, die in den ∞ fernen Verzweigungspunkt fällt, und die Stelle $\zeta = \gamma$, die jedoch nur in dem einen Blatt singulär ist, in dem $\sqrt{\zeta}$ dem eindeutig definierten Wert $\sqrt{\gamma}$ gleich wird.

Zunächst sind die gestaltlichen Verhältnisse dieses für die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel charakteristischen Wirbels zu untersuchen (Fig. 3a S. 398 und Fig. 3b S. 399). Das Potential der Bewegung ist der reelle, die Stromfunktion der imaginäre Teil der Funktion w. Wir haben also

11') $$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg (\sqrt{\xi + i\eta} - \sqrt{\alpha + i\beta})$$

in den reellen und imaginären Teil zu zerlegen.

Setzt man in Polarkoordinaten

12) $$\begin{aligned} z &= re^{i\varphi} \quad c = r_0 e^{i\varphi_0} \\ \zeta &= \varrho e^{i\vartheta} \quad \gamma = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}, \end{aligned}$$

so wird die Abbildungsformel

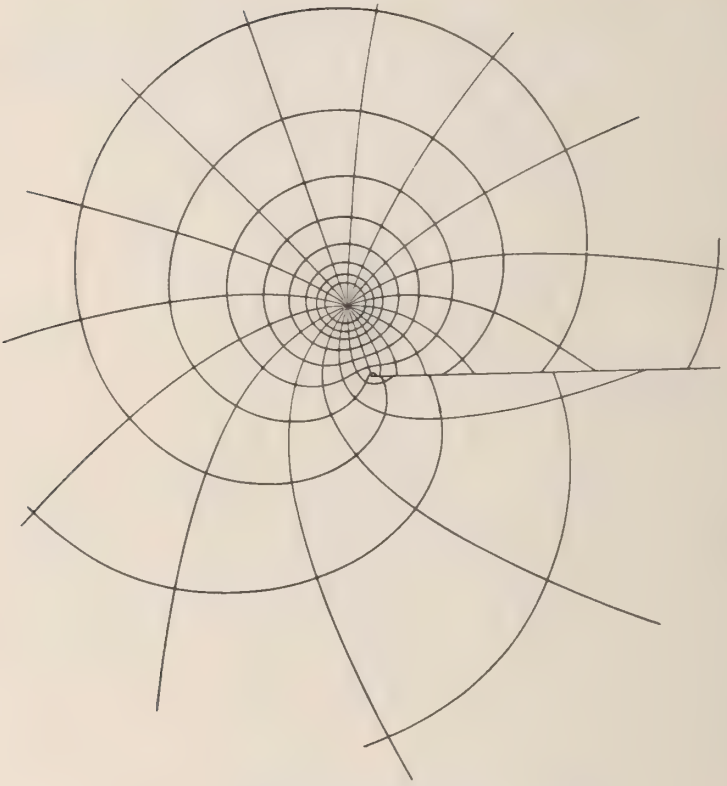


Fig. 3a. Feld eines Wirbels (oberes Blatt).

$$re^{i\varphi} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}},$$

also 13)

$$r = \varrho^{\frac{1}{2}} \quad \varphi = \frac{\vartheta}{2}.$$

Die Kreise der z Ebene um den Anfangspunkt gehen in Kreise der Riemannschen Fläche über, die den Anfangspunkt zweimal umlaufen, während die Radien durch den Anfangspunkt der Ebene in ebensolche durch den Anfangspunkt der Fläche mit doppeltem Polarwinkel übergehen. Während φ von 0 bis 2π wächst, wächst ϑ von 0 bis 4π; alle Winkel, die

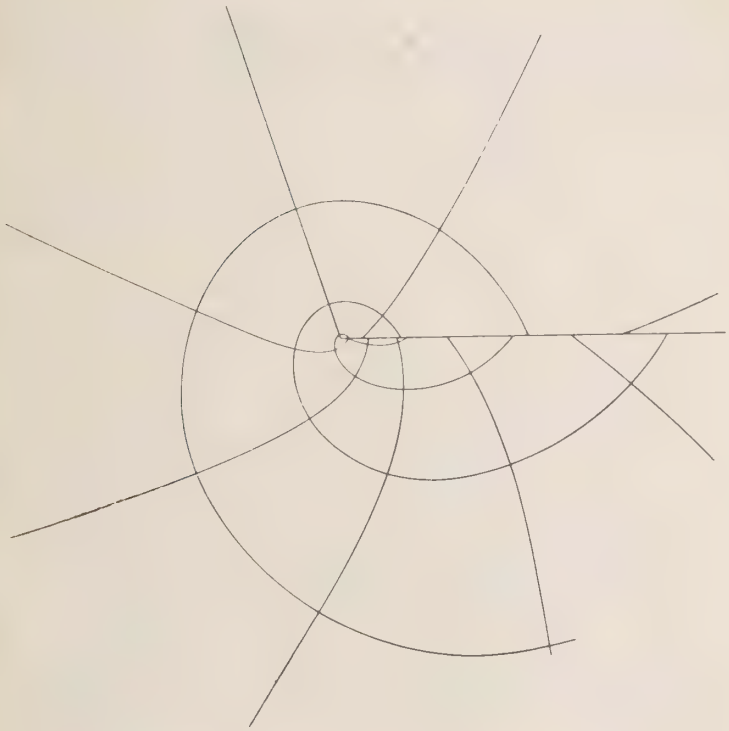


Fig. 3b. Feld eines Wirbels (unteres Blatt).

den Anfangspunkt zum Scheitel haben, werden verdoppelt; aus einer Geraden durch den Anfangspunkt der Ebene gehen zwei Halbgerade der Fläche hervor, die in beiden Blättern übereinanderliegen.

Nun ergibt sich unter Einführung der Polarkoordinaten

$$
\begin{aligned}
v = \varphi + i\psi &= -i\mu \lg\left[\varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}}\right] \\
&= -i\mu \lg\left[\left(\varrho^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\vartheta_0}{2}\right) + i\left(\varrho^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right] \\
&= -i\mu \left[\frac{1}{2}\lg\left(\varrho + \varrho_0 - 2\varrho^{\frac{1}{2}}\varrho_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right) + i \operatorname{arctg} \frac{\varrho^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta_0}{2}}{\varrho^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\vartheta_0}{2}}\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Demnach ist die Gleichung der Potentialkurven unter Einführung eines neuen Koordinatensystems, dessen ξ Achse durch den Punkt ϱ_0, ϑ_0 geht:

$$\frac{\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2}}{\varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - \varrho_0^{\frac{1}{2}}} = \lambda = \text{const} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{\mu}.$$

Daraus:

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} - \lambda \varrho^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} = -\lambda \varrho_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\varrho \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - 2\lambda \varrho \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} + \lambda^2 \varrho \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \lambda^2 \varrho_0$$

$$\varrho \frac{1 - \cos \vartheta}{2} - \lambda \varrho \sin \vartheta + \lambda^2 \varrho \frac{1 + \cos \vartheta}{2} = \lambda^2 \varrho_0.$$

In rechtwinkligen Koordinaten:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \frac{\lambda^2 + 1}{2} + \xi \frac{\lambda^2 - 1}{2} - \eta \lambda = \lambda^2 \varrho_0.$$

Quadriert man, so sieht man, daß die Potentialkurven durch das System von Parabeln

$$\xi^2 \lambda^2 + \lambda (\lambda^2 - 1) \xi \eta + \eta^2 \left(\frac{\lambda^2 - 1}{2} \right)^2 - \lambda^2 (\lambda^2 - 1) \varrho_0 \xi + 2 \lambda^3 \varrho_0 \eta - \lambda^4 \varrho_0^2 = 0.$$

die durch den Punkt ϱ_0, ϑ_0 hindurchgehen, gebildet werden.

Eine einfache Umformung ergibt

$$\left(\frac{2\lambda \xi + (\lambda^2 - 1) \eta}{\lambda^2 + 1} \right)^2 - 4 \frac{\lambda^2 \varrho_0}{\lambda^2 + 1} \left(\frac{(\lambda^2 - 1) \xi - \lambda \eta}{\lambda^2 + 1} \right) - 4 \left(\frac{\lambda^2 \varrho_0}{\lambda^2 + 1} \right)^2 = 0$$

oder mit veränderter Bezeichnung

$$\eta'^2 - 4 f \xi' - 4 f^2 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Anfangspunkt der Brennpunkt sämtlicher Parabeln ist; ihre Brennweite ist

$$f = \frac{\lambda^2 \varrho_0}{\lambda^2 + 1}.$$

Vertauscht man λ mit $-\lambda$ und η' mit $-\eta'$, so bleibt die Gleichung der Potentialkurven erfüllt; das Parabelsystem ist zur ξ' Achse, die durch den Wirbelpunkt hindurchgeht, symmetrisch.

Die Gleichung der Stromlinien wird, auf dasselbe Koordinatensystem bezogen:

$$\varrho + \varrho_0 - 2\varrho^{\frac{1}{2}}\varrho_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} = \nu = \text{const} = e^{-\frac{2\eta'}{\mu}}.$$

Durch Quadrieren erhält man

$$4\varrho\varrho_0\cos^2\frac{\vartheta}{2} = (\nu - \varrho_0)^2 - 2(\nu - \varrho_0)\varrho + \varrho^2.$$

Eine Umrechnung in rechtwinklige Koordinaten gibt

$$[\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\varrho_0 + (\nu - \varrho_0)^2]^2 = 4\nu^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Die Stromlinien sind Kurven 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten, die zur ξ Achse symmetrisch sind, also Pascalsche Schneckenlinien. 2 Doppelpunkte sind die ∞ fernen Kreispunkte, der dritte liegt auf der ξ Achse an der Stelle $\xi = \varrho_0 - \nu$; $\eta = 0$: seine Tangenten können reell oder imaginär sein.

Es mag noch bemerkt werden, daß die Gleichungen der Potential- und Stromlinien in der Riemannschen Fläche auch durch Transformation der entsprechenden Gleichungen in der Ebene zu erhalten wären [1]).

b) Ein Wirbelpaar in ruhender Flüssigkeit.

Ein Wirbelpaar in der Ebene, gebildet durch 2 Wirbel von den Stärken μ und $-\mu$, die sich an 2 Punkten $c = a + ib$ und $\bar{c} = a - ib$ befinden, die spiegelbildlich zur XAchse liegen, bestimmt eine Strömung, deren Potentialkurven ein Kreisbüschel durch die Wirbelpunkte, deren Stromlinien ein Kreisbüschel

[1]) Vgl. Holzmüller, Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften, § 55, S. 122 u. f. Ein Teil des oberen Blattes ist gezeichnet, Fig. 34.

um die Wirbelpunkte als Nullkreise bilden. Jeder Wirbel bewegt sich unter dem Einfluß des anderen parallel zur X Achse mit konstanter Geschwindigkeit; die X Achse ist Stromlinie und kann als feste Grenze der Strömung aufgefaßt werden. Man erhält dann die Bewegung eines Wirbels längs einer Wand.

Bei der Abbildung geht, wie schon erwähnt, die ganze X Achse in die positive Ξ Achse über; die beiden Wirbelpunkte $\gamma = \alpha + i\beta$, $\bar{\gamma} = \alpha - i\beta$ liegen zu ihr spiegelbildlich. Nimmt man die $+\,\Xi$ Achse als Übergangslinie, so liegen die beiden Wirbel in verschiedenen Blättern. Die Übergangslinie ist Stromlinie, die auf beiden Seiten nach verschiedenen Richtungen durchströmt wird; sie kann als natürliche Begrenzung der Bewegung dienen. Schneidet man die Riemannsche Fläche längs der Übergangslinie auf, so erhält man zwei Ebenen, deren jede längs der positiven Ξ Achse aufgeschnitten ist. In jeder Ebene befindet sich ein Wirbel, in bewegter Flüssigkeit, welche die positive Ξ Achse nicht überschreitet: der Wirbel selbst bewegt sich unter dem Einfluß des zweiten Wirbels, der im anderen Blatt liegt.

Die Wirbelbahn im oberen Blatt der zerschnittenen Riemannschen Fläche geht aus der geradlinigen Wirbelbahn in der positiven Halbebene durch konforme Abbildung hervor, weil sich bei der Abbildung der Ebene auf die Riemannschen Fläche die unendlich fernen Punkte entsprechen und neue Singularitäten durch die Abbildungsfunktion nicht hereingebracht werden, außerdem die Bedingung der Symmetrie vor und nach der Abbildung erfüllt ist.

Ein Wirbelpaar in der Ebene besitzt das komplexe Potential

$$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg[(x-a)+i(y-b)] + i\mu \lg[(x-a)+i(y+b)]$$
$$= -i\mu\left[\frac{1}{2}\lg\frac{(x-a)^2+(y-b)^2}{(x-a)^2+(y+b)^2} + i \operatorname{arctg}\frac{-2b(x-a)}{(x-a)^2+y^2-b^2}\right].$$

Die Potentialkurven sind die Kreise des Büschels

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - b^2 - 2\lambda b(x-a) = 0,$$

wo λ der Parameter ist; oder in Polarkoordinaten

$$r^2 - 2(a + \lambda b)r\cos\varphi + (a^2 - b^2 + 2\lambda ab) = 0.$$

Die Stromlinien sind die Kreise des orthogonalen Büschels

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 + b^2 - 2\nu by = 0$$

mit dem Parameter ν; in Polarkoordinaten

$$r^2 - 2ar\cos\varphi - 2\nu br\sin\varphi + a^2 + b^2 = 0.$$

Die Abbildung in die Riemannsche Fläche ergibt als Gleichung der Potentialkurven[1]):

$$\varrho - 2(a + \lambda b)\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} + (a^2 - b^2 + 2\lambda ab) = 0.$$

Will man diese Kurven in ihrer Lagebeziehung zu den Wirbelpunkten, durch die sie hindurchgehen müssen, untersuchen, so ist auch auf die Größen a und b die Transformation anzuwenden; handelt es sich nur um die Art der Kurven, so kann man die Bezeichnung vereinfachen:

$$\varrho - 2A\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} + B = 0.$$

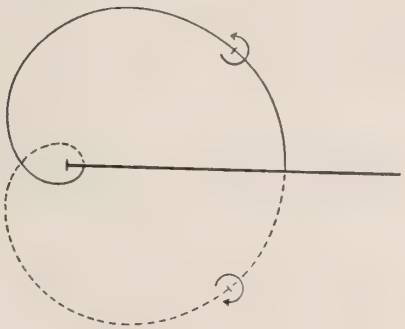


Fig. 4.

[1]) Bei Holzmüller, l. c., ist dieses Kurvensystem nur erwähnt, ein Spezialfall (Symmetrie zur Ξ Achse) teilweise gezeichnet, Fig. 35.

Zweimaliges Quadrieren und Einführen von Kartesischen Koordinaten gibt

$$(\xi^2 + \eta^2 - 2A^2\xi + B^2)^2 = 4(A^2 - B)^2(\xi^2 + \eta^2).$$

Die einzelnen Kurven sind von derselben Art wie die Stromlinien eines Wirbels in der zweiblätterigen Fläche; sie haben außer in den Kreispunkten einen Doppelpunkt auf der negativen Ξ Achse und schneiden die positive Ξ Achse, die Übergangslinie, in zwei Punkten senkrecht (Fig. 4).

Die Gleichung der Stromlinien in der Riemannschen Fläche ist

$$\varrho - 2A\varrho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} - 2B\varrho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2} + C = 0$$

in Kartesischen Koordinaten

$$[\xi^2+\eta^2-2(A^2-B^2)\xi-4AB\eta+C^2]^2 = 4(\xi^2+\eta^2)(A^2-B^2-C^2).$$

Diese Kurven 4. Ordnung besitzen die Symmetrieachse

$$(A^2 - B^2)\xi + 2AB\eta = 0,$$

die für jede von ihnen eine andere Lage hat und aus dem Durchmesser des Kreises in der Ebene entsteht, der durch den Koordinatenanfang geht. Führt man diese Symmetrieachse als neue Ξ' Achse ein und kürzt die Bezeichnung, so wird die Gleichung der Stromlinien:

$$[\xi'^2 + \eta'^2 - 2A'\xi' + C^2]^2 = 4B'(\xi'^2 + \eta'^2).$$

Von den schon wiederholt aufgetretenen Kurven 4. Ordnung unterscheiden sich diese Stromlinien durch das Fehlen des im Endlichen liegenden Doppelpunktes.

Es ist jetzt die Bewegung des Wirbels in der aufgeschnittenen Ebene zu untersuchen. Die Wirbelbahn erhält man durch konforme Abbildung aus der Wirbelbahn in der positiven Halbebene

$$y = b,$$

in Polkoordinaten

$$r\sin\varphi = b.$$

Die Abbildung gibt

$$\varrho^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\vartheta}{2} = b.$$

Quadrieren und Einführen rechtwinkliger Koordinaten gibt

$$\eta^2 = 4\xi b^2 + 4b^4.$$

Die Bahnkurve ist also eine Parabel mit der Brennweite b^2, deren Brennpunkt der Koordinatenanfang und deren Achse die Übergangslinie ist (Fig. 5).

Fig. 5.

Feld eines Wirbelpaares in der Fläche (oberes Blatt) und Wirbelbahn.

Um die Differentialgleichungen der Bewegung des Wirbels im oberen Blatt der aufgeschnittenen Riemannschen Fläche aufzustellen, hat man auf das komplexe Potential dieses Wirbels

$$w = -i\mu \lg(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\gamma})$$

die Gleichung (10) anzuwenden, die folgende Gestalt annimmt:

15) $$\frac{da}{dt} + i\frac{d\beta}{dt} = \left|\frac{dw}{d\zeta}\right|_{\substack{\zeta=\alpha \\ \eta=-\beta}}.$$

Dabei ist noch darauf zu achten, daß das Spiegelbild $\alpha, -\beta$ des Punktes α, β im anderen Blatt der aufgeschnittenen Fläche liegt.

Wenn also

$$\alpha + i\beta = \gamma = \varrho_0 e^{i\vartheta_0}$$

ist, wird

$$\alpha - i\beta = \bar{\gamma} = \varrho_0 e^{i(4\pi - \vartheta_0)} = \varrho_0 e^{-i\vartheta_0}.$$

Dann gibt (15)

$$\frac{da}{dt} + i\frac{d\beta}{dt} = -i\mu\left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta}(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\gamma})}\right]_{\zeta=\gamma} = -\frac{i\mu}{2} \frac{1}{\varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}}\left(\varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}} - \varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}}\right)}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist der reelle und imaginäre Teil zu trennen:

$$\frac{da}{dt} + i\frac{d\beta}{dt} = +\frac{\mu}{4\varrho_0} \frac{\cos\frac{\vartheta_0}{2} + i\sin\frac{\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\vartheta_0}{2}},$$

also 15')

$$\frac{da}{dt} = \frac{\mu}{4\varrho_0}\operatorname{cotg}\frac{\vartheta_0}{2}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu}{4\varrho_0}.$$

Durch Division erhält man

$$\frac{d\beta}{da} = \operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2},$$

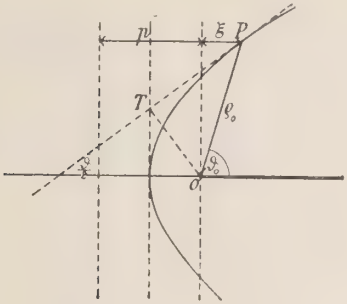


Fig. 6.

also halbiert die Tangente den Winkel des Fahrstrahls vom Anfangspunkt nach dem Berührpunkt mit einer Parallelen zur Achse. Diese Eigenschaft ist für die Parabel charakteristisch. Wie schon durch konforme Abbildung gefunden, ist die Bahnkurve eine Parabel mit der positiven Ξ Achse als Achse und dem Anfangspunkt als Brennpunkt.

Die Gleichung der Parabel ist, wenn p ihren Parameter bedeutet,

$$\varrho_0 = \xi_0 + p,$$

also ist ihr Parameter

$$p = \varrho_0 - \varrho_0 \cos \vartheta_0$$

$$p = 2\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2},$$

eine Gleichung, die wieder als Gleichung der Parabel aufzufassen ist.

Die Geschwindigkeit der Bewegung ist nach (15)

$$v = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2} = \frac{\mu}{4\varrho_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Nach der Figur 7 ist

$$\varrho_0 \sin \frac{\vartheta_0}{2} = 0\,T,$$

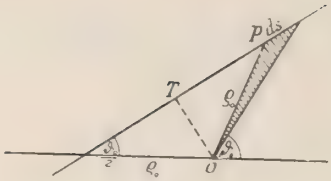


Fig. 7.

also

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{40T}.$$

Die vom Radiusvektor in der Zeit dt überstrichene Fläche ist

$$dF = \frac{1}{2} 0T \cdot ds = \frac{\mu}{8} dt.$$

Es gilt also der Flächensatz. Die Bewegung vollzieht sich unter dem Einfluß einer fingierten Zentralkraft, die dem Quadrat der Entfernung vom Brennpunkt 0 umgekehrt proportional ist. Durch Vergleich mit dem parabolischen Fall der Planetenbewegung ergibt sich, daß sich der Wirbel wie ein Massenpunkt bewegt, der im Unendlichen die Geschwindigkeit Null hat und von einer zweiten Masse im Verzweigungspunkt angezogen wird, die dem Quadrat der Stärke des bewegten Wirbels proportional ist.

c) Ein Wirbelpaar in strömender Flüssigkeit.

Man kann nun versuchen, das durch die Gleichungen (8) bzw. (9) gegebene Integral der Bewegungsgleichungen eines Wirbelsystems in der Ebene so abzuändern, daß es für Wirbelsysteme unserer Riemannschen Fläche gilt. Die Funktionen Ψi und Q bleiben unverändert bis auf die Bezeichnung und müssen Stromfunktionen darstellen, die in der Riemannschen Fläche eindeutig sind. An Stelle der Stromfunktionen in P haben Stromfunktionen von Wirbeln in der Riemannschen Fläche zu treten, die der Gleichung (14) entnommen werden können. Dann wird aus (8):

$$\sum_1^n{}^i \mu_i [\Psi]_{\substack{\xi=\alpha_i \\ \eta=\beta_i}} - \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^k \mu_i \mu_k \lg \sqrt{\varrho_i + \varrho_k - 2\varrho_i^{\frac{1}{2}} \varrho_k^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\vartheta_i - \vartheta_k}{2}}$$

16)
$$= \text{const.}$$

Sind nur zwei symmetrische Wirbel vorhanden, so ergibt sich aus (9):

$$\Psi(\alpha, \beta) - \Psi(\alpha, -\beta) + \mu \lg \sqrt{2\varrho_0 - 2\varrho_0 \cos \vartheta_0} = \text{const.}$$

oder

17)
$$2\Psi(\alpha, \beta) + \mu \lg \sqrt{4\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2}} = \text{const.}$$
$$2\Psi(\alpha, \beta) + \mu \lg \sqrt{\varrho_0} \sin \frac{\vartheta_0}{2} = \text{const.}$$

Ist außer den beiden symmetrischen Wirbeln keine überlagerte Potentialströmung vorhanden, so ist $\Psi = 0$, also

$$\varrho_0 \sin^2 \frac{\vartheta_0}{2} = \text{const.}$$

Das ist die Gleichung der Parabel, die als Wirbelbahn bereits gefunden ist. Die Symmetrieachse wird von den beiden Halbgeraden der positiven Ξ Achse gebildet, die als Übergangslinie angenommen sind, und als natürliche Grenze der Strömung dienen können.

Es lassen sich nun aus (17) auch die Bahnen eines Wirbels in beliebigen Strömungen angeben, die die Übergangslinie als Stromlinie und mithin als natürliche Grenze besitzen.

Eine Strömung in der Ebene um eine feste Halbgerade als Begrenzung wird von den konfokalen Parabeln gebildet, die diese Halbgerade als Achse und ihren Endpunkt als Brennpunkt haben. Die Potentialkurven sind das Orthogonalsystem von konfokalen Parabeln. Für unseren Zweck kommt alles darauf an, diese Parabelströmung als Strömung in der zweiblätterigen Fläche aufzufassen.

Eine Doppelquelle von der Stärke 1 im Anfangspunkt der Ebene mit dem komplexen Potential

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$$

geht durch die Abbildung $z = 1/\zeta$ in eine Doppelquelle über, die in dem im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche liegt. Dann wird

$$w = \varphi + i\psi = \frac{1}{\xi + i\eta},$$

also

$$(\varphi + i\psi)^2(\xi + i\eta) = 1.$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei reellen Gleichungen

$$(\varphi^2 - \psi^2)\xi - 2\varphi\psi\eta = 1$$
$$(\varphi^2 - \psi^2)\eta + 2\varphi\psi\xi = 0.$$

Durch Elimination von ψ bzw. φ erhält man die Stromlinien und Potentialkurven

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - \frac{(\xi^2 + \eta^2)\xi}{\varphi^2} - \frac{\eta^2}{4\varphi^4} = 0$$

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 + \frac{(\xi^2 + \eta^2)\xi}{\psi^2} - \frac{\eta^2}{4\psi^4} = 0.$$

Jedes dieser beiden Systeme besteht aus ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven, die zur Ξ Achse symmetrisch sind; sie gehen durch Spiegelung an der H Achse ineinander über. Die Kurven sind Kardioiden: sie liegen in beiden Blättern kongruent übereinander. Die Flüssigkeit strömt vom Anfangspunkt im einen Blatt parallel der positiven Ξ Achse aus, im anderen Blatt in umgekehrter Richtung ebenfalls parallel der positiven Ξ Achse zurück. Über die Lage der Übergangslinie ist zunächst nichts festgesetzt.

In der Figur 8 ist der Verlauf einiger Stromlinien gezeichnet. Auch die positive Ξ Achse ist Stromlinie in beiden Blättern. Nimmt man sie als natürliche Grenze der Strömung, so zerfällt die Strömung in zwei Strömungen, deren jede eine aufgeschnittene Ebene erfüllt. Im oberen Blatt geht die

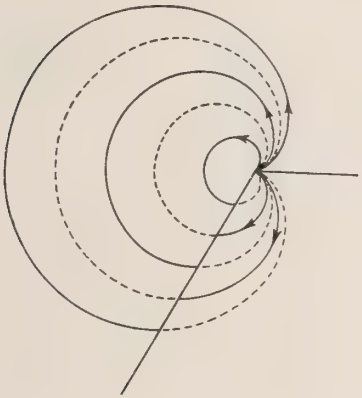


Fig. 8.

Strömung im 1. Quadranten vom Nullpunkt aus und im 4. Quadranten zurück; im unteren Blatt ist nur die Richtung der Bewegung umgekehrt. Die Potentialkurven gehen beim Überschreiten der positiven Ξ Achse auf das andere Blatt über, enden also, wenn man nur die Strömung in einem Blatt betrachtet, an der positiven Ξ Achse, die sie senkrecht treffen.

Figur 9 gibt ein Bild der Strömung im oberen Blatt.

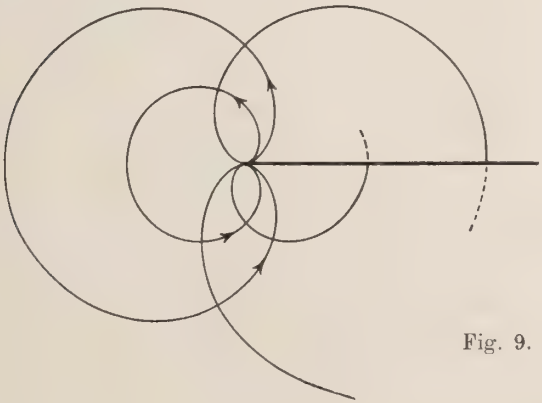


Fig. 9.

Nimmt man den Anfangspunkt als Zentrum einer Inversion, so erhält man eine Strömung aus einer Doppelquelle, die im unendlich fernen Verzweigungspunkt einer zweiblätterigen Riemannschen Fläche liegt. Der zweite Verzweigungspunkt ist der Anfangspunkt; die positive Ξ Achse wird von der Strömung nicht überschritten, sie wird als Übergangslinie und als natürliche Grenze der Bewegung verwendet; die Potentialkurven in der aufgeschnittenen Ebene enden an der Übergangslinie senkrecht.

Das komplexe Potential der Strömung ist

$$w = \varphi + i\psi = \sqrt{\xi + i\eta} = \sqrt{\zeta}.$$

Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles entstehen die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \psi^2 &= \xi \\ 2\varphi\psi &= \eta \end{aligned}$$

und durch Elimination von ψ bzw. φ

$$\begin{aligned} \eta^2 + 4\varphi^2\xi - 4\varphi^4 &= 0 \\ \eta^2 - 4\psi^2\xi - 4\psi^4 &= 0. \end{aligned}$$

Die Stromlinien sind Parabeln, die die positive Ξ Achse zur Achse haben; die Potentialkurven Halbparabeln mit der negativen Ξ Achse als Achse. Das ganze System ist konfokal und hat den Anfangspunkt als gemeinsamen Brennpunkt (Fig. 10).

Aus dem komplexen Potential

$$w = \varphi + i\psi = \sqrt{\zeta}$$

erhält man durch Einführung von Polarkoordinaten

$$w = \varphi + i\psi = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}} = \varrho^{\frac{1}{2}} \left(\cos\frac{\vartheta}{2} + i \sin\frac{\vartheta}{2} \right),$$

daraus folgt

$$\psi = \varrho^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

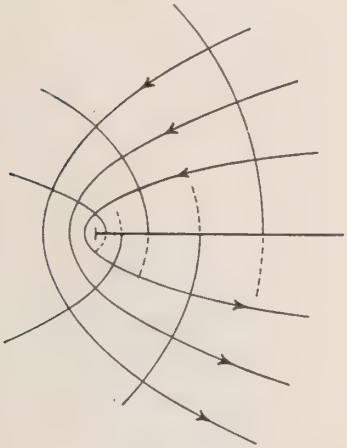


Fig. 10.

Dieser Ausdruck ist, mit der Quellenstärke $\varkappa$ multipliziert, an Stelle von $\Psi(\alpha, \beta)$ in (17) einzusetzen:

$$2\varkappa\varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta_0}{2} + \mu \lg\left(\varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta_0}{2}\right) = \text{const.},$$

also ist auch

18) $$\varrho_0^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\vartheta_0}{2} = \text{const.}$$

Das ist dieselbe Parabel, auf der sich auch ein Wirbel in sonst ruhender Strömung um die positive Ξ Achse als unendlich langes Hindernis bewegt. Die Geschwindigkeit des Wirbels in seiner Bahn setzt sich aus zwei Summanden zusammen, nämlich aus der Geschwindigkeit des Wirbels in sonst ruhender Flüssigkeit und aus der Geschwindigkeit der Parabelströmung am Orte des Wirbels.

Der Wirbel bewegt sich also auf einer Stromlinie der ungestörten Parabelströmung; von seiner Stärke und seiner Umlaufsrichtung hängt seine Relativgeschwindigkeit an jedem Orte ab. Er kann sich mit der Strömung bewegen oder ihr entgegenlaufen (Fig. 11a und 11b).

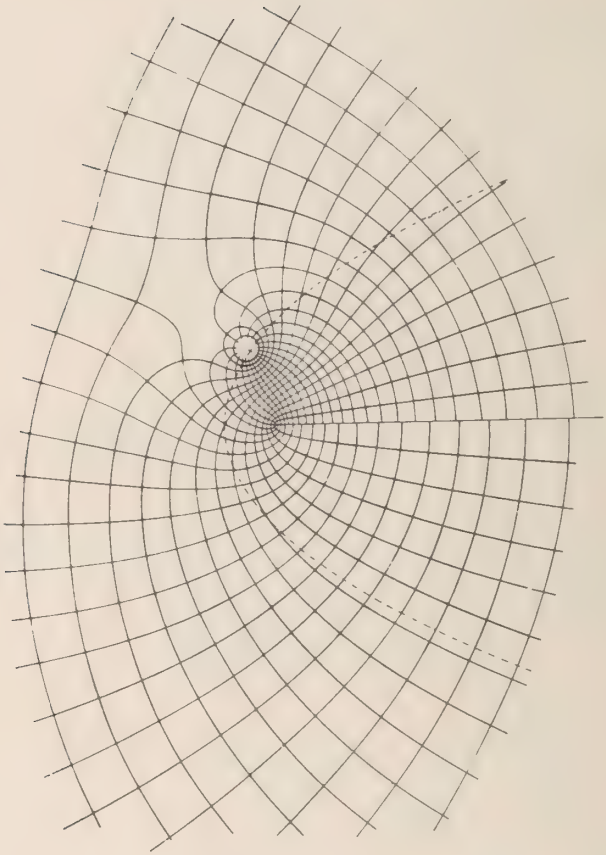


Fig. 11a.

Fälle von Wirbelbewegung in der zweiblätterigen Riemannschen Fläche mit zwei im Endlichen liegenden Verzweigungspunkten.

a) Ein Wirbel in ruhender Flüssigkeit.

Wenn man die Veränderliche ζ auf einer zweiblätterigen Riemannschen Fläche ausbreitet, deren Verzweigungspunkte an den Stellen $\zeta = \pm 1$ liegen, so werden die beiden Funktionen

$$z_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad \text{und} \quad z_2 = \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}},$$

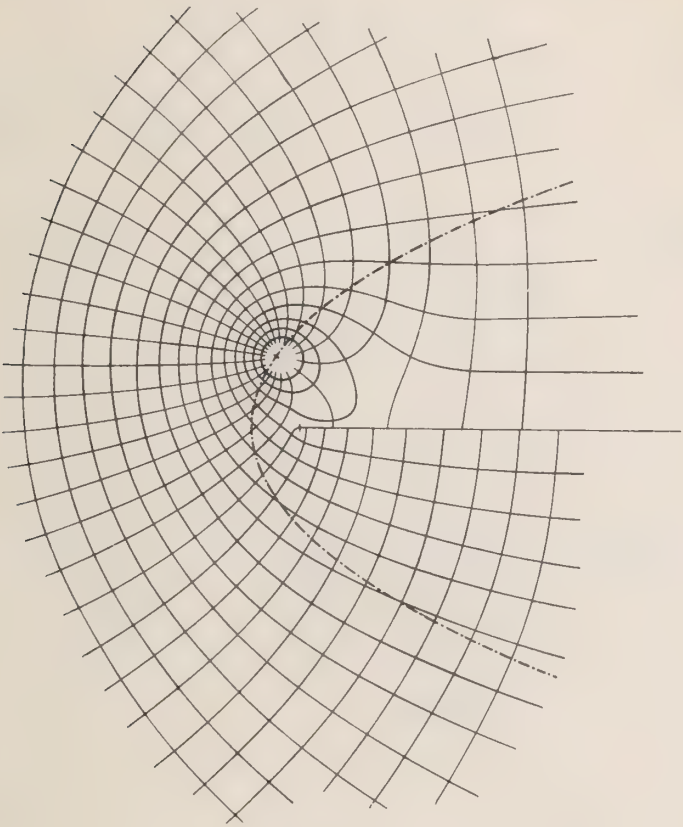


Fig. 11b.

die durch die Gleichung

$$z_1 = (\zeta - 1) z_2$$

als „Irrationatitäten derselben Klasse“ gekennzeichnet sind, eindeutige Funktionen des Ortes.

Die Funktion z_1 ergibt ζ nicht als einwertige Funktion von z_1, wäre also für unsere Zwecke nur brauchbar, wenn man auch die Werte von z_1 in einer zweiblätterigen Fläche ausbreiten würde. Die zweite Abbildung ist ein-eindeutig.

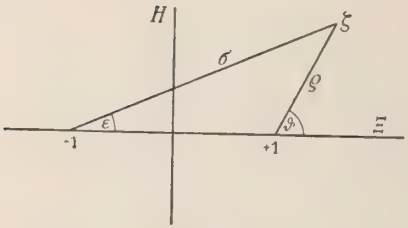


Fig. 12.

Unsere Abbildungsformel sei also

$$z = \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}}; \quad \text{aufgelöst } \zeta = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}.$$

Führt man in der Ebene Polarkoordinaten ein:

$$z = re^{i\varphi},$$

in der Fläche 2 Systeme von Polarkoordinaten mit den Verzweigungspunkten als Pole (Fig. 12):

$$19) \qquad \begin{aligned} \zeta - 1 &= \varrho e^{i\vartheta} \\ \zeta + 1 &= \sigma e^{i\varepsilon}, \end{aligned}$$

so ist die Abbildungsformel

$$19a) \qquad re^{i\varphi} = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varepsilon}{2}}}{\varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}}},$$

also

$$19b) \qquad r = \left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \varphi = \frac{\varepsilon - \vartheta}{2}.$$

Von den 4 Größen $\sigma, \varrho, \varepsilon, \vartheta$ genügen 2 zur Bestimmung eines Punktes; die Größen ϱ und σ indessen nicht eindeutig, da sie nicht zwischen beiden Blättern unterscheiden lassen. ε und ϑ liegen zwischen 0 und 4π oder zwischen -2π und $+2\pi$ und ändern sich um 2π beim Umlauf um den betreffenden Pol. Über die Lage der Übergangslinie wird zunächst keine Festsetzung getroffen.

Man kann die Abbildung

$$z = \sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}}$$

in 2 Schritte zerlegen:

$$z = \sqrt{z'}; \quad z' = \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}.$$

Die erste dieser beiden Abbildungen gibt die eben ausführlich behandelte Abbildung der Ebene in eine zweiblätterige Fläche mit einem Verzweigungspunkt im Nullpunkt und einem zweiten im unendlich fernen Punkt. Die zweite ist der Ausdruck einer Kreisverwandtschaft in dieser Fläche, also von Ähnlichkeitstransformationen abgesehen einer Inversion. Das Zentrum der Inversion ist der Punkt $\zeta = 1$, wo das Bild des unendlich fernen Verzweigungspunktes entsteht; der zweite Verzweigungspunkt fällt nach $\zeta = -1$.

Bildet man einen Wirbel der Ebene ab, so ist zu bemerken, daß der unendliche ferne Punkt der Ebene alle geometrischen Eigenschaften eines Wirbelpunktes hat; die Stromlinien umschließen ihn sämtlich, die Potentialkurven gehen durch ihn hindurch. In unserer zweiblätterigen Fläche gehen also alle Potentialkurven durch den Verzweigungspunkt $\zeta = 1$; alle Stromlinien umkreisen ihn und zwar in 2 Umläufen. Es entsteht dort ein fester Wirbel, der gleichzeitig mit dem beweglichen Bild des Wirbels der Ebene auftritt. Die gestaltlichen Verhältnisse der Strom- und Potentialkurven würde man am besten in der Weise diskutieren, daß man die Strom- und Potentialkurven eines Wirbels in der Fläche mit einem unendlich fernen Verzweigungspunkt einer geeigneten Inversion unterwirft.

Aus dem komplexen Potential eines Wirbels der Ebene

$$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg (z - c)$$

geht durch die Abbildung hervor (Fig. 13a oberes Blatt, b unteres Blatt):

$$w = \varphi + i\psi = -i\mu \lg \left(\sqrt{\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}} - \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \right).$$

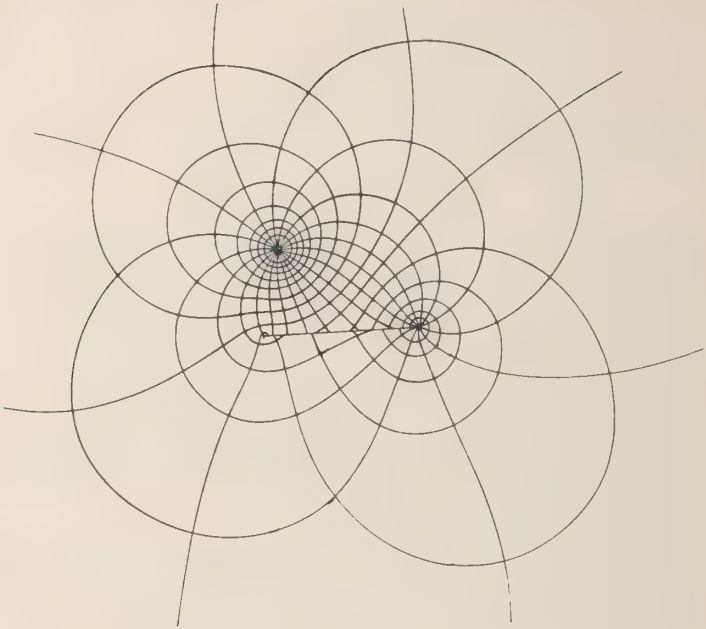


Fig. 13a.

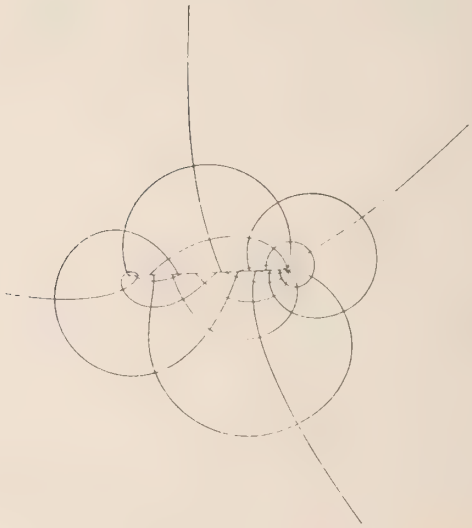


Fig. 13b.

w hat in der Fläche zwei singuläre Stellen, die den Werten 0 und ∞ des Logarithmand entsprechen, nämlich $\zeta = \gamma$ und $\zeta = 1$. Die erste singuläre Stelle liegt nur im einen Blatt, im anderen ist die Stelle regulär; die zweite gibt den schon erwähnten festen Wirbel mit doppeltem Umlauf im einen Verzweigungspunkt. Der unendlich ferne Punkt ist regulär.

Formt man um:

$$w = -i\mu \lg \frac{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma-1}},$$

so kann man den festen Wirbel $i\mu \lg \sqrt{\zeta-1}$ und eine Konstante abspalten und erhält

$$20) \quad w' = -i\mu \lg [\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}]$$

als Ausdruck für den elementaren Wirbel in der zweiblätterigen Fläche an der Stelle $\zeta = \gamma$ des einen Blattes. Die zweite singuläre Stelle von w' ist $\zeta = \infty$.

b) Ein Wirbelpaar in ruhender Flüssigkeit.

Im folgenden kommen nur elementare Wirbel in Betracht. Führt man bipolare Koordinaten ein und unterscheidet die Polarkoordinaten des Wirbelpunktes γ durch den Index 0 von denen eines Punktes ζ der Strömung, so ist

$$21) \quad w' = -i\mu \lg \left| \sigma^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varepsilon}{2}} \varrho_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta_0}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sigma_0^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\varepsilon_0}{2}} \right|.$$

Nun soll die Bewegung eines zur Ξ Achse symmetrischen Wirbelpaares untersucht werden. Das Spiegelbild w' des Wirbels w' kann im selben Blatt liegen; dann wird sich w' von w' nur durch das Vorzeichen von ε_0 und ϑ_0 unterscheiden. Liegt das Spiegelbild im anderen Blatt, so muß man vom ersten Spiegelbild aus einen Weg beschreiben, der den einen Verzweigungspunkt umkreist; es wird also einer der Winkel ε_0 oder ϑ_0 um 2π verändert, oder das Vorzeichen eines der beiden Ausdrücke $e^{-i\frac{\varepsilon_0}{2}}$ und $e^{-i\frac{\vartheta_0}{2}}$ vertauscht.

Um die Differentialgleichung der Bahn des ersten Wirbels aufzustellen, hat man nach (10)

$$\frac{da}{dt} + i\frac{d\beta}{dt} = \left[\frac{dw'}{d\zeta}\right]_{\substack{\xi=\alpha \\ \eta=-\beta}}$$

zu setzen. Nun ist

$$\frac{dw'}{d\zeta} = -i\mu \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\zeta+1}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{\zeta-1}}}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}}$$

$$= -\frac{i\mu}{2\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\zeta-1}} \cdot \frac{\sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma+1}}{\sqrt{\zeta+1}\sqrt{\gamma-1} - \sqrt{\zeta-1}\sqrt{\gamma+1}}.$$

Die Einführung bipolarer Koordinaten gibt

$$\frac{dw'}{d\zeta} = -\frac{i\mu}{2\sqrt{\varrho\sigma}e^{i\frac{\varepsilon+\vartheta}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\varrho\varrho_0}e^{i\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}} - \sqrt{\sigma\sigma_0}e^{i\frac{\varepsilon+\varepsilon_0}{2}}}{\sqrt{\sigma\varrho_0}e^{i\frac{\varepsilon+\vartheta_0}{2}} - \sqrt{\varrho\sigma_0}e^{i\frac{\vartheta+\varepsilon_0}{2}}}.$$

Liegt das Spiegelbild im selben Blatt, so wird

$$\left[\frac{dw'}{d\zeta}\right]_{\substack{\xi=\alpha \\ \eta=-\beta}} = -\frac{i\mu}{2\sqrt{\varrho_0\sigma_0}e^{-i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}} \frac{\varrho_0 - \sigma_0}{\sqrt{\varrho_0\sigma_0}\left(e^{i\frac{-\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}} - e^{i\frac{-\vartheta_0+\varepsilon_0}{2}}\right)}$$

$$= \frac{\mu(\varrho_0 - \sigma_0)e^{i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}}{4\varrho_0\sigma_0 \sin\frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}}$$

im anderen Fall wird

$$\left[\frac{dw'}{d\zeta}\right]_{\substack{\xi=\alpha \\ \eta=-\beta}} = \frac{i\mu}{2\sqrt{\varrho_0\sigma_0}e^{-i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}} \frac{-(\varrho_0 + \sigma_0)}{\sqrt{\varrho_0\sigma_0}\left(e^{i\frac{-\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}} + e^{i\frac{-\vartheta_0+\varepsilon_0}{2}}\right)}$$

$$= \frac{-i\mu(\varrho_0 + \sigma_0)e^{i\frac{\varepsilon_0+\vartheta_0}{2}}}{4\varrho_0\sigma_0 \cos\frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}}.$$

Die Differentialgleichung der Bahnkurve wird im ersten Fall

$$\frac{da}{dt} + i\frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu(\varrho_0 - \sigma_0)}{4\varrho_0\sigma_0 \sin\frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}}\left[\cos\frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2} + i\sin\frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2}\right],$$

also

$$\frac{d\beta}{da} = \operatorname{tg}\frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2}.$$

Die Tangente der Kurve halbiert also den Winkel der beiden Fahrstrahlen. Die Wirbelbahn ist ein Ast einer Hyperbel, die die beiden Verzweigungspunkte zu Brennpunkten hat. Die Übergangslinie, die als natürliche Grenze der Strömung dienen kann und längs deren die Riemannsche Fläche in zwei Ebenen zerschnitten wird, verbindet die Verzweigungspunkte geradlinig durchs Unendliche. Durch die zwischen -1 und $+1$ bleibende Lücke bewegt sich der Wirbel hindurch (Fig. 14).

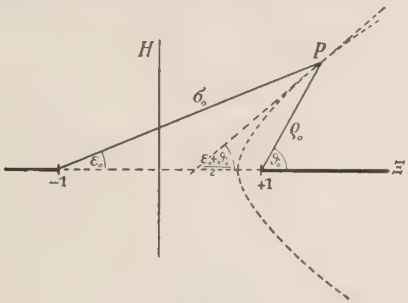


Fig. 14.

Im zweiten Fall ist

$$\frac{da}{dt} + i\frac{d\beta}{dt} = \frac{\mu(\varrho_0 + \sigma_0)}{4\varrho_0\sigma_0 \cos\frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}}\left[\sin\frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2} - i\cos\frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2}\right],$$

also

$$\frac{d\beta}{da} = -\operatorname{cotg}\frac{\varepsilon_0 + \vartheta_0}{2}.$$

Die Tangente der Bahnkurve halbiert den Außenwinkel der Fahrstrahlen. Die Wirbelbahn ist eine Ellipse, die die beiden Verzweigungspunkte zu Brennpunkten hat. Natürliche Grenze der Strömung ist die von -1 nach $+1$ geradlinig verlaufende Übergangslinie. Um dieses Hindernis herum kreist der Wirbel (Fig. 15 und 16).

Für den zeitlichen Verlauf der Bewegung gilt ein dem Flächensatz verwandtes Gesetz. Der Beweis sei nur für den zweiten Fall erbracht. Die Größe der Geschwindigkeit ist

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\mu(\varrho_0 + \sigma_0)}{4\varrho_0\sigma_0 \cos\dfrac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} = \frac{\mu}{4}\left[\frac{1}{\sigma_0 \cos\dfrac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}} + \frac{1}{\varrho_0 \cos\dfrac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}}\right].$$

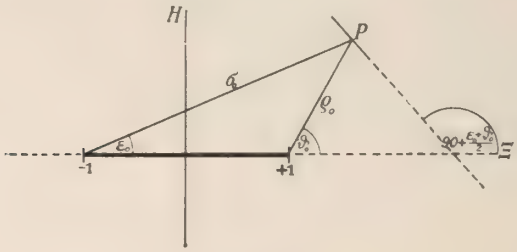


Fig. 15.

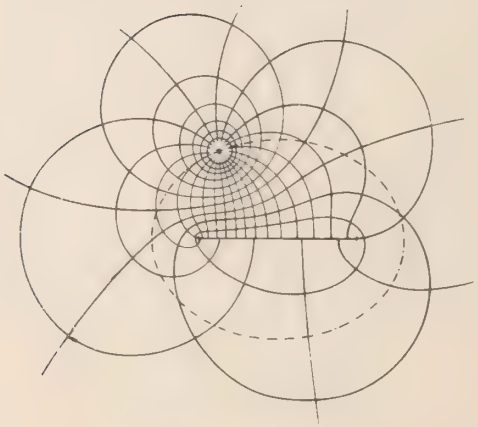


Fig. 16.

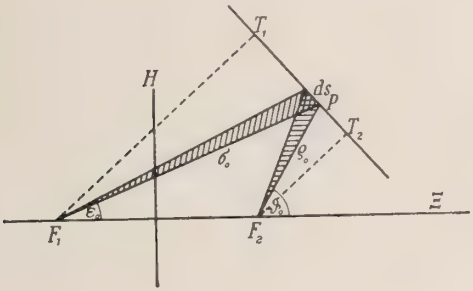


Fig. 17.

Fällt man von den Brennpunkten Lote F_1T_1 und F_2T_2 auf eine Tangente, so ist (Fig. 17)

$$F_1T_1 = \varrho_0 \cos\frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2}; \quad F_2T_2 = \sigma_0 \cos\frac{\varepsilon_0 - \vartheta_0}{2},$$

also

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\mu}{4}\left[\frac{1}{F_1T_1} + \frac{1}{F_2T_2}\right].$$

Nun ist $\frac{F_1T_1 \cdot ds}{2}$ der Inhalt dJ_1 des von dem Fahrstrahl F_1P in der Zeit dt überstrichenen Dreiecks; ebenso $\frac{F_2T_2 \cdot ds}{2} = dJ_2$; also

$$\frac{1}{dt} = \frac{\mu}{8}\left[\frac{1}{dJ_1} + \frac{1}{dJ_2}\right].$$

Rückt der eine Brennpunkt ins Unendliche, so wird die Bahn eine Parabel; $\frac{1}{dJ_2}$ verschwindet gegenüber $\frac{1}{dJ_1}$ und aus der obigen Gleichung geht der Flächensatz

$$dJ_1 = \frac{\mu}{8}\,dt$$

hervor, dessen Gültigkeit für diesen Fall schon bewiesen ist.

c) Ein Wirbelpaar in strömender Flüssigkeit.

Die konforme Abbildung hätte in diesem Fall die Wirbelbahn nicht ergeben wegen des festen Wirbels an der Stelle $\zeta = 1$, der bei der Abbildung eines beweglichen Wirbels der Ebene in die Fläche auftritt; dagegen kann man die Wirbelbahn erhalten, wenn man das für die Ebene aufgestellte Integral (8) bzw. (9) für die zweiblätterige Fläche mit 2 Verzweigungspunkten umformt. Diese Methode führt übrigens weiter als die direkte Behandlung der Differentialgleichungen der Bewegung.

Zunächst wird die Stromfunktion eines Elementarwirbels der zweiblätterigen Fläche an Stelle der Stromfunktion eines Wirbels in der Ebene zu setzen sein. Nun ist nach (21)

$$w' = \varphi' + i\psi' = -i\mu \lg\left[\left(\sqrt{\sigma\varrho_0}\cos\frac{\varepsilon+\vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0}\cos\frac{\vartheta+\varepsilon_0}{2}\right) + i\left(\sqrt{\sigma\varrho_0}\sin\frac{\varepsilon+\vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0}\sin\frac{\vartheta+\varepsilon_0}{2}\right)\right].$$

Also

$$\psi' = -\mu \lg \sqrt{\left(\sqrt{\sigma\varrho_0}\cos\frac{\varepsilon+\vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0}\cos\frac{\vartheta+\varepsilon_0}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\sigma\varrho_0}\sin\frac{\varepsilon+\vartheta_0}{2} - \sqrt{\varrho\sigma_0}\sin\frac{\vartheta+\varepsilon_0}{2}\right)^2}$$

$$\psi' = -\frac{\mu}{2}\lg\left[\sigma\varrho_0 + \varrho\sigma_0 - 2\sqrt{\varrho\sigma\varrho_0\sigma_0}\cos\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)-(\vartheta-\vartheta_0)}{2}\right].$$

Dann erhält man an Stelle des Integrales (8)

22)
$$\sum_1^n{}^{i} \mu_i [\Psi]_{\substack{\xi=\alpha_i \\ \eta=\beta_i}}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_1^n{}^{i}\sum_1^n{}^{k}{}' \mu_i\mu_k \lg\left[\sigma_i\varrho_k + \varrho_i\sigma_k - 2\sqrt{\varrho_i\varrho_k\sigma_i\sigma_k}\cos\frac{(\varepsilon_i-\varepsilon_k)-(\vartheta_i-\vartheta_k)}{2}\right] = \text{const.}$$

Ist nur ein Wirbelpaar vorhanden, so ist

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$
$$\vartheta_1 = -\vartheta_2 = \vartheta$$
$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \varepsilon \quad \text{oder} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon, \ \varepsilon_2 = -\varepsilon + 2\pi$$

je nach dem Blatt, in dem das Spiegelbild des ersten Wirbels liegt.

Also tritt an Stelle von (9)

$$\left| \begin{array}{l} 2\Psi(\alpha, \beta) - \dfrac{\mu}{2} \lg 2\sigma\varrho(1 - \cos(\varepsilon - \vartheta)) = \text{const.} \\ \text{oder} \\ 2\Psi(\alpha, \beta) - \dfrac{\mu}{2} \lg 2\sigma\varrho(1 + \cos(\varepsilon - \vartheta)) = \text{const.}, \end{array} \right.$$

nach einer Umformung ergibt sich als Gleichung der Wirbelbahn

$$\left| \begin{array}{l} 4\Psi(\alpha, \beta) - \mu \lg \sigma\varrho \sin^2 \dfrac{\varepsilon - \vartheta}{2} = \text{const.} \\ \text{oder} \\ 4\Psi(\alpha, \beta) - \mu \lg \sigma\varrho \cos^2 \dfrac{\varepsilon - \vartheta}{2} = \text{const.} \end{array} \right.$$

In diesen Gleichungen sind 2 von den 4 Größen σ, ϱ, ε, ϑ, etwa ε und ϑ, durch die beiden anderen auszudrücken.

Aus der Figur 12 erhält man

$$\begin{array}{l|l} \varrho \sin\vartheta = \sigma \sin\varepsilon & \cdot \sin\varepsilon \\ \varrho \cos\vartheta = \sigma \cos\varepsilon - 2 & \cdot \cos\varepsilon. \end{array}$$

Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich

$$\varrho^2 = \sigma^2 - 4\sigma \cos\varepsilon + 4,$$

also

$$\cos\varepsilon = \frac{\sigma^2 - \varrho^2 + 4}{4\sigma}.$$

Anderseits erhält man durch Addieren nach Multiplikation mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$

$$\varrho \cos(\varepsilon - \vartheta) + 2\cos\varepsilon = \sigma,$$

also ist

$$\cos(\varepsilon - \vartheta) = \frac{\varrho^2 + \sigma^2 - 4}{2\varrho\sigma},$$

folglich

$$2\sin^2\frac{\varepsilon-\vartheta}{2}=\frac{4-(\varrho-\sigma)^2}{2\varrho\sigma}$$

$$2\cos^2\frac{\varepsilon-\vartheta}{2}=\frac{-4+(\varrho+\sigma)^2}{2\varrho\sigma}.$$

Die Gleichung der Wirbelbahn wird also

23) $$\begin{cases} 4\Psi(\alpha,\beta)-\mu\lg(4-(\varrho-\sigma)^2)=\text{const.} \\ \text{oder } 4\Psi(\alpha,\beta)-\mu\lg(-4+(\varrho+\sigma)^2)=\text{const.} \end{cases}$$

Damit ist die Bahn eines Wirbelpaares in der zweiblätterigen Fläche gefunden, wenn sich die Flüssigkeit in beliebiger symmetrischer Strömung befindet. Auf die einfache Ebene übertragen, gibt die erste der Gleichungen (23) die Bewegung eines Wirbels in einer beliebigen Strömung, die durch eine Lücke in einer unendlich ausgedehnten Geraden fließt; die zweite Gleichung gibt die Bahn eines Wirbels in jeder Strömung, die ein geradliniges Hindernis von endlicher Länge umfließt.

Ist insbesondere keine Potentialströmung vorhanden, so ist

24) $$\varrho-\sigma=\text{const.}\quad\text{oder}\quad\varrho+\sigma=\text{const.}$$

Die Wirbelbahn ist einer der schon bekannten Kegelschnitte, dessen Brennpunkte die Enden des Hindernisses sind.

Eine der bekanntesten Strömungen durch eine Lücke oder um ein Hindernis ist die Strömung in konfokalen Kegelschnitten, deren Brennpunkte in die Enden des Hindernisses fallen. Da für einen dieser Kegelschnitte $\varrho\pm\sigma$ denselben konstanten Wert hat wie für die Wirbelbahn in ruhender Flüssigkeit, und also $\Psi(\alpha,\beta)$ und die Stromfunktion des Wirbels gleichzeitig konstant werden, folgt, daß sich auch in dieser Strömung der Wirbel auf einem der konfokalen Kegelschnitte bewegt, obwohl er die ganze Strömung stört und ihr gegenüber eine Relativgeschwindigkeit besitzt.

Auch für jede andere bekannte Strömung, die den Grenzbedingungen genügt, z. B. für die Strömung einer aus dem unendlichen kommenden Flüssigkeit um eine schiefgestellte Platte, geben die Gleichungen (23) die Bahn eines sich in der Strömung bewegenden Wirbels in geschlossener Form.

Wenn man zu den beiden Wirbeln in der Riemannschen Fläche noch ihre Spiegelbilder zur H Achse hinzunimmt, so erhält man in jedem Blatt ein Wirbelpaar. Läßt man die Übergangslinie durch den unendlich fernen Punkt gehen, so bewegt sich das Wirbelpaar durch eine Lücke in einem unendlich langen Hindernis; ist die Verzweigungslinie die direkte Verbindung der beiden Verzweigungspunkte, so bewegen sich die beiden Wirbel symmetrisch um beide Seiten des Hindernisses. Die Bahnen der Wirbel, die man hinter einem eingetauchten Ruderblatt beobachtet, werden mit einem Teil der Bahnen dieses Wirbelpaares übereinstimmen, wenn auch die interessanteste Frage, die der Ablösung des Wirbelpaares, unserer Art der Betrachtung nicht zugänglich ist.

Die H Achse ist Stromlinie und kann als Grenze der Bewegung dienen. Man erhält dann die Bewegung eines Wirbels in der Halbebene, der sich im ersten Fall durch eine Lücke zwischen der Grenzgeraden und einem zu ihr senkrechten, bis ins Unendliche reichenden Hindernis bewegt, im zweiten Fall um ein von der Grenzgeraden senkrecht in die Flüssigkeit ragendes Hindernis.

Im ersten Fall sind die Bestimmungsstücke der 4 Wirbel in der Fläche:

	μ_i	ϱ_i	σ_i	ϑ_i	ε_i	$(\vartheta-\varepsilon)_i$
I.	μ	ϱ	σ	ϑ	ε	$\vartheta-\varepsilon$
II.	$-\mu$	ϱ	σ	$-\vartheta$	$-\varepsilon$	$-(\vartheta-\varepsilon)$
III.	$-\mu$	σ	ϱ	$\pi-\varepsilon$	$\pi-\vartheta$	$\vartheta-\varepsilon$
IV.	μ	σ	ϱ	$\pi+\varepsilon$	$\pi+\vartheta$	$-(\vartheta-\varepsilon)$.

In der Figur 18 sind die Wege eingezeichnet, auf denen man vom ersten Wirbelpunkt aus die anderen erreichen kann. In Gleichung (22), die die Wirbelbahnen gibt, treten dann

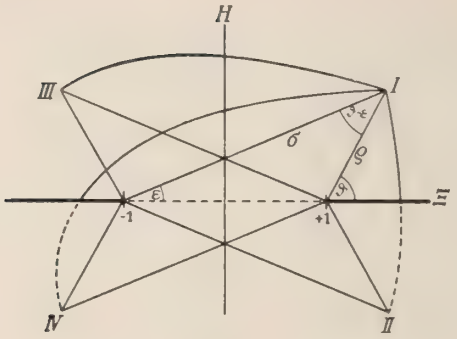


Fig. 18.

4 Summanden auf, welche Stromfunktionen der überlagerten Potentialströmung, und 6 Summanden, welche Stromfunktionen der Wirbel sind. Die überlagerte Strömung soll symmetrisch zur Übergangslinie und zur H Achse sein; dann ergibt sich:

$$4\mu\Psi(\alpha,\beta)+\frac{\mu^2}{2}\lg\frac{(2\varrho\sigma-2\varrho\sigma\cos(\vartheta-\varepsilon))^2(\varrho^2+\sigma^2-2\varrho\sigma\cos 0)^2}{(\varrho^2+\sigma^2-2\varrho\sigma\cos(\vartheta-\varepsilon))^2}=\text{const.}$$

Nun ist aber

$$2\varrho\sigma\cos(\vartheta-\varepsilon)=\varrho^2+\sigma^2-4,$$

also

$$4\Psi(\alpha,\beta)+\mu\lg\frac{[4-(\varrho-\sigma)^2](\varrho-\sigma)^2}{4}=\text{const.}$$

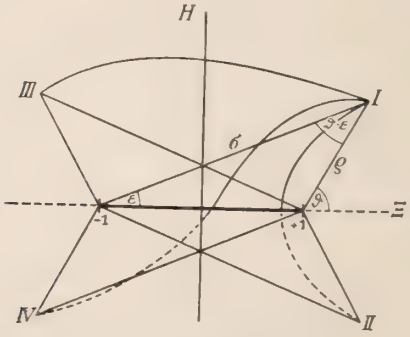


Fig. 19.

Ist $\Psi = 0$ angenommen, so ist auch

$$\varrho - \sigma = \text{const.},$$

d. h. in einer sonst ruhenden Flüssigkeit ist die Wirbelbahn ein Ast einer der konfokalen Hyperbeln.

Interessanter ist der zweite Fall. Die Bestimmungsstücke der 4 Wirbel sind (Fig. 19)

	μ_i	ϱ_i	σ_i	ϑ_i	ε_i	$(\vartheta - \varepsilon)_i$
I.	μ	ϱ	σ	ϑ	ε	$\vartheta - \varepsilon$
II.	$-\mu$	ϱ	σ	$2\pi - \vartheta$	$-\varepsilon$	$2\pi - (\vartheta - \varepsilon)$
III.	$-\mu$	σ	ϱ	$\pi - \varepsilon$	$\pi - \vartheta$	$\vartheta - \varepsilon$
IV.	μ	σ	ϱ	$\pi + \varepsilon$	$\vartheta - \pi$	$2\pi - (\vartheta - \varepsilon)$

Die Gleichung der Bahnkurve wird

$$4\mu\Psi(\alpha,\beta)+\frac{\mu^2}{2}\lg\frac{(2\varrho\sigma+2\varrho\sigma\cos(\vartheta-\varepsilon))^2(\varrho^2+\sigma^2-2\varrho\sigma\cos 0)^2}{(\varrho^2+\sigma^2+2\varrho\sigma\cos(\vartheta-\varepsilon))^2}=\text{const.}$$

oder

$$4\Psi(\alpha,\beta)+\mu\lg\frac{[(\varrho+\sigma)^2-4](\varrho-\sigma)^2}{\varrho^2+\sigma^2-2}=\text{const.}$$

Ist $\Psi(\alpha,\beta)=0$, so wird die Bahnkurve durch die Gleichung

$$25)\qquad \frac{[(\varrho+\sigma)^2-4](\varrho-\sigma)^2}{\varrho^2+\sigma^2-2}=\text{const.}=4k$$

gegeben. In rechtwinkligen Koordinaten ergibt sich hieraus

$$25\,a)\qquad F=\xi^4(k^2-2k)+2\xi^2\eta^2(k^2-2)+\eta^4(k^2+2k)+2k(\xi^2+\eta^2)=0.$$

Von den 4 Asymptoten dieser Kurve 4. Ordnung, die zu beiden Achsen symmetrisch liegt, sind 2 für jeden Wert von k imaginär: auch die anderen 2 können es sein. Im Anfangspunkt hat die Kurve einen singulären Punkt, der aber, weil dort

$$F_{11}=4k,\quad F_{12}=0,\quad F_{22}=4k$$

ist, isoliert ist:

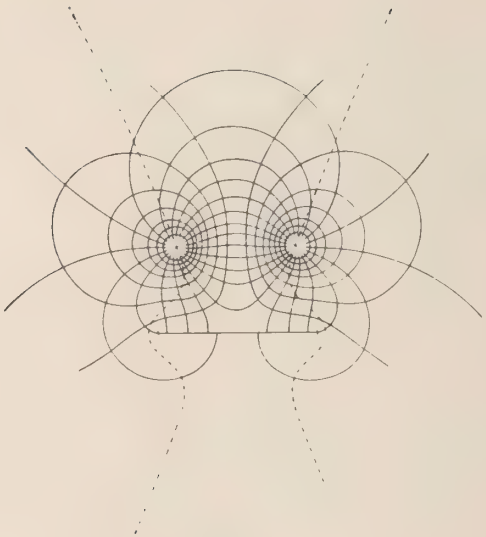


Fig. 20.

In Polarkoordinaten ϱ, φ, deren Pol der Anfangspunkt ist, wird die Wirbelbahn

$$F = \varrho^2((k - \cos 2\vartheta)^2 - 1) + 2k = 0. \tag{25b}$$

Die Gleichungen (25a) und (b) zeigen, daß durch jeden Punkt der Ebene zwei Kurven F hindurchgehen, von denen nur die eine Wirbelbahn sein kann; die zweite ist durch das Rationalmachen der Gleichung (25) hereingekommen. Für die Richtung der Asymptoten gibt (25b):

$$(k - \cos 2\vartheta)^2 - 1 = 0$$
$$\cos 2\vartheta = k \pm 1.$$

Also ist nur, wenn $|k| < 2$ ist, ein Paar reeller Asymptoten vorhanden. Die Gestalt der Bahnkurve ist aus Fig. 20 ersichtlich[1]); die beiden Wirbel nähern sich einander nach dem

[1]) Durch ein Versehen ist in Figur 20 die H Achse, die Stromlinie ist, weggeblieben.

Umlaufen des Hindernisses rasch, um sich dann wieder langsam voneinander zu entfernen.

Da auch die Strömung aus dem Unendlichen um ein Hindernis bekannt ist, oder die Strömung, welche die Bewegung des Hindernisses in ruhender Flüssigkeit hervorbringt[1]), sind auch die Bahnen der Wirbel um das Hindernis in strömender Flüssigkeit oder um ein bewegtes Hindernis in einer im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit der Diskussion ohne weiteres zugänglich.

[1]) Lamb, Hydrodynamik, S. 101.

Bemerkung.

Für die Konstruktion der Strömungsfelder ist die Methode der konformen Abbildung verwendet. Einer Schar konzentrischer Kreise um den Nullpunkt samt den Radien, die die Ebene in unendlich kleine Quadrate teilen, entspricht in der zweiblätterigen Fläche ein ebensolches System mit veränderten Abständen oder zwei orthogonale Kreisbüschel, je nachdem der eine Verzweigungspunkt im Unendlichen oder beide im Endlichen liegen. Hiedurch sind die Ebene und die Fläche punktweise aufeinander bezogen. Legt man nun auf das Kreisnetz in der Ebene ein auf Pauspapier gezeichnetes ebenes Strömungsfeld auf, so kann man auf einem zweiten Blatt Pauspapier über dem Kreisnetz in der Fläche das Bild des Strömungsfeldes in der Fläche zeichnen. Außerdem ist wiederholt die bekannte Summation zweier Potentiale verwendet. Zwei Systeme von Potentialkurven teilen die Ebene in Parallelogramme, deren Diagonalen die Potentialkurven eines neuen Feldes bilden, das durch Superposition der beiden gegebenen

Felder entsteht. Als Potentialkurven können aber auch die Stromlinien aufgefaßt werden, und wenn sie nur so angeordnet sind, daß sie zusammen mit den Potentialkurven die Ebene in unendlich kleine Quadrate teilen, lassen sie die nämliche Superposition zu wie die Potentialkurven selbst.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Januar, Februar u. März 1*

Abhandlungen.

H. Burkhardt: Über Funktionen großer Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung 1

H. Schlechtinger: Das Verhalten der Plastosomen in der Spermatogenese von Hirudo medicinalis und Aulastomum vorax (mit 2 Tafeln) 13

S. Finsterwalder: Das Verhältnis der bayrischen zur preußischen Landestriangulation und die Lotabweichung in München 53

M. Schmidt: Untersuchung regionaler und lokaler Bodensenkungen im oberbayerischen Alpenvorland durch Feinniveliement (mit 4 Textfiguren) 71

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft II

Mai- bis Julisitzung.

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Mai bis Juli . . . 5*

Abhandlungen.

A. Endrös: Zum Problem des Euripus (mit 1 Figurentafel und 1 Kartenskizze im Text) 99

L. Burmester: Über die Erscheinung bei der Beobachtung der Speichen eines hinter parallelen Stäben bewegten Rades, genannt das Staketphänomen (mit 2 Tafeln) 141

M. Lagally: Systeme von Potentialflächen und Stromflächen . 157

R. Kleeberg: Angenäherte Bestimmung entfernter Koeffizienten in Entwicklungen nach der mittleren Anomalie in der Theorie der Keplerschen Bewegung 191

J. Stark und H. Lunelund: Polarisation der Lichtemission der Kanalstrahlen 205

K. F. Bottlinger: Zur Frage der Absorption der Gravitation (mit 1 Tafel) 223

S. Finsterwalder: Der Zusammenschluß des preußischen und sächsischen Hauptdreiecksnetzes im Norden von Bayern . 241

A. Sommerfeld: Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen bei Wechselstrombetrieb 261

A. Rauber: Untersuchungen über die Funktionen, welche die Bewegung des dreiachsigen Kreisels um einen festen Punkt beschreiben 287

P. P. Ewald: Interferenzaufnahme eines Graphitkristalles und Ermittlung des Achsenverhältnisses von Graphit . . . 325

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1914

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom November und Dezember 15*

Verzeichnis der im Jahre 1914 eingelaufenen Druckschriften . . 19*

Abhandlungen.

E. Wagner: Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen nach Versuchen gemeinsam mit Joh. Brentano (mit 2 Tafeln) . 329

H. Liebmann: Zur Theorie der Elementvereine 339

K. Bopp: J. H. Lamberts Stellung zum Raumproblem und zur Parallelentheorie in der Beurteilung der Zeitgenossen . 361

H. Liebmann: Eine Eigenschaft der C. Neumannschen Konfigurationskonstante 369

M. Lagally: Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit 377

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

en Klasse
1914 24-94727

AMNH LIBRARY
100229657